Espaces vectoriels

mardi 12, mercredi 13 février

Table des matières

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. (Comme dans le cours sur les équations différentielles, cette notation permet d'éviter de réécrire chaque énoncé deux fois en échangeant $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.) Les éléments de $\mathbf{K}$ seront appelés des ***scalaires.***

1 Introduction

Le cours de calcul permet de mener des calculs dans $\mathbf{C}$ (développer, factoriser, identités remarquables...). En fait, nous avons seulement utilité le fait que $\mathbf{C}$ est un groupe additif muni d'une multiplication vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\times$ admet un neutre (noté alors 1) ;
2. $\times$ est associative
3. $\times$ est distributive sur $+$.

Une telle structure s'appelle un ***anneau***[1]. Lorque la loi $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est ***commutatif.***

Exemples :

1. l'anneau nul $\{0\}$ (dans lequel $0 = 1$) ;
2. l'anneau des entiers $\mathbf{Z}$;
3. les ensembles $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$; contrairement aux entiers, les éléments (non nuls) des anneaux $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ sont *inversibles* : on dit que $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ sont des ***corps***[2] *;*
4. l'anneau des suites scalaires $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ où les lois sont définies coordonnée par coordonnée

$$\begin{array}{cccl} + & \begin{array}{c}(a,b,c,...)\\(\alpha,\beta,\gamma,...)\end{array} & := & (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, ...) \\ \times & \begin{array}{c}(a,b,c,...)\\(\alpha,\beta,\gamma,...)\end{array} & := & (a\alpha, b\beta, c\gamma, ...) \\ & & & \text{(où } a,\alpha,b,\beta,c,\gamma,... \text{ sont des scalaires).} \end{array}$$

[1] en anglais : "ring"
[2] en anglais : "field"

★ Tous les anneaux *ne* sont *pas* commutatifs, on verra plus tard dans le cours le contre-exemple fondamental des *anneaux matriciels* (penser aux produits de matrices de taille 2×2 vues dans le D. M. 3).

Ainsi, certaines identités remarquables du cours sur le calcul ne resteront valides que *sous une hypothèse de commutativité*. Par exemple, si a et b sont dans un anneau, alors le carré $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$ vaudra $a^2 + 2ab + b^2$ (comme attendu) ssi $ab = ba$, *i. e.* ssi a et b commutent.

De même, il faudra prendre gare à ce que *les éléments d'un anneau ne sont pas tous inversibles* : par exemple, si u est un élément d'un anneau, l'identité $\sum_{i=0}^{42} u^i = \frac{1-u^{43}}{1-u}$ ne fera sens que si $1-u$ est inversible, ce qui n'est pas le cas (par exemple) de la suite $(1,0,0,...)$.

Les anneaux fournissent le cadre le plus général pour faire du calcul avec les propriétés attendues (un $+$ et un $\times$ associatifs avec neutres 0 et 1, un $+$ commutatif ainsi qu'un $\times$ distributif sur $+$).

Le calcul vectoriel vu en début d'année se comporte de manière analogue (un $+$ et un $\cdot$ "associatifs" avec "neutres" 0 et 1, un $+$ commutatif ainsi qu'un $\cdot$ "distributif" sur $+$), à cela près que la multiplication $\cdot$ ne fait pas intervenir seulement des vecteurs (★ on ne multiplie/divise pas des vecteurs entre eux!) mais aussi des objets "extérieurs" aux vecteurs (des scalaires). Cela doit rendre complètement naturelles les deux définitions suivantes.

2 Espaces vectoriels

Définition (loi de composition externe). *Soient A et Ω deux ensembles. On appelle* ***loi de composition externe*** *(en abrégé :* ***l. c. e.****) de Ω sur A toute application de $\Omega \times A$ vers A. L'image d'un couple $(\omega, a) \in \Omega \times A$ est notée $\omega \cdot a$ voire ωa.*

Exemple. Si A est muni d'une l. c. i., alors cette dernière est une l. c. e. de A sur A.

Définition (espace vectoriel[3]). *On appelle* **$\mathbf{K}$*-espace vectoriel*** *(en abrégé :* **$\mathbf{K}$-*e. v.***) tout groupe additif E muni d'une l. c. e. de $\mathbf{K}$ sur E telle que*

1. *(axiome de "neutre")* $\forall a \in E,\ 1 \cdot a = a$;
2. *(axiome d'"associativité"[4])* $\forall (\lambda, \mu, a) \in \mathbf{K}^2 \times E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \times \mu) \cdot a$ *(noté $\lambda\mu a$ tout court) ;*
3. *(axiome de "distributivité")* $\forall (\lambda, \mu, a, b) \in \mathbf{K}^2 \times E^2,\ \begin{cases} (\lambda+\mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a \\ \lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \end{cases}.$

(MNÉMO : calquer sur la définition d'un anneau.)

On dit alors également que E est un ***e. v. sur*** $\mathbf{K}$.

Les éléments d'un $\mathbf{K}$-e. v. sont appelés des ***vecteurs****, ceux de $\mathbf{K}$ des* ***scalaires****. Le vecteur 0 est appelé* ***vecteur nul****.*

Exemples.

1. Le plan $\mathbf{R}^2$ et l'espace $\mathbf{R}^3$ sont les espaces vectoriels de référence qui doivent guider notre intuition initiale.
2. $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel dont la l. c. e. $\cdot$ est la l. c. i. $\times$ (c'est une ***droite vectorielle***).
3. $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (c'est un ***plan vectoriel***).
4. Pour tout $n \geq 1$ entier, $\mathbf{K}^n$ est un espace vectoriel pour les loi coordonnées

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{(pour tous scalaires } \lambda, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n\text{)}$$

(lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve le calcul vectoriel connu dans le plan ou dans l'espace).

[3] en anglais : "vector space"

[4] En tout rigueur, la quantification universelle devrait s'écrire $\forall (\lambda, \mu, a) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E}$ ou $\forall ((\lambda, \mu), a) \in \mathbf{K}^2 \times E$. Selon l'usage, nous ne ferons pas de différence entre les produits cartésiens $A \times B \times C$, $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ pour tous ensembles A, B et C.

5. En "faisant tendre n vers ∞" dans l'exemple précédent, on peut munir l'anneau des suites $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ d'une l. c. i. coordonnée par coordonnée

$$\begin{array}{c} S\cdot(a,b,c,...) \\ +(\alpha,\beta,\gamma,...) \end{array} := (Sa+\alpha, Sb+\beta, Sc+\gamma, ...)$$

(pour tous scalaires $S, a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, ...$).

6. En remplaçant $\mathbf{N}$ (dans l'exemple précédent) par un ensemble quelconque X, on peut munir l'ensemble fonctionnel $\mathbf{K}^X$ de trois lois $+, \times, \cdot$ définies "point par point" par

$$\lambda\cdot f+g\times h : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x)+g(x)h(x) \end{array} \right. .$$

On obtient (comme pour les suites) un anneau et un espace vectoriel dont les multiplications $\cdot$ et $\times$ sont "*compatibles*" au sens suivant : pour tout scalaire λ et pour tous vecteurs a et b, on a

$$\lambda\cdot(a\times b) = (\lambda\cdot a)\times b = a\times(\lambda\cdot b) \qquad \text{(noté tout simplement } \lambda ab\text{).}$$

POUR TOUTE LA SUITE DU CHAPITRE, ON FIXE UN ESPACE VECTORIEL E.

La proposition suivante permet de s'entraîner à utiliser (et donc retenir) les axiomes de E.

Proposition (calcul dans un espace vectoriel). *Soient a un vecteur et λ un scalaire. Alors*

1. *l'addition est commutative ;*
2. *on a les égalités $0a = 0 = \lambda 0$;*
3. *on a les égalités $(-\lambda)a = \lambda(-a) = -(\lambda a)$ (noté $-\lambda a$ tout court) ;*
4. *on a l'équivalence $\lambda a = 0 \iff (\lambda = 0$ ou $a = 0)$.*

MNÉMO :

1. une addition se doit d'être commutative ;
2. zéro fois n'importe quoi fait zéro ;
3. on a une règle des signes ;
4. la multiplication $\cdot$ est "intègre" (comme celle de $\mathbf{K}$).

Remarques. Du point de vue de la multiplication $\cdot$, le point 2 montre que les deux zéros vectoriel et scalaire sont indistinguables (multiplier par l'un d'eux donne toujours le vecteur nul) et le point 3 montre que les deux oppositions $z \mapsto -z$ vectorielle et scalaire sont indistinguables.

Démonstration. Afin de justifier chaque étape, on indiquera le nom de l'axiome utilisé : N pour "neutre", A pour "associativité", $\overleftarrow{D}$ pour "distributivité à gauche" et $\overrightarrow{D}$ pour "distributivité à droite".

1. Soient u et v deux vecteurs. On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} u+u+v+v & \overset{N}{=} & 1u+1u+1v+1v \\ & \overset{\overleftarrow{D}}{=} & (1+1)u+(1+1)v \\ & \overset{\overrightarrow{D}}{=} & (1+1)(u+v) \\ & \overset{\overleftarrow{D}}{=} & 1(u+v)+1(u+v) \\ & \overset{\overrightarrow{D}}{=} & 1u+1v+1u+1v \\ & \overset{N}{=} & u+v+u+v\,; \end{array}$$

en simplifiant à gauche par u et à droite par v (on peut car E est un groupe additif), on obtient $u+v = v+u$, *c. q. f. d.*.

2. On a $0a=(0+0)\,a\overset{\overleftarrow{D}}{=}0a+0a$, d'où $0=0a$ en simplifiant par $0a$. De même, on a $\lambda 0=\lambda\,(0+0)\overset{\overrightarrow{D}}{=}\lambda 0+\lambda 0$, d'où $0=\lambda 0$ en simplifiant par $\lambda 0$.

3. Montrons que $(-\lambda)\,a$ et $\lambda\,(-a)$ sont des opposés de λa. On a

$$\begin{aligned}\lambda a+(-\lambda)\,a\overset{\overleftarrow{D}}{=}(\lambda+(-\lambda))\,a &= 0a\overset{\text{point 2}}{=}0\\ \text{et } \lambda a+\lambda\,(-a)\overset{\overrightarrow{D}}{=}\lambda\,(a+(-a)) &= \lambda 0\overset{\text{point 2}}{=}0\,;\end{aligned}$$

or l'addition de E est commutative, donc il n'y a pas besoin de vérifier "l'autre sens".

4. Le sens $\Longrightarrow$ est exactement le point 2. Supposons réciproquement que $\lambda a=0$. Si $\lambda=0$, on a terminé. Sinon λ est inversible et l'on peut écrire

$$0\overset{\text{point 2}}{=}\frac{1}{\lambda}0\overset{\text{hypothèse}}{=}\frac{1}{\lambda}\,(\lambda a)\overset{A}{=}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)a=1a\overset{N}{=}a,\qquad \text{d'où } a=0.$$

Venons-on aux objets du calcul vectoriel, *i. e.* aux vecteurs que l'on peut former à l'aide des lois $+$ et $\cdot$.

Définition (combinaison linéaire, Vect**).**
Soient $n\in\mathbf{N}$ et $(a_1,a_2,...,a_n)\in E^n$. On appelle ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $a_1,a_2,...,a_n$ tout vecteur de la forme $\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i$ où $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$ sont des scalaires.*
Soit $A\subset E$. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A est noté

$$\underset{\mathbf{K}}{\operatorname{Vect}}A:=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i\ ;n\in\mathbf{N},\quad \begin{matrix}(a_1,a_2,...,a_n)\in A^n\\(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n\end{matrix}\right\}\ \textit{ou}\ \operatorname{Vect}A.$$

Remarque. Une combinaison linéaire de zéro vecteurs est une somme vide, *i. e.* est le vecteur nul. On en déduit

$$\operatorname{Vect}\emptyset=\{0\}\,.$$

Exemple. Tout vecteur de $\mathbf{C}$ est combinaison $\mathbf{R}$-linéaire de 1 et i (la réciproque est claire). On en déduit

$$\underset{\mathbf{R}}{\operatorname{Vect}}\{1,i\}=\mathbf{C}.$$

En d'autres termes, tout vecteur de $\mathbf{R}^2$ est combinaison linéaire des vecteurs $\binom{1}{0}$ et $\binom{0}{1}$ (et réciproquement), ce qui s'écrit

$$\underset{\mathbf{R}}{\operatorname{Vect}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbf{R}^2.$$

Notation (sommes et homothétés). Soient A et B deux parties de E et λ un scalaire. On notera

$$\begin{aligned} A+B &:= \{a+b\ ;a\in A,\ b\in B\} &&\text{(c'est l'image de l'application } \left\{\begin{array}{ccc}A\times B&\longrightarrow&E\\(\alpha,\beta)&\longmapsto&\alpha+\beta\end{array}\right.\text{)}\\ \text{et } \lambda A &:= \{\lambda a\ ;\ a\in A\} &&\text{(c'est l'image de l'application } \left\{\begin{array}{ccc}A&\longrightarrow&E\\x&\longmapsto&\lambda x\end{array}\right.\text{)}.\end{aligned}$$

3 Sous-espaces vectoriels

Définition (sous-espace vectoriel[5]). *On appelle* ***sous-espace vectoriel*** *(abrégé en* ***s.-e. v.****) de E toute partie de E qui est un espace vectoriel pour les lois (de E) induites (sur A).*
(Si le corps de base est ambigu, on pourra parler de sous-$\mathbf{K}$ espace vectoriel).

Proposition (critère pour être un s.-e. v.). *Soit A une partie de E. Alors A est un s.-e. v. de E ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

[5] en anglais : "vector (or linear) subspace"

1. *A contient le vecteur nul (*i e. $0 \in A$*);*
2. *A est stable par addition (i. e. $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ a + \alpha \in A$, ou encore $A + A \subset A$);*
3. *A est stable par homothéties (i. e. $\forall (\lambda, a) \in \mathbf{K} \times A,\ \lambda a \in A$, ou encore $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \lambda A \subset A$).*

Démonstration.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est un s.-e. v. de E. Alors $+$ est une l. c. i. sur A, donc A est stable par addition et, de même, $\cdot$ est une l. c. e. de $\mathbf{K}$ sur A, ce qui montre que A est stable par homothéties. Notons ω le neutre de A. Alors le vecteur $-\omega = (-1)\,\omega$ reste dans A, donc le vecteur $0 = \omega + (-\omega)$ aussi.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons les trois conditions de la proposition. Les points 2 et 3 disent précisément que $+$ et $\cdot$ sont une l. c. i. et une l. c. e. sur A. En remplaçant, dans les axiomes de E, les vecteurs de E par des vecteurs de A, on obtient les axiomes d'un e. v. pour A. Il reste à montrer que A est un groupe. Montrons pour cela que A est un sous-groupe de E. Les points 1 et 2 nous disent qu'il suffit de montrer que A est stable par opposition ; or opposer est appliquer une homothétie (de rapport -1), ce qui laisse stable A d'après le point 3.

Remarque. Les points 2 et 3 peuvent être condensés en $\forall (\lambda, a, \alpha) \in A,\ \lambda a + \alpha \in A$.
Intérêt de ce critère : au lieu de vérifier à main les axiomes d'un groupe additif et ceux d'un e. v., il suffira (pour montrer que telle partie est un e. v.) de vérifier les trois critères ci-dessus.

Exploration de la faune vectorielle plane. *Parmi les parties suivantes de $\mathbf{C}$, dire lesquelles sont ou ne sont pas des s.-e. v. (de $\mathbf{C}$) puis décrire (géométriquement, sans démonstration propre) leur* Vect *:*

$$\begin{aligned}
&\emptyset,\ \{0\},\ \{18\},\ \mathbf{Z},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{R},\ \mathbf{R}^2,\ [0,1],\ \mathbf{R}+1, 1+i\mathbf{R},\ \mathbf{C}^*,\ i\mathbf{R},\\
&\{\Gamma \in \mathbf{C}\ ;\ 3\operatorname{Re}\Gamma + \operatorname{Im}\Gamma = 0\},\ \{f \in \mathbf{C}\ ;\ |f| = 1\},\ \{u \in \mathbf{C}\ ;\ |u| \leq 1\},\\
&\left\{z \in \mathbf{C}^*\ ;\ |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{6}\right\},\ \{\Psi \in \mathbf{C}\ ;\ |\operatorname{Re}\Psi| \leq 3\,|\operatorname{Im}\Psi|\},\\
&\left\{(\omega, \rho) \in \mathbf{R}^2\ ;\ \omega + 7\rho = 0 \text{ et } 2\omega - \rho = 4\right\}.
\end{aligned}$$

Faire un bilan des s.-e. v. et Vect *trouvés et commenter.*

Solution proposée. Chaque cas doit être accompagné d'un dessin dans le plan. [pleins de dessins]
Le vide $\emptyset$ ne contient pas 0, donc n'est pas un s.-e. v.. En revanche, $\emptyset$ est stable par addition et par homothéties puisque ces stabilités s'énoncent chacune sous la forme $\forall o \in \emptyset,\ P(o)$, ce qui est un énoncé vrai[6] (sa négation s'écrit $\exists o \in \emptyset,\ \neg P(o)$, ce qui est faux puisqu'il n'y a pas d'objets dans $\emptyset$). Nous avons déjà vu que $\operatorname{Vect}\emptyset = \{0\}$.
Le singleton $\{0\}$ contient 0, est stable par addition (puisque $0 + 0 = 0$) et par homothéties (puique $\lambda 0 = 0$ pour tout scalaire λ). Il s'agit donc d'un s.-e. v. de $\mathbf{C}$, appelé le ***s.-e. v. nul***. Les seuls combinaisons linéaires mettant en jeu 0 sont nulles, d'où $\operatorname{Vect}\{0\} = \{0\}$.
Le singleton $\{18\}$ ne contient pas 0, donc n'est pas un s.-e. v.. Il n'est pas non plus stable par addition (puisque $18 + 18 \notin \{18\}$) ni par homothéties (puisque $2 \cdot 18 \notin \{18\}$). Les combinaisons linéaires de 18 sont tous les scalaires, d'où $\operatorname{Vect}\{18\} = \mathbf{K}$.
La partie $\mathbf{Z}$ n'est pas stable par homothéties (car $\underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathbf{K}}\underbrace{1}_{\in \mathbf{Z}} \notin \mathbf{Z}$), donc n'est pas un s.-e. v.. Il est en revanche stable par addition et contient 0 (car c'est un groupe). Comme ci-dessus, on trouve $\operatorname{Vect}\mathbf{Z} = \mathbf{K}$.
La partie $\mathbf{Q}$ n'est pas stable par homothéties (car $\underbrace{\sqrt{2}}_{\in \mathbf{K}}\underbrace{1}_{\in \mathbf{Q}} \notin \mathbf{Q}$), donc n'est pas un s.-e. v.. Il est en revanche stable par addition et contient 0 (car c'est un groupe) et est stable par homothéties de rapport rationnel. Comme ci-dessus, on trouve $\operatorname{Vect}\mathbf{Q} = \mathbf{K}$.
La partie $\mathbf{R}$ contient 0 et est stable par addition (c'est un groupe) mais n'est pas forcément stable par homothéties : tout dépend du corps de base $\mathbf{K}$. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, alors $\mathbf{R}$ est stable par $\cdot$ et est un s.-e. v. (c'est une droite vectorielle). ; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, alors $\mathbf{R}$ n'est pas stable par homothéties (car $\underbrace{i}_{\in \mathbf{K}}\underbrace{1}_{\in \mathbf{R}} \notin \mathbf{R}$) et n'est donc pas un s.-e. v.. Dans les deux cas, on trouve $\operatorname{Vect}\mathbf{R} = \mathbf{K}$.

[6] Un tel énoncé ne dit rien, on dit qu'il est ***vide***. Si l'on devait lui valeur de vérité (vrai ou faux), sa fausseté nous conduirait à hurler à la contradiction dès que quelqu'un se tairait. Il est bien plus serein de supposer que ne rien dire ne nuit pas à la cohérence de ce qui a déjà été dit.
On peut aussi dire qu'un tel énoncé est une conjonction vide, donc est le neutre pour la conjonction, à savoir le vrai.

La partie $\mathbf{R}^2$ contient 0 et est stable par $+$ et $\cdot$, donc est un s.-e. v.. Puisqu'on ne peut pas sortir du plan, on a $\operatorname{Vect}\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2$.

Le segment $[0,1]$ n'est pas stable par addition (car $\underbrace{1}_{\in[0,1]} + \underbrace{1}_{\in[0,1]} \notin [0,1]$), donc n'est pas un s.-e. v.. Il n'est pas non plus stable par homothéties (car $\underbrace{2}_{\in\mathbf{K}} + \underbrace{1}_{\in[0,1]} \notin [0,1]$) mais contient 0. Comme pour $\{18\}$ et $\mathbf{Z}$, on trouve $\operatorname{Vect}[0,1] = \mathbf{K}$.

La droite $\mathbf{R}+1$ est la translaté de $\mathbf{R}$ selon le vecteur 1, on retrouve la partie $\mathbf{R}$ qui est un s.-e. v. ssi $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

La droite $1+i\mathbf{R}$ ne contient pas 0 (sinon on pourrait écrire $0 = 1+ir$ pour un certain réel r, d'où $\binom{0}{0} = \binom{1}{r}$), donc n'est pas un s.-e. v.. Elle n'est pas non plus stable par addition (car $\underbrace{1}_{\in 1+i\mathbf{R}} + \underbrace{1}_{\in 1+i\mathbf{R}} \notin 1+i\mathbf{R}$) ni par homothéties (car $\underbrace{2}_{\in\mathbf{K}} + \underbrace{1}_{\in 1+i\mathbf{R}} \notin 1+i\mathbf{R}$). Tout vecteur du plan hors de $i\mathbf{R}$ est l'homothété d'un vecteur de $1+i\mathbf{R}$ et la somme de deux tels vecteurs peut atteindre tout vecteur de $i\mathbf{R}$, ce qui montre que $\operatorname{Vect}(1+i\mathbf{R}) = \mathbf{C}$.

La partie $\mathbf{C}^*$ ne contient pas 0, donc n'est pas un s.-e. v.. Il n'est pas non plus stable par addition (car $\underbrace{1}_{\in\mathbf{C}^*} + \underbrace{-1}_{\in\mathbf{C}^*} \notin \mathbf{C}^*$) mais est stable par les homothéties de rapport non nul. On obtient $\operatorname{Vect}\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^*$ en rajoutant la somme $1+(-1)$.

La droite $i\mathbf{R}$ contient 0 et est stable par addition mais n'est pas forcément stable par homothéties : tout dépend du corps de base $\mathbf{K}$. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, alors $\mathbf{R}$ est stable par $\cdot$ et est un s.-e. v. (c'est une droite vectorielle).; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, alors $\mathbf{R}$ n'est pas stable par homothéties (car $\underbrace{i}_{\in\mathbf{K}}\underbrace{i}_{\in i\mathbf{R}} \notin i\mathbf{R}$) et n'est donc pas un s.-e. v.. Dans le premier cas, on obtient $\operatorname{Vect}_{\mathbf{R}} i\mathbf{R} = i\mathbf{R}$, dans le second on obtient $\operatorname{Vect}_{\mathbf{C}} i\mathbf{R} = \mathbf{C}$.

La partie $\{\Gamma \in \mathbf{C} \ ; \ 3\operatorname{Re}\Gamma + \operatorname{Im}\Gamma = 0\}$ est la droite d'équation $3x+y=0$, elle contient 0 et est dirigée par le veteur $\binom{1}{-3}$, elle est stable par addition (la somme de deux vecteurs colinéaires à $(1,-3)$ reste colinéaire à $(1,-3)$) et par homothétie (tout homothété de $(1,-3)$ est colinéaire à $(1,-3)$) : il s'agit donc d'un s.-e. v. (c'est une droite vectorielle). On voit qu'elle est stable par combinaison linéaire, d'où $\operatorname{Vect}\mathbf{R}\binom{1}{-3} = \mathbf{R}\binom{1}{-3}$.

Le cercle unité $\mathbf{U} = \{f \in \mathbf{C} \ ; \ |f| = 1\}$ ne contient pas 0, donc n'est pas un s.-e. v.. Il n'est pas non stable par addition (car $\underbrace{1}_{\in\mathbf{U}} + \underbrace{1}_{\in\mathbf{U}} \notin \mathbf{U}$) ni par homothétie (car $\underbrace{2}_{\in\mathbf{K}}\underbrace{1}_{\in\mathbf{U}} \notin \mathbf{U}$). Tout vecteur du plan étant un homothété d'un complexe unitaire, on obtient $\operatorname{Vect}\mathbf{U} = \mathbf{C}$.

Le disque unité $\mathbf{D} := \{\varrho \in \mathbf{C} \ ; \ |\varrho| \leq 1\}$ n'est pas stable par addition (ni par homothéties, même contre-exemples que pour $\mathbf{U}$), donc n'est pas un s.-e. v.. Il contient cependant 0. Comme ci-dessus, on trouve $\operatorname{Vect}\mathbf{D} = \mathbf{C}$.

La partie $\left\{z \in \mathbf{C}^* \ ; \ |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{6}\right\}$ ne contient pas 0, donc n'est pas un s.-e. v.. Ce secteur angulaire $\mathcal{S}$ est bien stable par addition, par homothéties de rapport (strictement) positif mais par aucun homothétie de rapport strictement négatif. En rajoutant les vecteurs opposés puis en additionnant les vecteurs des deux secteurs angulaires $\mathcal{S}$ et $-\mathcal{S}$, on obtient $\operatorname{Vect}\mathcal{S} = \mathbf{C}$.

La partie $\mathcal{C} := \{\Psi \in \mathbf{C} \ ; \ |\operatorname{Re}\Psi| \leq 3\,|\operatorname{Im}\Psi|\}$ n'est pas stable par addition (car $\underbrace{3+i}_{\in\mathcal{C}} + \underbrace{i-3}_{\in\mathcal{C}} \notin \mathcal{C}$) mais ce "cône plan" contient 0 et est stable par homothétie. En ajoutant des vecteurs de $\mathcal{C}$, on obtient $\operatorname{Vect}\mathcal{C} = \mathbf{C}$ (remarque : tout vecteur est combinaison linéaire de $3+i$ et $3-i$).

La partie $\left\{(\omega,\rho) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ \omega + 7\rho = 0 \text{ et } 2\omega - \rho = 4\right\}$ ne contient pas 0 (car ses coordonnées ne vérifient pas la seconde égalité), donc est un s.-e. v.. Il s'agit de l'intersection d'une droite vectorielle (*i. e.* passant par 0) et d'une droite non vectorielle : on trouve un singleton ne contenant pas 0, qui n'est donc stable ni par addition ni par homothéties. (Le calcul donnerait le point d'intersection $\left(\frac{28}{15}, -\frac{4}{15}\right) = \frac{4}{15}(7,-1)$.) Comme pour le singleton $\{18\}$, son Vect est la droite engendré par le vecteur $\frac{4}{15}(7,-1)$, autrement dit $\operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\left(\frac{28}{15}, -\frac{4}{15}\right)\right\} = \mathbf{R}(7,-1)$.

Bilan. Les s.-e. v. trouvés sont de trois sortes :

1. le s.-e. v. nul $\{0\}$;
2. des droites vectorielles ;
3. le plan $\mathbf{R}^2$.

On admet la validité de cette classification[7] des s.-e. v. du plan.

On observe également que :

1. tous les Vect trouvés sont des s.-e. v. ;

[7] que l'on démontrera dans le cours sur la dimension

2. tous les s.-e. v. ci-dessus sont stables par combinaisons linéaires ;
3. tous les s.-e. v. ci-dessus ont pour Vect eux-mêmes.

On retiendra les adages suivants :

tous les s.-e. v. passent par 0 ;

être un s.-e. v. $\Longleftrightarrow$ *être stable par combinaisons linéaires*

(se rappeler que la combinaison linéaire vide est le vecteur nul).

Commentaires. L'intersection et la somme de n'importe quels s.-e. v. ci-dessus reste un s.-e. v.. Par exemple, l'interserction de deux droites vectorielle est ou bien le s.-e. v. nul, ou bien (si elles coïncident) une droite. De même, on remarquera que, pour tout s.-e. v. V de E, on a les égalités $E \cap V = V = V + \{0\}$ et $\{0\} \cap V = \{0\}$ et $E + V = E$. Montrons cela proprement.

Proposition. *L'intersection d'une famille quelconque de s.-e. v. reste un s.-e. v..*

Démonstration. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de s.-e. v. de E indexée par un ensemble I. Montrons que $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un s.-e. v. (de E).

Soit $i \in I$: puisque V_i est un s.-e. v., il contient 0. On en déduit $\forall i \in I,\ 0 \in V_i,\ i.\ e.\ 0 \in \bigcap_{i \in I} V_i$.

Soient x et y dans $\bigcap_{i \in I} V_i$ et λ un scalaire. Soit $i \in I$: alors x et y appartient à V_i ; ce dernier étant un s.-e. v., il contient $\lambda x + y$. On en déduit $\forall i \in I,\ \lambda x + y \in V_i,\ i.\ e.\ \lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} V_i$.

Proposition. *Une somme finie*[8] *de s.-e. v. reste un s.-e. v..*

On procède par récurrence. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des s.-e. v. de E. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n l'énoncé

$$\forall (V_1, V_2, ..., V_n) \in \mathcal{S}^n,\ V_1 + V_2 + \cdots + V_n \in \mathcal{S}.$$

Montrons P_2. Soit $(V, W) \in \mathcal{S}^2$. Montrons que $V + W$ est s.-e. v.. Puisque V et W sont des s.-e. v., ils contiennent chacun 0, donc $V + W$ contient $0 + 0 = 0$. Soient x et y dans $V + W$ et λ un scalaire. On peut écrire $x = v + w$ et $y = v' + w'$ pour un certain $(v, v', w, w') \in V^2 \times W^2$, d'où l'on tire

$$\lambda x + y = \lambda (v + w) + (v' + w') = \underbrace{\underbrace{(\lambda v + v')}_{\in V} + \underbrace{(\lambda w + w')}_{\in W}}_{\in V + W}.$$

Soit $n \geq 2$ entier tel que P_n. Montrons P_{n+1}. Soit $(V_0, V_1, ..., V_n) \in \mathcal{S}^{n+1}$. On a alors

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n = \underbrace{V_0 + \underbrace{(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)}_{\in \mathcal{S} \text{ d'après } P_n}}_{\in \mathcal{S} \text{ d'après } P_2} \in \mathcal{S},\ c.\ q.\ f.\ d..$$

★ l'union de s.-e. v. n'est en général[9] pas un s.-e. v. ! Contre-exemple : $\mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$ n'est pas stable par addition.

Précisons les second points 1 et 3 ci-dessus.

Proposition / définition (s.-e. v. engendré). *Soit A une partie de E. Alors* $\operatorname{Vect} A$ *est le plus petit (au sens de l'inclusion) s.-e. v. de E qui contient A : on l'appelle le* ***s.-e. v. engendré*** *par A.*

Démonstration.

[8] l'associativité de l'addition vectorielle se propage aux parties, ce qui permet pour toutes parties A, B, C de E de parler de la partie

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C) = \{a + b + c\ ;\ (a, b, c) \in A \times B \times C\}.$$

[9] On peut montrer (*cf.* exercices) que l'union de deux s.-e. v. est encore un s.-e. v. ssi l'un est inclus dans l'autre.

Montrons que Vect A est un s.-e. v.. Il contient déjà la combinaison linéaire vide, à savoir le vecteur nul. Soient ensuite x et y dans Vect A et t un scalaire. Soient $(p,q)\in\mathbf{N}^2$ et $\left\{\begin{array}{c}(f_1,f_2,...,f_p,g_1,g_2,...,g_q)\in A^{p+q}\\ (\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p,\mu_1,\mu_2,...,\mu_q)\in\mathbf{K}^{p+q}\end{array}\right.$ tels que $\left\{\begin{array}{l}x=\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i\\ y=\sum_{i=1}^q\mu_i g_i\end{array}\right.$. On a alors

$$x+ty=\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i+t\sum_{i=1}^q\mu_i g_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{p+q}\underbrace{\nu_i}_{\in\mathbf{K}}\underbrace{h_i}_{\in A}}_{\in\operatorname{Vect}A}\text{ où l'on a posé }\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\nu_i:=\lambda_i\\ h_i:=f_i\end{array}\right.\text{ pour tout entier }i\in[1,p]\text{ et}\\ \left\{\begin{array}{l}\nu_i:=t\mu_{i-p}\\ h_i=g_{i-p}\end{array}\right.\text{ pour tout entier }i\in\,]p,q]\end{array}\right..$$

Montrons que Vect A contient A. Soit $a\in A$: alors la combinaison linéaire $1\cdot a$ appartient à Vect A, *i. e.* $a\in\operatorname{Vect}A$.

Soit maintenant V un s.-e. v. de E contenant A. Montrons que $\operatorname{Vect}A\subset V$. Soit $x\in\operatorname{Vect}A$: on peut trouver un $n\in\mathbf{N}$, des vecteurs $a_1,...,a_n$ dans A et des scalaires $\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que $x=\underbrace{\sum_{i=1}^n\underbrace{\lambda_i\underbrace{a_i}_{\in A\subset V}}_{\in V}}_{\in V,\ c.\ q.\ f.\ d.}$.

Intérêt du Vect. Quand quelque chose n'est pas "linéaire", on ne peut pas lui appliquer tout de go la théorie des espaces vectoriels. Pour ce faire, on se place dans le s.-e. v. qu'il engendre.

Remarque. On a toujours l'inclusion

$$A\subset\operatorname{Vect}A\textit{ avec égalité ssi }A\textit{ est un s.-e. v..}$$

Ainsi, lorsqu'on demande "est-ce que *Truc* est un s.-e. v. ?", la véritable question plus profonde est "quel s.-e. v. engendre *Truc*" (faire le parallèle avec lorsqu'on demande si telle application est surjective : ce qui nous intéresse au fond est son image).

4 Sommes directes

Soient A et B deux parties de E. Par définition de la partie $A+B$, l'application $\left\{\begin{array}{ccc}A\times B&\longrightarrow&E\\(a,b)&\longmapsto&a+b\end{array}\right.$ a pour image $A+B$, ce qui revient à dire qu'elle induit une surjection $\left\{\begin{array}{ccc}A\times B&\longrightarrow&A+B\\(a,b)&\longmapsto&a+b\end{array}\right.$. Que dire de son *injectivité* ? Qui n'a jamais eu envie, à partir d'une égalité $a+b=\alpha+\beta$ avec $(a,\alpha,b,\beta)\in A^2\times B^2$, d'*identifier* les composantes et d'affirmer les égalités $\binom{a}{b}=\binom{\alpha}{\beta}$? Cette question motive la définition suivante.

Définition (somme directe, symbole $\oplus$). *Soient V et W deux s.-e. v. de E. Lorsque tout vecteur de $V+W$ s'écrit d'une* unique *façon sous la forme $v+w$ avec $(v,w)\in V\times W$, on dit que la somme $V+W$ est* ***directe*** *et on la note alors $V\oplus W$. En d'autres termes, les s.-e. v. V et W sont dits* ***en somme directe*** *si l'application $\left\{\begin{array}{ccc}V\times W&\longrightarrow&E\\(v,w)&\longmapsto&v+w\end{array}\right.$ est injective.*

Exemples. $\mathbf{C}=\mathbf{R}\oplus i\mathbf{R}$ $\qquad\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\binom{1}{1}\oplus\mathbf{R}\binom{1}{-1}$

★★★ Mises en garde. (non traitée en cours)

1. Soit S un s.-e. v. de E. Affirmer $S=V\oplus W$ signifie *deux* choses :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{l'égalité ensembliste }S=V\oplus W\\ \text{l'unicité d'une décomposition de tout vecteur de }V+W\end{array}\right..$$

2. Affirmer $V\oplus W$ est un non-sens : les symboles $V\oplus W$ dénotent un *objet*, à savoir le s.-e. v. $V+W$, et non un *énoncé*.

3. Si l'on veut dire que les s.-e. v. V et W sont en somme directe en utilisant à tout prix le symbole $\oplus$, on pourra écrire $V+W=V\oplus W$.

On fera le lien suivant entre les symboles de somme directe $\oplus$ et d'union disjointe $\amalg$.
Soit X un ensemble et A et B deux parties de X.

1. Affirmer $X=A\amalg B$ signifie *deux* choses :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{l'égalité ensembliste } X=A\cup B\\ \text{l'unicité de la partie à laquelle appartient tout élément de } A\cup B\end{array}\right. .$$

2. Affirmer $A\amalg B$ est un non-sens : les symboles $A\amalg B$ dénotent un *objet*, à savoir la réunion $A\cup B$, et non un *énoncé*.
3. Si l'on veut dire que les parties A et B sont disjointes en utilisant à tout prix le symbole $\amalg$, on pourra écrire $A\cup B=A\amalg B$.

Ce parallèle entre e. v. et combinatoire est important car on verra que la combinatoire des bases[10] est une manière fructueuse de comprendre les sommes (directes) de s.-e. v..

Proposition (critère pour être en somme directe). *Deux s.-e. v. de E sont en somme directe ssi leur intersection est nulle*[11]*.*

Démonstration. Soient V et W deux s.-e. v. de E.

Supposons V et W en somme directe. Puisque $V\cap W$ est un s.-e. v., il contient 0 comme élément, d'où l'inclusion $\{0\}\supset V\cap W$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x\in V\cap W$. Puisque $\underbrace{x}_{\in V}+\underbrace{0}_{\in W}=x=\underbrace{0}_{\in V}+\underbrace{x}_{\in W}$, l'identification donne $\left\{\begin{array}{l}x=0\\0=x\end{array}\right.$, *i. e.* $x=0$, *c. q. f. d.*.

Supposons $V\cap W=\{0\}$. Soient $(v,v',w,w')\in V^2\times W^2$ tels que $v+w=v'+w'$. Alors le vecteur $\underbrace{v-v'}_{\in V}=\underbrace{w'-w}_{\in W}$ appartient à V et à W, *i. e.* à $V\cap W=\{0\}$, donc est nul, d'où $\left\{\begin{array}{l}v-v'=0\\w'-w=0\end{array}\right.$, *i. e.* $\left\{\begin{array}{l}v=v'\\w=w'\end{array}\right.$, *c. q. f. d.*.

Remarque. La démonstration montre que l'on peut remplacer dans l'énoncé l'égalité $V\cap W=\{0\}$ par l'inclusion $V\cap W\subset\{0\}$ (et on le fera).

Exemple. *Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}=\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}$.*

Il s'agit de montrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}=\mathcal{P}+\mathcal{I}$ et que cette somme est directe. (On montrera en T. G. que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des s.-e. v. de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.)

L'inclusion $\supset$ est claire. Soit $f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: on écrit $f=\frac{f+f(-\mathrm{Id})}{2}+\frac{f-f(-\mathrm{Id})}{2}$ et l'on vérifie aisément que $\frac{f+f(-\mathrm{Id})}{2}\in\mathcal{P}$ et que $\frac{f-f(-\mathrm{Id})}{2}\in\mathcal{I}$ (comme pour les fonctions ch et sh).

Montrons que $\mathcal{P}\cap\mathcal{I}\subset\{0\}$. Soient $f\in\mathcal{P}\cap\mathcal{I}$ et $x\in\mathbf{R}$: on a alors $-f(x)\overset{f\in\mathcal{I}}{=}f(-x)\overset{f\in\mathcal{P}}{=}f(x)$, d'où $f(x)=0$; on en déduit $f=0$, *c. q. f. d.*.

La définition précédente de $\oplus$ se généralise sans peine à un nombre quelconque (fini) de s.-e. v..

Définition (somme directe, supplémentaires). *Soient $n\geq2$ un entier et $V_1,V_2,...,V_n$ des s.-e. v. de E.*

On dit que les s.-e. v. $V_1,V_2,...,V_n$ sont ***en somme directe*** *si l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}V_1\times V_2\times\cdots\times V_n&\longrightarrow&E\\(v_1,v_2,...,v_n)&\longmapsto&\sum_{i=1}^n v_i\end{array}\right.$ *est injective. La somme $V_1+V_2+\cdots+V_n$ est alors dite* ***directe*** *et notée $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$ ou $\bigoplus_{i=1}^n V_i$.*

On dit que les s.-e. v. $V_1,V_2,...,V_n$ sont ***supplémentaires*** *si $E=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$,* i. e. *si l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}V_1\times V_2\times\cdots\times V_n&\longrightarrow&E\\(v_1,v_2,...,v_n)&\longmapsto&\sum_{i=1}^n v_i\end{array}\right.$ *est bijective.*

[10] définies dans le cours sur la dimension
[11] *i. e.* vaut le s.-e. v. nul $\{0\}$

Exemple. $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbf{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbf{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$

★★★ Des s.-e. v. SUPplémentaires ne sont pas COMplémentaires !

En effet, ils ne sauraient être disjoints puisqu'ils contiennent chacun 0. De plus, leur réunion n'est en général pas E tout entier : par exemple, les droites $\mathbf{R}$ et $i\mathbf{R}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{C}$ mais ne sont pas complémentaires puisque $1+i$ est un vecteur hors de leur réunion.

On retiendra que *l'analogue combinatoire de "supplémentaire"* (resp. "somme directe $\oplus$") *est "complémentaire"* (resp. "union disjointe $\amalg$").