# Suites

lundi 19, mercredi 21, mardi 26 février

## Table des matières



Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

**Convention** : sauf mention explicite autre, la relation "$> 0$" signifiera "$\in \mathbf{R}_+^*$".

## 1 Valeurs approchées

**Définition.** *Soient $a$ et $v$ deux scalaires et $\varepsilon > 0$. On dit que $v$ est une **valeur approchée** de $a$ à $\varepsilon$ près si $|v - a| \leq \varepsilon$. On pourra noter cela "$v \simeq a$ à $\varepsilon$ près", ce dernier $\varepsilon$ étant appelé l'**erreur**[1] de l'approximation $v \simeq a$.*

**Exemple.** Soient $a$ un réel et $n \geq 0$ un entier. On appelle ***valeurs décimales approchées*** de $a$ ***par défaut*** (resp. ***par excès***) à $10^{-n}$ près les rationnels $\frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$ et $\frac{\lceil 10^n a \rceil}{10^n}$. Par exemple, $\sqrt{18} \simeq 4,243$ à $10^{-3}$ près par excès et $e = 2,7\underline{18281828}\overline{4\overline{59}045}$ à $10^{-15}$ près par défaut.

**Rappels.**
Dans $\mathbf{R}$, on a les équivalences pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous réels $a$ et $v$ [dessin]

$$\begin{aligned} |a| &\leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon, \\ |v - a| &\leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq v \leq a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans $\mathbf{K}$, on a les comparaisons dites ***triangulaires*** :

$$\begin{aligned} ||a| - |b|| &\leq |a \pm b| \leq |a| + |b| && \text{pour tous scalaires } a \text{ et } b, \\ \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| && \begin{array}{c} \text{pour tout entier } n \in \mathbf{N} \\ \text{et tout } (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{K}^n \end{array}. \end{aligned}$$

[1] C'est sans doute cela qui a amené Cauchy, dans son cours d'analyse de 1815 qu'il donna à l'École Polytechnique, à dénoter une erreur par sa première lettre hellénisée.

**En pratique.** Pour comparer deux scalaires, on passe très souvent par d'autres scalaires que l'on sait comparer "à la chaîne". Par exemple, étant donnés cinq scalaires $a, b, u, v, w$, on aura [dessin]

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-u)+(u-v)+(v-w)+(w-b)| \\ &\leq |a-u|+|u-v|+|v-w|+|w-b|. \end{aligned}$$

# 2 Suites

**Définition (suite, terme).** *On appelle* ***suite*** *tout élément de* $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$*. Lorsque* $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ *(resp.* $\mathbf{K}=\mathbf{C}$*), on parle de* ***suite réelle*** *(resp.* ***suite complexe****). L'image d'un entier* $n \in \mathbf{N}$ *par une suite* $a$ *est notée* $a_n := a(n)$ *et est appelée le* $n$*-ème* ***terme*** *de la suite* $a$*.*

Il est usuel de noter une suite $a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ sous la forme $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou même abusivement $(a_n)$ où l'indice $n$ est MUET. Explicitement, *i. e.* sans symbole muet, une suite $a$ pourra être notée comme un "$\infty$-uplet" $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$

**Rappel.** L'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est un espace vectoriel et un anneau pour les lois "coordonnées par coordonnées" définies par

$$\Lambda \cdot (A, B, C, ...) + (a, b, c, ...) \times (\alpha, \beta, \gamma, ...) := (\Lambda A + a\alpha, \Lambda B + b\beta, \Lambda C + c\gamma, ...)$$

pour tous scalaires $\Lambda, a, b, c, ..., \alpha, \beta, \gamma, ..., A, B, C, ...$.

Lorsque $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, on définit un ***ordre*** en posant pour toutes suites réelles $(a_n)$ et $(b_n)$

$$(a_n) \leq (b_n) \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq b_k.$$

**Représentations.** Étant donnée une suite $(a_n)$, on peut ou bien représenter l'ensemble $\{a_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ de ses termes dans $\mathbf{K}$ [dessin dans $\mathbf{R}$] [dessin dans $\mathbf{C}$] ou bien représenter la fonction $n \mapsto a_n$ [dessin dans $\mathbf{R}$] (peu commode lorsque $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ vu qu'il faudrait une troisième dimension).

**Définitions (bornes, monotonie).**
*Soit* $(a_n)$ *une suite. On dit que* $(a_n)$ *est*

1. ***constante*** *si* $\exists C \in \mathbf{K},\ \forall k \in \mathbf{N},\ a_k = C$*.*
2. ***bornée*** *si* $\exists M > 0,\ \forall k \in \mathbf{N},\ |a_k| \leq M$*.*

(MNÉMO : les barres de la valeur absolue sont des barreaux qui enferment $a_k$.) [dessin]
*Soit* $(a_n)$ *une suite réelle. On dit que* $(a_n)$ *est*

1. ***majorée*** *si* $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq M$ *(un tel* $M$ *est appelé un* ***majorant*** *de la suite* $(a_n)$*) ;* [dessin]
2. ***minorée*** *si* $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{N},\ a_k \geq m$ *(un tel* $m$ *est appelé un* ***minorant*** *de la suite* $(a_n)$*) ;* [dessin]
3. ***croissante*** *si* $\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2,\ p \leq q \Longrightarrow a_p \leq a_q$ *;* [dessin]
4. ***décroissante*** *si* $\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2,\ p \leq q \Longrightarrow a_p \geq a_q$ *;* [dessin]
5. ***monotone*** *si* $(a_n)$ *croît ou décroît ;*
6. ***strictement croissante*** *si* $\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2,\ p < q \Longrightarrow a_p < a_q$ *;*
7. ***strictement décroissante*** *si* $\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2,\ p < q \Longrightarrow a_p > a_q$ *;*
8. ***strictement monotone*** *si si* $(a_n)$ *croît strictement ou décroît strictement.*

**Exemples :**
[dessin] les suites $\left(e^{in}\right)$, $(\cos n)$ et $(\sin n)$ sont bornées (par $1$) ;
[dessin] la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ décroît strictement et est minorée par $0$ ;
[dessin] la suite $(-1)^n$ est bornée par $1$ et n'est pas monotone ;
[dessin] la suite $(-2)^n$ n'est ni bornée ni monotone ;
[dessin] les suites $(\arctan n)$ et $(\operatorname{th} n)$ croissent strictement et sont bornées respectivement par $\frac{\pi}{2}$ et $1$ ;
[dessin] les suites $(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$ et $(\lfloor \ln n \rfloor)$ croissent (mais pas strictement) et ne sont pas majorées.

**Propriété.** *Une suite réelle est bornée ssi elle est majorée et minorée.*

**Démonstration.**
Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. Soit $M > 0$ tel que $\forall k \in \mathbf{N},\ |u_k| \leq M$. On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ -M \leq u_n \leq M$, ce qui montre que $(u_n)$ est majorée par $M$ et minorée par $-M$.

Soit $(b_n)$ une suite majorée et minorée. Soient $m$ et $M$ deux réels tels que $\left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbf{N},\ b_k \leq M \\ \forall k \in \mathbf{N},\ b_k \geq m \end{array} \right.$. Montrons que $\mu := \max\{|M|, |m|\}$ majore $(b_n)$. Soit $p \in \mathbf{N}$ : on a $\left\{ \begin{array}{l} b_p \leq M \leq |M| \leq \mu \\ b_p \geq m \geq -|m| \geq -\mu \end{array} \right.$, *c. q. f. d.*.

**Exemple.** La suite réelle $\left(e^{-n} + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est minorée par $0 + 0 = 0$ et majorée par $e^{-1} + \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{e}$, donc est bornée.

**Propriété (anneau des suites bornées).** *La somme et le produit de suites bornées restent bornés.*
**Démonstration.** Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites bornées, mettons par des réels $A > 0$ et $B > 0$ respectivement.
Montrons que $A + B$ borne la suite $(a_n) + (b_n)$ : étant donné un $k \in \mathbf{N}$, on a $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq A + B$.
Montrons que $AB$ borne la suite $(a_n)(b_n)$ : étant donné un $k \in \mathbf{N}$, on a $|a_k b_k| = |a_k|\,|b_k|| \leq AB$.

**Exemple.** La suite $\left(\frac{\sin^{42} n}{n+1} + e^{i\sqrt{n}} (\operatorname{th} n)^{18}\right)$ est bornée car les suites $(\sin n)$, $\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $\left(e^{i\sqrt{n}}\right)$ et $(\operatorname{th} n)$ le sont.

**Propriété (critère de croissance).** *Soit $(a_n)$ une suite réelle. Alors $(a_n)$ croît ssi $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq a_{k+1}$. Si de plus la suite $(a_n)$ prend des valeurs strictement positives, alors $(a_n)$ croît ssi $\forall k \in \mathbf{N},\ \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$.*

**Démonstration.** La seconde équivalence découle de la première en multipliant/divisant les deux côtés de la comparaison par $a_k$, ce qui fait sens car $a_k \neq 0$ et ce qui ne change pas le sens de la comparaison car $a_k \geq 0$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $(a_n)$ croissante. Soit $k \in \mathbf{N}$. Remplacer dans la définition ci-dessus de la croissance $(p, q)$ par $(k, k+1)$ donne $a_k \leq a_{k+1}$, *c. q. f. d.*.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq a_{k+1}$. Soit $q \in \mathbf{N}$. Pour tout entier $p \geq 0$, notons $C_p$ la comparaison $a_p \geq a_q$. On a clairement $C_q$ (qui équivaut à $a_q \geq a_q$). Soit ensuite $p \geq q$ un entier tel que $C_p$. Remplacer $k$ par $p$ dans l'hypothèse donne $a_{p+1} \geq a_p \overset{C_q}{\geq} a_q$, d'où $C_{p+1}$. On en déduit (par récurrence) $\forall p \geq q,\ C_q$, *c. q. f. d.*.
(Si vous êtes capable de rédigez cette récurrence les yeux fermés – et seulement à ce moment là –, vous pourrez alors vous contenter d'un argument plus léger à l'instar de : "soient $q \leq q$ deux entiers naturels : on a alors de proche en proche $a_p \leq a_{p+1} \leq a_{p+2} \leq \cdots \leq a_q$, *c. q. f. d.*.)

**Remarque.** On obtient évidemment des critère analogues pour la (stricte) (dé)croissance.

**Exemple.** *Étudier la monotonie de la suite $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.*
Pour tout entier $n$, notons $u_n := \frac{n!}{n^n}$. La suite $(u_n)$ prend des valeurs strictement positives ; vu la forme "*multiplicative*" de ses termes, on va regarder le *quotient* de deux termes consécutifs. Soit $k \in \mathbf{N}$ : on a $\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k > 1$ (sauf si $k = 1$), ce qui montre que la suite $(u_n)$ décroît strictement à partir du rang 1. (Observer $u_0 = u_1$.)

**Proposition (existence de suites définies par une relation de récurrence).** *Soient $A$ une partie de $\mathbf{C}$ et $f$ une application de $A$ vers $A$. Pour tout $\alpha \in A$, il existe une unique suite $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} a_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n) \end{array} \right.$.*
**Démonstration.** Pour tout entier $n \geq 0$, posons $a_n := f^{\circ n}(\alpha)$. On a bien $a_0 = f^{\circ 0}(\alpha) = \operatorname{Id}(\alpha) = \alpha$. Soit de plus $n \in \mathbf{N}$ ; on a bien

$$a_{n+1} = f^{\circ(n+1)}(\alpha) = [f \circ f^{\circ n}](\alpha) = f(f^{\circ n}(\alpha)) = f(a_n).$$

En pratique, on donne souvent une fonction $f$ et tout le travail consiste à trouver une partie $A$ qui est stable par $f$ et qui contient le premier terme de la suite.

**Exemples.**

1. *Montrer l'existence et la monotonie de la suite* $(u_n)$ *définie par* $\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{array} \right.$.

   La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ stabilise $\mathbf{R}_+^*$ qui contient 1, d'où l'existence (et l'unicité) de la suite $(u_n)$, qui prend des valeurs strictement positives. On en déduit $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ pour tout entier $n \geq 0$, d'où la stricte croissance de $u_n$.

2. *Montrer l'existence et la monotonie de la suite* $(r_n)$ *définie par* $\left\{ \begin{array}{c} r_0 = 42 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{18}{r_n}\right) \end{array} \right.$.

   La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t + \frac{18}{t}\right)$ stabilise $\mathbf{R}_+^*$ qui contient 42, d'où l'existence (et l'unicité) de la suite $(r_n)$, qui prend des valeurs strictement positives. On remarque alors que (pour tout $n \geq 0$ entier) $r_{n+1} - \sqrt{18} = \frac{1}{2}\left(r_n - 2\sqrt{18} + \frac{18}{r_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{\frac{18}{r_n}}\right)^2 \geq 0$, d'où l'on tire (pour tout $k \geq 0$ entier) $r_{k+1} - r_k = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{r_k} - r_k\right) = \frac{1}{2r_k}\left(18 - r_k^2\right) \leq 0$, ce qui montre que la suite $(r_n)$ est minorée par $\sqrt{18}$ (sauf peut-être le premier terme) et est décroissante.

**Définition (suite extraite).** *Soit* $(a_n)$ *une suite. On appelle* ***sous-suite*** *ou* ***suite-extraite*** *de* $(a_n)$ *toute suite de la forme* $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ *où* $\varphi$ *est une suite d'entiers strictement croissante (une telle suite* $\varphi$ *est appelée une* ***extractrice***[2]*).*

[dessin]

**Exemples.**

Les suites constantes $(1)$, $(i)$, $(-1)$ et $(-i)$ sont extraites de la suite complexe $(i^n)$ (prendre pour extractrices respectives $(4n)$, $(4n+1)$, $(4n+2)$ et $(4n+3)$).

La suite $\left(\frac{1}{n+42}\right)$ est extraite de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ (prendre pour extractrice $(n+42)$).

Les suites $\left(9n^2\right)$ et $\left((n+18)^2\right)$ sont extraites de $\left(n^2\right)$ (prendre pour extractrice respectives $(3n)$ et $(n+18)$) mais pas la suite $\left(n^2+18\right)$ (*cf.* T. G.).

# 3 Convergence vers 0

Soit une suite $(u_n)$. Comment préciser la notion "$u_n$ *tend vers* 0" ?

Il s'agit déjà de préciser les entiers $n$ considérés : ceux qui sont très grands, très loin, "proches de l'infini".

Proposons alors

"$u_n$ *tend vers* 0 *si* $u_n$ *est petit lorsque* $n$ *est grand*".

Mais que signifie "*être petit*" ? On pourrait répondre "*être proche de zéro*" ; mais quelle "proximité" choisir ? Si l'on se donne une erreur $\varepsilon > 0$, on peut préciser "*être proche de* 0" par "*valoir* 0 *à* $\varepsilon$ *près*", ce qui se quantifie (*cf.* section 1) en "*être de module plus petit que* $\varepsilon$".

Nous arrivons ainsi à la suggestion

"$u_n$ *tend vers* 0 *si, étant donnée une précision raisonnable* $\varepsilon$*, on a* $|u_n| \leq \varepsilon$ *lorsque* $n$ *est grand*".

Mais que signifie "raisonnable" ? Regardons la suite $\frac{e^{in}}{10^{100}}$. : tout physicien raisonnable considéra comme inexistante une erreur inférieure à $10^{-100}$ et dira donc que $\frac{e^{in}}{10^{100}}$ tend vers 0. Pourtant, aussi petit que soit $\frac{e^{in}}{10^{100}}$ en module, il ne bouge pas, il ne se meut pas, il ne se *rapproche* pas de 0 : or une tendance (le fait de tendre vers) n'implique-t-elle pas un mouvement, un *rapprochement* ? Ne rend-on pas compte de cela en disant, au lieu de "$u_n$ *sera proche de* 0 *si* $n$ *est grand*" :

"$u_n$ *se rapproche de* 0 *lorsque* $n$ *grandit*" ?

Par conséquent, même si $u_n$ est très proche de zéro, dire qu'il s'en *rapproche* signifie que l'on peut encore améliorer la précision en regardant des $n$ plus grands – et ceci *quelle que soit* l'erreur choisie.

Nous arrivons ainsi à la formulation

[2] c'est elle qui sélectionne les termes que l'on extrait

"$u_n$ *tend vers* $0$ *si,*
*étant donnée une précision* $\varepsilon > 0$ *aussi petite que voulu,*
*on a* $|u_n| \leq \varepsilon$ *pour* $n$ *assez grand*".

Cette introduction devrait éclairer la définition suivante.

**Définition (convergence vers $0$).** *Soit $(a_p)$ une suite scalaire. On dit que $(a_p)$* ***tend vers*** *$0$ si, étant donnée une précision $\varepsilon > 0$ arbitrairement petite, on peut trouver un rang au-delà duquel tous les termes de la suite $(a_p)$ valent $0$ à $\varepsilon$ près,* i. e. *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq \varepsilon.$$

*On note alors $a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ voire (abusivement) $a_n \longrightarrow 0$ (où le symbole $n$ est* MUET*).*

MNÉMO Prendre son 18-couleurs et mettre en correspondance chaque bout de la phrase mathématique ci-dessus avec le bout de phrase français correspondant :

| | |
|---|---|
| *étant donnée une précision $\varepsilon > 0$ arbitrairement petite* | $\forall \varepsilon > 0$ |
| *on peut trouver un rang* | $\exists N \in \mathbf{N}$ |
| *au-delà duquel* | $n \geq N \Longrightarrow$ |
| *tous les termes de la suite $(a_p)$ valent $0$ à $\varepsilon$ près* | $\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |a_n| \leq \varepsilon$ |

**Variantes (abus d'écriture).** Il est courant d'oublier la quantification universelle sur $n$, voire d'omettre de préciser le fait que $N$ est un entier. On pourra ainsi trouver, au lieu de $a_n \longrightarrow 0$, des énoncés de la forme

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq \varepsilon \quad \text{ou encore} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ |a_n| \leq \varepsilon.$$

**Exemples.**

1. Montrons que la suite nulle $(o_n) := (0)$ tend vers $0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On veut $|o_n| \leq \varepsilon$ pour $n$ assez grand, ce qui est toujours vérifié. On peut donc prendre $N := 0$ dans la définition ci-dessus.
2. Montrons que la suite $(i_n) := \left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers $0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $|i_n| \leq \varepsilon \Longleftarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Longrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ : on peut donc prendre $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ dans la définition ci-dessus.
3. Montrons que la suite $(e_n) := (e^{-n})$ tend vers $0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $|e_n| \leq \varepsilon \Longleftarrow e^{-n} \leq \varepsilon \Longrightarrow n \geq \ln \frac{1}{\varepsilon}$ : on peut donc prendre $N := \left\lceil \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ dans la définition ci-dessus.
4. Montrons que la suite $(a_n) := \left(\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}}\right)$ tend vers $0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $|a_n| \leq \varepsilon \Longleftarrow \left|\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}}\right| \Longleftarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \varepsilon \Longrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^3}$ : on peut donc prendre $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^3} \right\rceil$ dans la définition ci-dessus.

**Propriétés (stabilité de la convergence vers $0$).**

1. *Toute suite tendant vers $0$ est bornée.*
2. *La somme de deux suites tendant vers $0$ tend vers $0$.*
3. *Le produit de deux suites tendant vers $0$ tend vers $0$.*
4. *Le produit d'une suite tendant vers $0$ par une suite bornée tend vers $0$.*

**Démonstration.** Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites tendant vers $0$.

1. Remplaçons (dans la définition de $a_n \longrightarrow 0$) $\varepsilon$ par $42$ : on peut alors considérer un entier $N \geq 0$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq 42$. Puisque les $N$ premiers termes sont majorés chacun (par exemple) par la somme des modules $M := |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N-1}|$, la suite $(a_n)$ est bornée par $M + N$.
2. Montrons que $a_n + b_n \longrightarrow 0$. Soient $E > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ : on a les implications $|a_n + b_n| \leq E \Longleftarrow |a_n| + |b_n| \leq E \Longleftarrow \begin{cases} |a_n| \leq \frac{E}{2} \\ |b_n| \leq \frac{E}{2} \end{cases}$. Or, puisque $a_n \longrightarrow 0$, il y a un entier $A$ tel que $n \geq A \Longrightarrow |a_n| \leq \frac{E}{2}$ (remplacer dans la définition ci-dessus $\varepsilon$ par $\frac{E}{2}$) et, de même pour $(b_n)$, il y a un entier $B$ tel que $n \geq B \Longrightarrow |b_n| \leq \frac{E}{2}$ ; par conséquent, si $n \geq A + B$, on aura d'une part $n \geq A$ d'où $|a_n| \leq \frac{E}{2}$, d'autre part $n \geq B$ d'où $|b_n| \leq \frac{E}{2}$, ce qui conclut (on peut prendre $N := A + B$ dans la définition ci-dessus).
3. Découle des points 1 et 4.

4. Soit $(\beta_n)$ une suite bornée, disons par un certain $M > 0$. Montrons que $a_n\beta_n \longrightarrow 0$. Soient $E > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ : on a les implications $|a_n\beta_n| \leq E \Longleftarrow |a_n| |\beta_n| \leq E \Longleftarrow |a_n| M \leq E \Longleftarrow |a_n| \leq \frac{E}{M}$. Or, puisque $a_n \longrightarrow 0$, il y a un entier $A$ tel que $n \geq A \Longrightarrow |a_n| \leq \frac{E}{M}$ (remplacer dans la définition ci-dessus $\varepsilon$ par $\frac{E}{M}$), ce qui conclut (on peut prendre $N := A$ dans la définition ci-dessus).

**Corollaire.** *L'ensemble des suites tendant vers $0$ est un sev de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ stable par multiplication.*

**Démonstration.** On a montré (exemple 1) que la suite nulle tend vers 0 et on vient de montrer (point 2 de la proposition précédente) que l'ensemble des suites tendant vers 0 est stable par addition. Montrons qu'il est stable par homothéties : multiplier une suite par un scalaire revient à la multiplier par une suite constante, *a fortiori* bornée, et l'on conclut à l'aide du point 4 ci-dessus. Enfin, la stabilité par multiplication est l'objet du point 3 ci-dessus.

**Lemme (très utile).** *Toute suite plus petite en module qu'une suite tendant vers $0$ tend vers $0$.*

MNÉMO $|a_n| \leq o_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$

**Démonstration.** Soient $(a_n)$ une suite scalaire et $(o_n)$ une suite réelle tendant vers 0 telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n| \leq o_n$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $|a_n| \leq \varepsilon \Longleftarrow o_n \leq \varepsilon \Longleftarrow |o_n| \leq \varepsilon$ ; or, puisque $o_n \longrightarrow 0$, on trouver un entier $N$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |o_n| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

**Exemple.** *Montrer que la suite* $\left(\frac{\sin^{42} n}{n+1} + e^{i\sqrt{n}-7n} (\operatorname{th} n)^{18}\right)$ *tend vers $0$.*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ : on a la majoration

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin^{42} n}{n+1} + e^{i\sqrt{n}-7n} (\operatorname{th} n)^{18}\right| &\leq \left|\frac{\sin^{42} n}{n+1}\right| + \left|e^{i\sqrt{n}-7n} (\operatorname{th} n)^{18}\right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} + e^{-7n} \\ &\leq \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\underbrace{\left(e^{-n}\right)}_{\longrightarrow 0}{}^{7}}_{\longrightarrow 0}}_{\longrightarrow 0}.\end{aligned}$$

**Remarque (abus d'écriture).** Dans cet exemple, on a invoqué un $n \in \mathbf{N}^*$ mais on écrit ensuite $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, ce qui suppose de "désinvoquer" $n$ afin de pouvoir le considérer comme symbole muet dans la tendance $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Cette abus est monnaie courante.

# 4 Limites scalaires

Soient $(a_n)$ une suite et $\lambda$ un scalaire. Afin de motiver la définition de "$a_n$ tend vers $\lambda$", on pourrait reprendre mot pout mot l'introduction de la isection précédente en remplaçant la "limite" 0 par $\lambda$ Il en ressortirait, au lieu d'une approximation "$a_n \simeq 0$ à $\varepsilon$ près", celle "$a_n \simeq \lambda$ à $\varepsilon$ près", ce qui se réécrit "$|a_n - \lambda| \simeq 0$ à $\varepsilon$ près". On est ainsi ramené à la convergence vers 0, ce qui permettra d'utiliser tout ce qui précède.

**Définition (suite convergente, divergente).** *Soient $(a_n)$ une suite scalaire et $\lambda$ un scalaire.*
*On dit que la suite $(a_n)$ **tend** (ou **converge**) **vers** $\lambda$ si $|a_n - \lambda| \longrightarrow 0$ : on note alors $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ voire (abusivement) $a_n \longrightarrow \lambda$.*
*On dit que la suite $(a_n)$ **converge** (ou est **convergente**) si $\exists \alpha \in \mathbf{K},\ a_n \longrightarrow \alpha$ . Sinon, on dit que $(a_n)$ **diverge** (ou est **divergente**).*

**Définition – propriété (unicité de la limite).** *Soient $(a_n)$ une suite convergente vers deux scalaires $\lambda$ et $\mu$. Alors ces scalaires sont égaux et leur valeur commune est appelée la **limite** de $a_n$ : elle est notée $\lim_{n\to\infty} a_n$ voire (abusivement) $\lim a_n$ ou encore $\lim a$.*

★ écrire $\lim a_n = \lambda$ PRÉSUPPOSE LA CONVERGENCE de $(a_n)$ pour que l'égalité fasse sens. Par conséquent :

★★★ NE PAS ÉCRIRE $\lim a_n = \lambda$ pour dire $a_n \longrightarrow \lambda$ car la second relation contient une affirmation supplémentaire – la convergence de $(a_n)$.

**Démonstration.** *Idée* : les termes $a_n$ doivent pour $n$ assez grand être à la fois proches de $\lambda$ et de $\mu$, ce qui (si $\lambda \neq \mu$) sera impossible pour une précision négligeable devant la distance $|\lambda - \mu|$. [dessin]

Supposons par l'absurde que $\lambda \neq \mu$. Posons alors $\varepsilon := \frac{|\lambda-\mu|}{3}$, de sorte que les disques de rayon $\varepsilon$ centrés respectivement en $\lambda$ et $\mu$ soient disjoints . Puisque $a_n \longrightarrow \lambda$, il y a un entier $L \geq 0$ tel que $n \geq L \Longrightarrow |a_n - \lambda| \leq \varepsilon$ et, de même pour $\mu$, il y a un entier $M \geq 0$ tel que $n \geq M \Longrightarrow |a_n - \mu| \leq M$. Soit $n \geq L + M$ un entier : on a alors

$$3\varepsilon = |\lambda - \mu| \leq |\lambda - a_n| + |a_n - \mu| \leq \varepsilon + \varepsilon, \text{ d'où } \varepsilon \leq 0, \text{ ce qui est absurde.}$$

À RETENIR :

$$a_n \longrightarrow \lambda \Longleftrightarrow |a_n - \lambda| \longrightarrow 0$$

**Propriétés.**

1. *Toute suite convergente est bornée.*
2. *Toute suite convergeant vers un scalaire non nul est non nulle à partir d'un certain rang (et, plus précisément, minorée par un réel strictement positif).*

**Démonstration.** Soit $(a_n)$ une suite convergeant vers un certain scalaire $\lambda$.

1. La suite $a_n - \lambda$ tend vers 0, donc est bornée, mettons par un $M > 0$, d'où l'on tire $|a_n| \leq |a_n - \lambda| + |\lambda| \leq M + |\lambda|$ pour tout entier $n$.
2. Supposons $\lambda \neq 0$. Posons $\varepsilon := \frac{|\lambda|}{2}$, de sorte que le disque de rayon $\varepsilon$ centré en $\lambda$ ne rencontre pas l'origine [dessin]. Puisque $a_n \longrightarrow \lambda$, il y a un entier $N$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |a_n - \lambda| \leq \varepsilon$. Soit alors $n \geq N$ : on a
$$|a_n| = |\lambda + (a_n - l)| \geq \left| \underbrace{\underbrace{|\lambda|}_{=2\varepsilon} - \underbrace{|a_n - l|}_{\geq -\varepsilon}}_{\geq 0} \right| = 2\varepsilon - |a_n - l| \geq \varepsilon > 0, \text{ ce qui conclut.}$$

**Propriétés (opération usuelles sur les limites).** *Soient $(a_n)$ une suite convergeant vers un scalaire $\alpha$ et $(b_n)$ une suite convergeant vers un scalaire $\beta$. Alors :*

1. $|a_n| \longrightarrow |\alpha|$ *;*
2. $\frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$ *si* $\alpha \neq 0$ *;*
3. $f(a_n) \longrightarrow f(\alpha)$ *pour toute fonction continue en $\alpha$ (donc toutes les fonctions usuelles sauf $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$) ;*
4. $a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta$ *;*
5. $a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta$ *;*
6. $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ *si* $\beta \neq 0$.

**Démonstration.** On se ramène à de la convergence vers 0. Soit $n$ un entier naturel

1. On a $||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha| \longrightarrow 0$.
2. La proposition précédente nous donne un $m > 0$ et un rang $N$ au-delà duquel $|a_n| \geq m$. On a alors pour tout $n \geq N$
$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n| |\alpha|} \leq \underbrace{\frac{1}{m\alpha}}_{\text{bornée}} \underbrace{|a_n - \alpha|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0.$$

3. Admis, *cf.* cours sur les fonctions continues. (En fait, une fonction est continue en $\alpha$ ssi $f(u_n) \longrightarrow f(a)$ pour toute suite $(u_n) \longrightarrow \alpha$.)

4. On a $|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| = |(a_n-b_n)+(b_n-\beta)| \leq \underbrace{|a_n-\alpha|}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{|b_n-\beta|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$.

5. On a $|a_nb_n-\alpha\beta| = |a_n(b_n-\beta)-(\alpha-a_n)\beta| \leq \underbrace{\underbrace{|a_n|}_{\text{bornée car convergente}} \underbrace{|b_n-\beta|}_{\longrightarrow 0}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\underbrace{|\alpha-a_n|}_{\longrightarrow 0} \underbrace{|\beta|}_{\text{bornée}}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$.

6. On utilise les points 2 et 5 : on a $\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\longrightarrow \alpha} \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\longrightarrow \frac{1}{\beta}} = \alpha\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

**Exemples.**

$\frac{3n-2}{2n+i} = \frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{i}{n}} \longrightarrow \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2}$.

$\frac{i^n-5^n}{i^n+5^n} = \frac{\left(\frac{i}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{i}{5}\right)^n+1} \longrightarrow \frac{0-1}{0+1} = -1$.

$\frac{7^n-18^n}{(13i)^n+42^n} = \frac{\left(\frac{7}{42}\right)^n-\left(\frac{18}{42}\right)^n}{\left(\frac{13i}{42}\right)^n+1} \longrightarrow \frac{0-0}{1+1} = 0$.

$\frac{n+\sqrt{n}(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n}(-1)^n} = \frac{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1$

$\sqrt{18+n}-\sqrt{n} = \frac{\sqrt{18+n}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{18+n}+\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{18+n}+\sqrt{n}} \leq \frac{18}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

**Proposition (densité de Q dans R bis).** *Tout réel est limite d'une suite de rationnels.*

**Démonstration.** Soit $a$ un réel. Montrons que $\frac{\lfloor 10^n a\rfloor}{10^n} \longrightarrow a$. Soit $n \in \mathbf{N}$ : on a $\lfloor 10^n a\rfloor = 10^n a + \varepsilon_n$ pour un certain réel $\varepsilon_n \in [0,1[$, d'où $\frac{\lfloor 10^n a\rfloor}{10^n} = a + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{borné}} \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow a$. (On pourrait procéder de même pour montrer que $a$ est la limite de ses valeurs décimales $\frac{\lceil 10^n a\rceil}{10^n}$ approchées à $10^{-n}$ par excès – et l'on pourrait d'ailleurs remplacer la base 10 par n'importe quel réel $\beta > 1$).

**Application.** *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue nulle sur* $\mathbf{Q}$. *Montrer que $f$ est nulle.*

Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrons que $f(a) = 0$. On approxime $a = \lim r_n$ où $(r_n)$ est une suite de rationnels. Puisque $f$ est continue en $a$, la suite $f(r_n)$ tend vers $f(a)$ ; or on a $\forall k \in \mathbf{N},\ f(r_k) = 0$, donc la suite $f(r_n)$ tend vers 0. Par unicité de la limite, on peut conclure $f(a) = 0$ comme annoncé.

★★★ La notion de convergence ne regarde que ce qui se passe "au loin", elle n'a que faire des premiers termes. Par conséquent, dans les problèmes de convergence, on ne perdra pas de temps sur quelques éventuels termes ne faisant pas sens. (Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n-42}}\right)$ tend vers 0 même si elle n'est définie qu'à partir du rang 43).

Les propriétés usuelles permettent de montrer une *convergence*. La proposition suivante permet (par contraposée) d'affirmer une *divergence*.

**Proposition (sous-suites et convergence).** *Soit $(a_n)$ une suite convergente. Alors toutes les sous-suites de $(a_n)$ tendent vers $\lim a_n$.*

**Démonstration.** Notons $\lambda := \lim a_n$. Soit $\varphi$ une extractrice. On montrera en T. G. que $\forall n \in \mathbf{N},\ \varphi(n) \geq n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $p \geq N \Longrightarrow |a_p - \lambda| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq N$ : on a alors $\varphi(n) \geq n \geq N$, d'où (remplacer $p$ par $\varphi(n)$ dans ce qui précède) $\left|a_{\varphi(n)} - \lambda\right| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

**Exemple.** La suite $(-1)^n$ diverge car les deux suites extraites $(-1)^{2n}$ et $(-1)^{2n+1}$ tendent vers deux scalaires différents.

★ ce n'est pas parce qu'une suite ne tend pas vers un réel donné (*e. g.* 18) ou même vers $\infty$ qu'elle tend nécessairement vers quelque chose !

(Ce n'est pas parce que l'on a pas mangé de pomme ce midi que l'on a forcément mangé quelque chose.)

# 5 Limite et ordre

Dans le cas des suites réelles, la notion de limite se comporte bien vis-à-vis de la relation d'ordre large $\leq$.

**Proposition (passage à la limite des comparaisons larges). (admis)** *Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles convergentes telles que $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq b_k$. Alors $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

★ Cela devient faux avec l'ordre *strict* : si $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ et $(b_n) = (0)$, alors $a_k > b_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ mais $\lim a_n \not> \lim b_n$. On pourra retenir la ritournelle

"*à la limite, les comparaisons prennent le large*".

**Théorème (d'encadrement, des gendarmes, "sandwich"). (admis)** *Soient $(a_n)$, $(u_n)$ et $(A_n)$ trois suites réelles telles que $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq u_k \leq A_k$. Si les suites $(a_n)$ et $(A_n)$ convergente vers un même réel $\lambda$, alors $u_n \longrightarrow \lambda$.*

**Sanity check.** Dès que l'on sait que $(u_n)$ converge (mettons vers $l := \lim u_n$), la proposition précédente nous donne les comparaisons $\lambda \leq l \leq \lambda$, d'où l'égalité $l = \lambda$.

**Exemple.** *Étudier la convergence de la suite $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)$.*

Partons de la comparaison $\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$ valide pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit $n$ un entier asseez grand pour que $\frac{1}{n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors $\sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \tan \frac{1}{n}$, d'où $1 \leq \frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}$, *i. e.* $\cos \frac{1}{n} \leq n \sin \frac{1}{n} \leq 1$. Or $\frac{1}{n}$ tend vers 0 où cos est continue, donc le membre de gauche $\cos \frac{1}{n}$ tend vers $\cos 0 = 1$ ; le théorème d'encadrement dit alors que $n \sin \frac{1}{n}$ tend vers 1.

**Théorème (convergence et monotonie). (admis)** [dessin avec deux cas : fini et infini]
*Toute suite croissante tend vers le supremum (éventuellement infini) de l'ensemble de ses termes.*
*Toute suite décroissante tend vers l'infimum (éventuellement infini) de l'ensemble de ses termes.*

**Corollaire – définition (suites adjacentes).** *Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles telles que* [dessin]

1. *$(a_n)$ croît et $(b_n)$ décroît ;*
2. *$\forall k \in \mathbf{N},\ a_k \leq b_k$ ;*
3. *$b_n - a_n \longrightarrow 0$.*

*(On dit que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont des suites **adjacentes**). Alors $(a_n)$ et $(b_n)$ tendent vers un même réel.*

**Démonstration.** Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $a_0 \leq a_k \leq b_k \leq b_0$, donc $(a_n)$ est majorée et $(b_n)$ minorée ; puisque par ailleurs $(a_n)$ croît et $(b_n)$ décroît, elles sont toutes deux convergentes, mettons $a_n \longrightarrow a$ et $b_n \longrightarrow b$. Mais alors $b_n - a_n \longrightarrow b - a$ et l'unicité de la limite impose (avec le point 3) $b - a = 0$, d'où $a = b$.

**Exemple.** *Montrer que les suites $(u_n) := \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)$ et $(v_n) := \left(u_n + \frac{1}{n!n}\right)$ convergent vers un même réel.*

Montrons que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. Il est déjà clair que $(u_n) \leq (v_n)$ et que $v_n - u_n \longrightarrow 0$ vu que la différence $\left(\frac{1}{n!n}\right)$ est une suite positive tendant vers 0. De plus, $(u_n)$ croît puisque $u_p - u_{p-1} = \frac{1}{p!} > 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}^*$. Il reste à montrer que $(v_n)$ décroît. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n-1} &= u_n - u_{n-1} + \frac{1}{n!n} - \frac{1}{(n-1)!\,(n-1)} \\
&= \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} - \frac{n}{n!\,(n-1)} \\
&= \frac{n\,(n-1) + (n-1) - n^2}{n!n\,(n-1)} \\
&= \frac{-1}{n!n\,(n-1)} \\
&\leq 0, \text{ c. q. f. d..}
\end{aligned}$$

# 6 Divergence vers $\pm\infty$

Nous avons formulé la tendance vers un scalaire $\lambda$ par "*étant donné une précision $\varepsilon$ arbitrairement petite, valoir $\lambda$ à $\varepsilon$ près à partir d'un certain rang*". Pour définir la tendance vers $\infty$, peut-on traduire "*valoir $\infty$ à $\varepsilon$ près*" ?

Représentons $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$ et considérons un instant (de façon complètement abusive) $\infty$ comme un réel. On aura alors pour tout réel $a$ les équivalences "$a \simeq \infty$ à $\varepsilon$ près" $\iff$ "$\infty - \varepsilon \leq a \leq \infty + \varepsilon$" $\iff$ "$a \geq \infty - \varepsilon$" $\iff$ "$a \geq A$" en posant $A := \infty - \varepsilon$ ; par ailleurs, pouvoir choisir $\varepsilon$ aussi petit que voulu revient à pouvoir choisir $A$ aussi grand que voulu.

Ces considérations devraient motiver la définition suivante.

**Définition (divergence vers $\pm\infty$).** *Soit $(a_n)$ une suite réelle.*

*On dit que $a_n$ **tend** (ou **diverge**) vers $\infty$ si, étant donnée un réel $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver un rang au-delà duquel tous les termes de la suite $(a_p)$ dépassent $A$,* i. e. *si*

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow a_n \geq A.$$

*On note alors $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ voire $a_n \longrightarrow \infty$.*

*On dit que $a_n$ **tend** (ou **diverge**) vers $-\infty$ si, étant donnée un réel $A < 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un rang au-delà duquel tous les termes de la suite $(a_p)$ passent en-deçà de $A$,* i. e. *si*

$$\forall A < 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow a_n \leq A.$$

*On note alors $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ voire $a_n \longrightarrow -\infty$.*

MNÉMO Comme pour la convergence vers 0, on notera les correspondances précises entre symboles français et mathématiques :

| | |
|---|---|
| *étant donné un réel $A > 0$ arbitrairement grand* | $\forall A > 0$ |
| *on peut trouver un rang* | $\exists N \in \mathbf{N}$ |
| *au-delà duquel* | $n \geq N \Longrightarrow$ |
| *tous les termes de la suite $(a_p)$ dépassent $A$* | $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \geq A$ |

.

**Remarques.** Soit $(a_n)$ une suite réelle.

On a l'équivalence $a_n \longrightarrow -\infty \iff -a_n \longrightarrow \infty$.

Si $a_n \longrightarrow \infty$, alors $(a_n)$ n'est pas majorée.

Si $a_n \longrightarrow \infty$, alors $a_n$ est à partir d'un certain rang plus grand que 18, *a fortiori* minoré par un réel strictement positif.

**Exemples (usuels).**

1. Soit $\lambda > 0$. Montrons que $n^\lambda \longrightarrow \infty$. Soient $A > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $n^\lambda \geq A \Longleftarrow n \geq A^{\frac{1}{\lambda}}$, ce qui conclut (prendre $N := \left\lceil A^{\frac{1}{\lambda}} \right\rceil$ dans la définition ci-dessus).
2. Montrons que $e^n \longrightarrow \infty$. Soient $A > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $e^n \geq A \Longleftarrow n \geq \ln A$, ce qui conclut (prendre $N := \lceil \ln A \rceil$ dans la définition ci-dessus).
3. Montrons que $\ln n \longrightarrow \infty$. Soient $A > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $\ln n \geq A \Longleftarrow n \geq e^A$, ce qui conclut (prendre $N := \lceil e^A \rceil$ dans la définition ci-dessus).

**Propriété (liens entre $\longrightarrow 0$ et $\longrightarrow \infty$).** *Soit $(a_n)$ une suite scalaire non nulle à partir d'un certain rang. On a alors l'équivalence $|a_n| \longrightarrow \infty \iff \frac{1}{a_n} \longrightarrow 0$.*

**Propriétés (admises).**

*Toute suite réelle plus grande qu'une suite tendant vers $\infty$ tend vers $\infty$.*

*Toute suite réelle plus petite qu'une suite tendant vers $-\infty$ tend vers $-\infty$.*

*La somme d'une suite tendant vers $\infty$ et d'une suite minorée tend vers $\infty$.*

*La somme d'une suite tendant vers $-\infty$ et d'une suite majorée tend vers $-\infty$.*
*Le produit d'une suite tendant vers $\infty$ et d'une suite minorée par un réel strictement positif tend vers $\infty$.*

★ Il ne suffit pas, dans la dernière propriété, de multiplier par une suite dont tous les termes sont strictement positifs : en effet, la suite $(n)$ tend vers $\infty$ la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ a tous ses terms dans $\mathbf{R}_+^*$ mais leur produit ne tend pas vers $\infty$ (il reste borné).

**Remarque.** Une suite $(a_n)$ est minorée par un réel strictement positif ssi $\inf a_n > 0$. Ce sera le cas (à partir d'un certain) pour toute suite tendant vers un élément de $]0, \infty]$, ce qui est un cas courant.

**Corollaire.** *L'ensemble des suites réelles tendant vers $\infty$ est stable par somme et produit.*

**Exemples.**

1. Puisque $n^2 + 1 \longrightarrow \infty$, on a $\frac{1}{n^2+1} \longrightarrow 0$.
2. On a $\frac{e^n}{\sin n} \geq e^n \longrightarrow \infty$.
3. On a $\underbrace{\arctan n}_{\text{minorée}} + \underbrace{\underbrace{(\ln n)}_{\longrightarrow\infty}{}^2}_{\longrightarrow\infty} \longrightarrow \infty$.
4. On a $\underbrace{\sqrt{n}}_{\longrightarrow\infty}\underbrace{e^n}_{\longrightarrow\infty} + \underbrace{e^{-n}}_{\text{minorée}} \longrightarrow \infty$.
5. On a $\frac{n^2+n+1}{n-2} = \dfrac{\overbrace{n}^{\longrightarrow\infty} + \overbrace{1 + \frac{1}{n}}^{\text{minorée}}}{\underbrace{1 - \frac{2}{n}}_{\longrightarrow 1}} \longrightarrow \infty$.
6. On a $n^2 + n \sin n = \underbrace{n^2}_{\longrightarrow\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{\sin n}{\underbrace{n}_{\longrightarrow 0}}\right)}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow \infty$.

# 7 Suites définies par une relation de récurrence affine

On s'intéresse ici aux suites $(a_n)$ définies par itération d'une fonction affine.

De façon générale, le lemme suivant permet de simplifier de nombreuses démonstrations par récurrence portant sur des suites définies par récurrence.

**Lemme (suites constantes).** *Soit $(a_n)$ une suite. Alors $(a_n)$ est constante ssi $\forall p \in \mathbf{N},\ a_{p+1} = a_p$.*

**Démonstration.** (la même pour les critères de monotonie)
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $(a_n)$ constante. Soit $C \in \mathbf{K}$ telle que $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k = C$. Soit $p \in \mathbf{N}$. Remplacer $k$ par $p$ et $p + 1$ donne $a_{p+1} = C = a_p$, *c. q. f. d.*.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k = a_{k+1}$. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, notons $E_p$ l'égalité $a_p = a_0$. L'égalité $E_0$ est triviale. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $E_n$. Remplacer $k$ par $n$ dans l'hypothèse donne $a_{n+1} = a_n \stackrel{E_n}{=} a_0$, d'où $E_{n+1}$. On en déduit (par récurrence) $\forall n \in \mathbf{N},\ E_n$, *c. q. f. d.*.

**Corollaire – définitions (convergence des suites arithmétiques et géométriques).**

1. *Soit $(a_n)$ une suite et $r$ un scalaire tel que $\forall p \in \mathbf{N},\ a_{p+1} = a_p + r$. (Une telle suite est appelée une **suite arithmétique**[3] de **raison** $r$.) Alors on a $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k = a_0 + kr$ et la suite $(a_n)$ converge ssi $r = 0$.* [dessin]

[3] La ***moyenne arithmétique*** de deux scalaires $a$ et $b$ est définie par le scalaire "milieu" $\frac{a+b}{2}$. Trois nombres ordonnés sont dits ***en progression arithmétique*** si celui du milieu est la moyenne arithmétique des deux autres. Une ***suite arithmétique*** est alors une suite dont trois termes consécutifs quelconques forment une progression géométrique.

2. *Soit $(g_n)$ une suite et $r$ un scalaire tel que $\forall p \in \mathbf{N},\ g_{p+1} = rg_p$. (Une telle suite est appelée une **suite géométrique**[4] de **raison** $r$.) Alors on a $\forall k \in \mathbf{N},\ g_k = g_0 r^k$ et la suite $(g_n)$ converge ssi [$g_0 = 0$ ou $r = 1$ ou $|r| < 1$].* [dessin]

**Démonstration.**

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $a_{n+1} - (n+1)\,r = (a_n + r) - nr - r = a_n - nr$, ce qui montre (d'après le lemme) que la suite $(a_k - kr)$ est constante, donc vaut constamment son premier terme $a_0 - 0k = a_0$, d'où $\forall p \in \mathbf{N},\ a_p = a_0 + pr$.

   Si $r = 0$, alors $(a_n)$ est constante, donc converge. Supposons réciproquement que $(a_n)$ converge. La suite $(a_n)$ est donc bornée ; soit $M > 0$ l'un de ses majorants. On a alors pour tout $n \geq 1$ entier

$$|r| = \left|\frac{a_n - a_0}{n}\right| \leq \frac{|a_n| + |a_0|}{n} \leq \underbrace{(M + |a_0|)}_{\text{borné}} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0,$$

   ce qui montre que la suite $(r)$ tend vers $0$ ; or cette suite constante tend par ailleurs vers $r$, d'où (par uncité de la limite) $r = 0$, *c. q. f. d.*.

2. Si $r = 0$, on a d'une part $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ g_k = rg_{k-1} = 0$, d'où $(g_n) = (g_0, 0, 0, 0, \ldots)$, d'autre part $\forall k \in \mathbf{N},\ g_0 r^n = g_0 0^n = g_0 \delta_n^0 = (g_0, 0, 0, 0, \ldots)$, d'où l'égalité annoncée $(g_n) = (g_0 r^n)$. Par ailleurs, $(g_n)$ converge, de sorte que l'équivalence annoncée est vérifiée (ses deux membres sont vrais).

   On suppose à présent $r \neq 0$.

   On a pour tout $n \geq 0$ entier l'égalité $\frac{g_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{rg_n}{r^n r} = \frac{g_n}{r^n}$, ce qui montre (d'après le lemme) que la suite $\left(\frac{g_n}{r^n}\right)$ est constante, donc vaut constamment son premier terme $\frac{g_0}{r^0} = g_0$, d'où $\forall p \in \mathbf{N},\ g_p = r^p g_0$.

   Si $g_0 = 0$ ou $r = 1$, alors la suite $(g_n)$ est constante, donc convergente ; si $|r| < 1$, on a alors pour tout $k \geq 0$ entier $g_k = \underbrace{g_0}_{\text{borné}} \underbrace{e^{\overbrace{k \ln r}^{\longrightarrow -\infty}}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$, d'où la convergence de $(g_n)$.

   Supposons réciproquement $(g_n)$ convergente. Supposons $g_0 \neq 0$. Alors la suite $(r^n)$ est le produit $\left(\frac{1}{g_0} g_n\right)$ de suites bornées, donc reste bornée, ce qui impose $|r| \leq 1$ (sinon $|r^n| \longrightarrow \infty$ n'est pas majorée). Supposons $|r| \not< 1$ (d'où l'on tire $|r| = 1$) et montrons que $r = 1$, ce qui conclura. On a pour tout entier $n \geq 0$ [dessin]

$$|g_{n+1} - g_n| \quad = \quad \left|g_0 r^{n+1} - g_0 r^n\right| = |g_0| \underbrace{|r|}_{=1}{}^n\, |r - 1|\,, \text{ d'où } |r - 1| = \frac{|g_{n+1} - g_n|}{|g_0|} \longrightarrow \frac{|\lim g - \lim g|}{|g_0|} = 0,$$

   ce qui montre $r \longrightarrow 1$, d'où l'on tire $r = 1$ par unicité de la limite.

**Définition.** *On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(a_n)$ tel que $\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall p \in \mathbf{N},\ a_{p+1} = \lambda a_p + \mu$.*

**Remarques.** Dans la définition ci-dessus, on a les équivalences

1. $\lambda = 0 \Longleftrightarrow (a_n)$ constante ;
2. $\lambda = 1 \Longleftrightarrow (a_n)$ arithmétique ;
3. $\mu = 0 \Longleftrightarrow (a_n)$ géométrique.

[4] Considérer deux réels $a$ et $b$ positifs. Tracer un demi-cercle de diamètre $a + b$. Placer un point $H$ sur le diamètre à distance $a$ (ou $b$) d'une de ses extrémités. La perpendiculaire au diamètre en ce point recoupe le demi-cercle en un point $C$. La distance $HC$ est appelée la ***moyenne géométrique*** de $a$ et $b$. Quelques considérations d'aires montreraient que cette moyenne vaut $\sqrt{ab}$. (Il est évident sur le dessin que cette moyenne est plus petit que le rayon $\frac{a+b}{2}$ du demi-cercle, lequel s'appelle la ***moyenne arithmétique*** de $a$ et $b$.) Trois scalaires sont dits ***en progression géométrique*** si celui du milieu est la moyenne géométrique des deux autres (*i. e.* si son carré vaut le produit des deux autres). Une ***suite géométrique*** est alors une suite dont trois termes consécutifs quelconques forment une progression géométrique.

**Méthode.** Soient $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires et $(a_n)$ une suite telle que $a_{p+1} = \lambda a_p + \mu$. Si $\varphi$ est un point fixe de la fonction $t \mapsto \lambda t + \mu$, alors la suite $(a_n - \varphi)$ est géométrique.

**Exemple.** *Soit* $(u_n)$ *une suite telle que* $u_0 = \frac{11}{3}$ *et* $\forall p \in \mathbf{N},\ u_{p+1} = 2\,(1 - u_p)$. *Donner une expression simple de* $(u_n)$.

Cherchons un point fixe. Soit $\varphi \in \mathbf{K}$ : on a les équivalences $\varphi = 2\,(1 - \varphi) \iff 3\varphi = 2 \iff \varphi = \frac{2}{3}$. On a alors pour tout $k \geq 0$ entier

$$u_{k+1} - \frac{2}{3} = 2\,(1 - u_k) - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - 2u_k = (-2)\left(u_k - \frac{2}{3}\right),$$

ce qui montre que la suite $\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$ est géométrique de raison $-2$, d'où $\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \left((-2)^n \left(u_0 - \frac{2}{3}\right)\right) = \left(3\,(-2)^n\right)$.