Espaces vectoriels

(résumé)

$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Un ***espace vectoriel*** (***ev***) est un univers où l'on peut former des combinaison linéaires, comme avec les vecteurs du plan ou de l'espace.

Dans un $\mathbf{K}$-ev E, $\left\{\begin{array}{l}\text{un } \textbf{\textit{vecteur}} \text{ est un élément } \overrightarrow{x}\in E \\ \text{un } \textbf{\textit{scalaire}} \text{ est un élément } \lambda\in\mathbf{K}\end{array}\right.$. Utile : $\lambda\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\iff\left(\lambda=0 \text{ ou } \overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\right)$.

On additionne les vecteurs $\overbrace{\underbrace{\overrightarrow{x}}_{\text{vecteur}}+\underbrace{\overrightarrow{y}}_{\text{vecteur}}}^{\text{vecteur}}$, on multiplie les vecteurs par des scalaires $\overbrace{\underbrace{\lambda}_{\text{scalaire}}\cdot\underbrace{\overrightarrow{x}}_{\text{vecteur}}}^{\text{vecteur}}$ mais

ON NE MULTIPLIE PAS LES VECTEURS ENTRE EUX !

Ev usuels : (calculer coordonnée par coordonnée)

1. le plan usuel $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$
2. l'espace usuel $\mathbf{R}^3$
3. la droite $\mathbf{K}$
4. le plan $\mathbf{K}^2$
5. l'espace $\mathbf{K}^n$
6. les polynômes $\mathbf{K}[X]$
7. les suites $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$
8. les fonctions $\mathbf{K}^X$.

Pour montrer que Truc est un ev, on montre que Truc un ***sous-espace vectoriel*** (***sev***), *i. e.* que

0. Truc est inclus dans un ev usuel
1. Truc contient $\overrightarrow{0}$
2. Truc est stable par addition
3. Truc est stable par homothéties

TOUS LES SEV PASSENT PAR $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Une ***combinaison linéaire*** est un vecteur de la forme $\lambda_1\overrightarrow{x_1}+\lambda_2\overrightarrow{x_2}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{x_n}$.
Vect A est l'ensemble formé des combinaisons linéaires de vecteurs $\in A$.
Vect A est le plus petit sev contenant A, il s'appelle le ***sev engendré*** par A.
$A\subset\operatorname{Vect}A$ et $(A=\operatorname{Vect})\iff(A \text{ est un sev})$.
ÊTRE UN SEV$\iff$ ÊTRE STABLE PAR COMBINAISONS LINÉAIRES.
La famille des sev est stable par somme $\sum$ et par intersection $\bigcap$ (MAIS PAS PAR UNION $\bigcup$!).

Une somme $V+W:=\{v+w\ ;\ v\in V,\ w\in W\}$ est notée $V\oplus W$ (et est dite ***directe***) si

$$\overbrace{v}^{\in V}+\underbrace{w}_{\in W}=\overbrace{v'}^{\in V}+\underbrace{w'}_{\in W}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}v=v'\\ w=w'\end{array}\right..$$

Deux sev sont en somme directe si leur intersection est nulle : $V+W=V\oplus W\iff V\cap W=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Deux sev V et W sont ***supplémentaires*** si si $V\oplus W=E$.
DES SEV **SUP**PLÉMENTAIRES *NE* *SONT* *PAS* **COM**PLÉMENTAIRES !