

Combinatoire

lundi 21, mardi 22, lundi 28, mardi 29, mercredi 30 janvier, vendredi 1er février

Table des matières

1	L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels	1
1.1	Un point de départ et de quoi avancer	2
1.2	Opérations engendrée par le successeur	2
1.3	Bon ordre	3
1.4	Exemples de récurrences	3
2	Dénombrement	7
2.1	Cardinal d'un ensemble fini	7
2.2	Cardinaux et opérations ensemblistes usuelles	8
2.3	Coefficients binomiaux	8
3	Calcul	10
3.1	Développer	11
3.2	Nécessité d'une notation concise : \sum et \prod	11
3.3	Réindexer (changer d'indice)	13
3.4	Télescoper	14
3.5	Quelques sommes "binomiales" classiques	16
3.6	Associativité et retour au développement (section 3.1)	18

1 L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels

Les nombres "usuels" apparaissent lorsque nous itérons n'importe quelle action A donnée :

1. lorsque l'on effectue A , on dit qu'on l'effectue *une* fois, d'où le concept du nombre 1 ;
2. lorsque l'on effectue A puis A , on dit qu'on l'effectue *deux* fois, d'où le concept du nombre 2 ;
3. lorsque l'on effectue A puis A puis A , on dit qu'on l'effectue *trois* fois, d'où le concept du nombre 3...

et ainsi de suite aussi loin que l'on pourra itérer l'action A ;

0. quand on n'effectue pas A , on dit qu'on l'effectue *zéro* fois, d'où le concept du nombre 0.

Ces nombres usuels *ne sont pas formels*, ils résultent de notre *action*, de notre vie, nous pouvons par conséquent et *devons nous fonder dessus* avant d'envisager toute mathématique.

Les entiers dits *naturels* seront une formalisation mathématique des nombres usuels. En prépa, ces deux types de nombres seront volontiers confondus¹– et l'on oubliera la terminologie "nombre usuel".

¹Cela pose de graves problèmes lorsque l'on se pose des questions de fondements arithmétiques ou logiques, ce qui sort complètement du cadre de ce cours. Que le lecteur soit cependant mis en garde.

1.1 Un point de départ et de quoi avancer

On admet l'existence d'un ensemble \mathbf{N} (dont les éléments seront appelés *entiers naturels*)

1. muni d'un élément singulier 0 (appelé *zéro*),
2. muni d'une application $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ (appelée opérateur *successeur*)
3. et vérifiant la propriété suivante (dite de *récurrence*) : si P_x est un énoncé où x est un symbole libre, on a alors l'implication

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, [P_n \implies P_{s(n)}] \end{array} \right. \implies [\forall n \in \mathbf{N}, P_n].$$

Définition (les premiers entiers naturels). On note

$$\begin{aligned} 1 &:= s(0), \\ 2 &:= s(1) = s(s(0)), \\ 3 &:= s(2) = s(s(s(0))), \\ 4 &:= s(3) = s(s(s(s(0)))), \\ 5 &:= s(4) = s(s(s(s(s(0))))) \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite suivant la comptine "un, deux, trois, quatre, cinq..." qui nomme² dans l'ordre les "nombres usuels" (ceux qui résultent de l'itération d'une action donnée).

Interprétation de la récurrence : si un énoncé dépendant d'un entier naturel est vrai pour 0 et si sa vérité à un rang donné implique celle au rang d'après, alors cet énoncé est vrai pour tout les entiers.

Heuristique : si l'on pouvait expliciter la quantification sur \mathbf{N} , les hypothèses s'écriraient comme une conjonction infinie

$$P(0) \text{ et } P(0) \implies P(1) \text{ et } P(1) \implies P(2) \text{ et } P(2) \implies P(3) \text{ et } \dots$$

de sorte que l'on pourrait, à partir de $P(0)$, déduire de proche en proche $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$...³

1.2 Opérations engendrée par le successeur

Intuitivement, on $s(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; cette intuition permet en fait de *construire* l'addition par itération du successeur en posant pour tous entiers naturels a et b

$$a + b := \underbrace{s(s(s(\dots(s(a))))}_{b \text{ symboles } s} \underbrace{\dots)}_{b \text{ parenthèses}}$$

puis la multiplication par itération de l'addition en posant pour tous entiers naturels a et b

$$a \times b := 0 + \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ symboles } a}$$

puis l'exponentiation par itération de la multiplication en posant pour tous entiers naturels a et b

$$a^b := 1 \times \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{b \text{ symboles } a}$$

On admet l'existence de ces trois lois de composition interne ainsi que leur propriétés (cf. DM 5 optionnel pour montrer tout cela par récurrence) :

1. *L'addition est associative, commutative, régulière et admet 0 pour neutre ;*
2. *tout entier non nul est simplifiable par \times ; la multiplication est distributive sur l'addition, commutative, associative, intègre (un produit d'entiers non nuls est non nul) et admet 1 pour neutre ;*
3. *L'exponentiation est distributive sur la multiplication.*

²Les noms des entiers ne sont au fond que la donnée de symboles ordonnée dont on sait exactement *qui vient après l'autre* : la suite 1, 2, 3, 4, 5, ... fait consensus mais l'on pourrait en toute rigueur en choisir une autre.

³Évidemment, tout le problème de cette heuristique réside dans les points de suspension. La propriété de récurrence signifie EXACTEMENT que ce problème n'en est pas un, *i. e.* qu'au-delà des points de suspension tout entier naturel (élément de \mathbf{N}) est atteint par un "nombre usuel" résultant de l'itération de notre action. Elle assure ainsi que l'ensemble \mathbf{N} est un bon modèle des "entiers usuels".

1.3 Bon ordre

Définition (ordres \leq et $<$). On note pour tout entiers naturels a et b

$$a \leq b \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{\iff} (\exists n \in \mathbf{N}, b = a + n)$$

$$\text{et } a < b \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{\iff} \begin{cases} a \leq b \\ a \neq b \end{cases} .$$

La relation \leq est appelé **ordre usuel** et la relation $<$ **ordre strict**.

MN\u00c9MO : intuitivement, un entier a vient avant un entier b si la diff\u00e9rence⁴ $b - a$ est positive, *i. e.* est un entier naturel.

On admet que l'ordre usuel \leq est celui auquel nous sommes habitu\u00e9s avec toutes les propri\u00e9t\u00e9s qui en d\u00e9coulent. L'une d'entre elles m\u00e9rite d'\u00eatre mise en avant :

$$\forall (a, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*, a < n \iff a \leq n - 1.$$

Cette \u00e9quivalence est sp\u00e9cifique aux entiers (elle devient fautive pour les rationnels) et permet d'affiner une comparaison - elle est extr\u00eamement utile.

La propri\u00e9t\u00e9 de r\u00e9currence \u00e9quivaut \u00e0 ce que \mathbf{N} soit **bien ordonn\u00e9**, au sens suivant.

Th\u00e9or\u00e8me (fondamental). Toute partie non vide de \mathbf{N} admet un plus petit \u00e9l\u00e9ment.

On pourra donc parler sans probl\u00e8me du *plus petit entier* v\u00e9rifiant telle propri\u00e9t\u00e9 du moment que cette propri\u00e9t\u00e9 est satisfaite *par au moins* un entier.

Par exemple, le plus petit multiple de 18 sup\u00e9rieur \u00e0 1789 est 1800, le plus petit carr\u00e9 s'\u00e9crivant avec au moins quatre chiffres est $1024 = (2^5)^2$. En revanche, le plus petit nombre premier pair \u00e0 plus de deux chiffres n'existe pas car il n'y a aucun premier pair \u00e0 plus de deux chiffres (le seul premier pair est 2).

Exemple paradoxal. Les entiers d\u00e9finissables en fran\u00e7ais en moins de mille caract\u00e8res sont en nombre fini (les caract\u00e8res utilis\u00e9s en fran\u00e7ais sont en nombre fini : alphabet, ponctuation, espaces), donc il existe une infinit\u00e9 d'entiers non d\u00e9finissables en moins de mille caract\u00e8res. Appelons β le plus petit d'entre eux. Ce qui pr\u00e9c\u00e8de montre que, par d\u00e9finition, β est le plus petit entier non d\u00e9finissable en moins de mille caract\u00e8res. Or la phrase qui pr\u00e9c\u00e8de est une d\u00e9finition de β en moins de mille caract\u00e8res, ce qui est contradictoire.

Ce paradoxe (attribu\u00e9 \u00e0 BERRY) doit nous mettre en garde contre ce que l'on appelle une "propri\u00e9t\u00e9" (ici, c'est "\u00eatre d\u00e9finissable" qui pose probl\u00e8me). Pour s'en pr\u00e9munir,

*on r\u00e9servera le terme "propri\u00e9t\u00e9" ou "\u00e9nonc\u00e9" ou "assertion" ou "th\u00e8se"
 \u00e0 tout ce qui est formulable EN SYMBOLES MATH\u00c9MATIQUES exclusivement.*

1.4 Exemples de r\u00e9currences

Rudiments s\u00e9quentiels⁵. Intuitivement, une suite est la donn\u00e9e d'objets "à la suite", *i. e.* une liste ordonn\u00e9e d'objets (o_1, o_2, o_3, \dots) arbitrairement longue. Une **suite finie**, disons de longueur n \u00e0 valeurs complexes, n'est autre qu'un n -uplet (o_1, o_2, \dots, o_n) de complexes, lequel peut se voir \u00e9galement comme une application

$$\begin{cases} \{1, 2, \dots, n\} & \longrightarrow \mathbf{C} \\ i & \longmapsto o_i \end{cases} \quad (\text{on parle \u00e9galement de } \mathbf{famille complexe} \text{ index\u00e9e par } \{1, 2, \dots, n\}).$$

L'ensemble \mathbf{C}^n des suites finies complexes de longueur n s'identifie donc \u00e0 l'ensemble $\mathbf{C}^{\{1, 2, \dots, n\}}$ des familles complexes index\u00e9es par $\{1, 2, \dots, n\}$. Lorsque " n tend vers l'infini", les suites (o_1, o_2, \dots, o_n) de longueur n deviennent des suites (tout court) (o_1, o_2, o_3, \dots) et l'ensemble $\mathbf{C}^{\{1, 2, \dots, n\}}$ devient l'ensemble $\mathbf{C}^{\{1, 2, 3, \dots\}} = \mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ des familles complexes index\u00e9es par \mathbf{N}^* . C'est pourquoi, \u00e0 un d\u00e9calage d'indice pr\u00e8s, on d\u00e9finira une **suite complexe** comme \u00e9tant une famille complexe index\u00e9e par \mathbf{N} (ou parfois \mathbf{N}^*), *i. e.* comme \u00e9tant un \u00e9l\u00e9ment de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. \u00c9tant donn\u00e9e une suite $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, il est usuel de noter u_k l'image par u d'un entier k donn\u00e9 et d'\u00e9crire $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ou (u_n) au lieu de u (le symbole n \u00e9tant muet dans les deux cas), \u00e9tant sous-entendu dans l'\u00e9criture (u_n) l'ensemble d'indexation (ce sera presque toujours \mathbf{N} ou \mathbf{N}^*).

⁴De fait, lorsque $a \leq b$, un entier n comme dans la d\u00e9finition est unique et est not\u00e9 $b - a$ (c'est la **diff\u00e9rence** " b moins a ")

⁵rappelons que l'adjectif "s\u00e9quentiel" signifie "qui est relatif aux suites"

Il est courant de considérer des suites dont on connaît des premiers termes ainsi qu'une expression d'un terme donné en fonction des précédents. Une telle suite est dite **définie par récurrence** et le raisonnement par récurrence est un outil incontournable pour son étude.

Reformulons l'**axiome de récurrence** : si P_σ est un énoncé où σ est un symbole libre, on a alors l'implication

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, [P_n \implies P_{n+1}] \end{array} \right. \implies [\forall n \in \mathbf{N}, P_n].$$

Exemple 1 (suites constantes). Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n$. Montrer que $\exists C \in \mathbf{C}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = C$.

Posons $C := u_0$ (on n'a pas le choix pour la constante cherchée) et notons P_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'énoncé $u_n = C$. L'énoncé P_0 équivaut à $u_0 = C$, ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n . Alors $u_{n+1} \stackrel{\text{hypothèse}}{=} u_n \stackrel{P_n}{=} C$, d'où P_{n+1} .

Exemple 2 (une suite récurrente d'ordre 1). Soit $a \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $a_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = a_n^2 - a_n$. Montrer que $a_k > 2$ pour tout entier $k \geq 1$.

Pour tout entier $p \geq 0$, on note I_p l'énoncé $a_p > 2$.

On a $a_1 = a_0^2 - a_0 = 9 + 3 > 2$, d'où I_1 .

Soit $d \geq 1$ un entier tel que I_d . On a alors $a_{d+1} - 2 = a_d^2 - a_d - 2 = (a_d - 1)(a_d + 2)$ où chacun des facteurs est strictement positif d'après I_d , d'où l'on tire $a_{d+1} - 2 > 0$, i. e. I_{d+1} .

★ On initialise au *premier* rang pour lequel l'énoncé à montrer est vérifié (ou au-delà).

(Dans l'exemple 1, on a initialisé à 0 mais, dans l'exemple 2, on a initialisé à 1 (de fait I_0 était faux).)

Exemple 3 (série arithmétique). Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $1 + 2 + \dots + n$.

Heuristique : empilons une ligne de 1 case sur une ligne de 2 cases sur une ligne de 3 cases... sur une ligne de n cases, le tout étant justifié à gauche. On obtient la moitié d'un carré de n cases par n cases à une demi-diagonale près (formée de n demi-cases), ce qui permet d'intuiter $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}(n \times n) + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons cela par récurrence sur n .

Pour $p \in \mathbf{N}$, on note S_p l'énoncé $0 + 1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$.

L'énoncé S_0 équivaut à $0 = \frac{0(0+1)}{2}$, ce qui est vrai.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que S_{k-1} . On a alors

$$1 + 2 + \dots + k = 1 + 2 + \dots + k - 1 + 1 = \frac{(k-1)k}{2} + 1 \quad \text{d'après } S_{k-1},$$

d'où les équivalences

$$\begin{aligned} S_k &\iff 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \\ &\iff \frac{(k-1)k}{2} + 1 = \frac{k(k+1)}{2} \\ &\iff k^2 - k + 2 = k^2 + k \\ &\iff 2 = 2k \\ &\iff k = 1, \text{ ce qui presque toujours faux.} \end{aligned}$$

Il semble donc y avoir un problème.

En effet, nous avons joué sur l'ambiguïté de l'expression

$$1 + 2 + \dots + k - 1 + 1 \text{ qui peut désigner } \left\{ \begin{array}{l} \text{ou bien } \overbrace{1 + 2 + \dots + (k-1)}^{k-1 \text{ termes}} + 1 \\ \underbrace{(1 + 2 + \dots + k)}_{k \text{ termes}} - 1 + 1 \end{array} \right.$$

La parenthésage a donc son importance avec des \dots (même si l'addition est associative).

Reprenons la preuve après "Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que S_{k-1} ". On a alors

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k &= \overbrace{1 + 2 + \dots + (k-1)}^{k-1 \text{ termes}} + k \\ &= \frac{(k-1)k}{2} + k \quad \text{d'après } S_{k-1} \\ &= \frac{k^2 - k + 2k}{2} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}, \text{ d'où } S_k. \end{aligned}$$

Morale de l'histoire :

Quand on explicite une somme avec des \dots , toujours écrire clairement les premier, deuxième et dernier termes de la somme.

Il peut être parfois utile d'utiliser des hypothèses plus fortes, à savoir que la validité d'un énoncé à un rang donné découle de celles des énoncés aux *deux* rangs précédents, voire de celles des énoncés à *tous* les rangs précédents

Théorème (récurrence avec deux prédécesseurs). Soit P_x un énoncé où x est un symbole libre. On a alors l'implication

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \text{ et } P_1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, [(P_n \text{ et } P_{n+1}) \implies P_{n+2}] \end{array} \right\} \implies [\forall n \in \mathbf{N}, P_n].$$

Exemple 4 (une suite récurrente d'ordre 2). Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite complexe telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_0, u_1) = (2, 3) \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{array} \right. .$$

Montrer que $\forall p \in \mathbf{N}, u_p = 2^p + 1$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note E_n l'énoncé $u_n = 2^n + 1$.

Puisque $2^0 + 1 = 2 = u_0$ et que $2^1 + 1 = 3 = u_1$, on a E_0 et E_1 .

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que E_n et E_{n+1} . On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\stackrel{\text{hypothèse}}{=} 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\stackrel{E_n \text{ et } E_{n+1}}{=} 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) \\ &= 2^n(6 - 2) + 3 - 2 \\ &= 2^{n+2} + 1, \text{ d'où } E_{n+2}. \end{aligned}$$

Exemple 5 (suite de Fibonacci). Soit (F_n) une suite complexe telle que $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que $F_{p+2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^p$ pour tout naturel p .

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note C_k l'énoncé $F_{k+2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^k$.

On a $F_{0+2} = F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0$, d'où C_0 .

On a $F_{1+2} = F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^1$, d'où C_1 .

Soit $j \in \mathbf{N}^*$ tel que C_j et C_{j-1} . On a alors

$$\begin{aligned} F_{(j+1)+2} &= F_{j+3} \\ &= F_{j+1} + F_{j+2} \\ &= F_{(j-1)+2} + F_{(j)+2} \\ &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{j-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^j \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{j-1} \left(1 + \frac{3}{2}\right); \end{aligned}$$

pour conclure à C_{j+1} , il suffirait de montrer que le réel ci-dessus est plus grand que $(\frac{3}{2})^{j+1}$, énoncé qui est respectivement équivalent à

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{3}{2}\right)^{j+1} \iff \frac{5}{2} \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \iff 5 \cdot 2 \stackrel{?}{\geq} 3^2, \text{ ce qui est vrai.}$$

(On renvoie aux exercices pour d'autres choses à montrer sur la suite de Fibonacci.)

Théorème (récurrence "forte"). Soit P_Σ un énoncé où Σ est un symbole libre. On a alors l'implication

$$P_0 \quad [\forall n \in \mathbf{N}, (\forall k \in [0, n[, P_k) \implies P_n] \implies [\forall n \in \mathbf{N}, P_n].$$

Exemple 6. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$. Montrer que $u \leq 2^{\text{Id}}$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note D_n l'énoncé $u_n \leq 2^n$.

L'énoncé D_0 équivaut à $u_0 \leq 2^0$, i. e. à $1 \leq 1$, ce qui est vrai.

Soit $n \geq 0$ un entier tel que D_n . On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n+1} - 1 \\ &< 2^{n+1}, \text{ d'où } D_n. \end{aligned}$$

Exemple 7 (tricky). (non traité en cours) Soit une boîte de crayons en nombre fini. Montrons qu'ils ont tous la même couleur.

Lorsque la boîte ne contient qu'un seul crayon, il n'y a rien à faire. Dans le cas général, on considère dans la boîte deux sous-boîtes, l'une formée des crayons à l'exception du premier, l'autre constituée des crayons à l'exception du dernier. Par hypothèse de récurrence, les crayons de chacune des sous-boîte ont même couleur; puisque les deux sous-boîtes ont au moins un crayon en commun, tous les crayon de la boîte ont même couleur, ce qui conclut la récurrence.

On voit que le même genre d'argument permettrait de montrer que tous les entiers sont égaux en montrant que tous les éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ sont égaux par récurrence sur n . Écrivons cette dernière proprement pour voir où est l'arnaque.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note C_n l'énoncé $\forall E, (E \text{ possède }^6 n \text{ éléments}) \implies \forall (i, j) \in E^2, i = j$ (en français, C_n signifie qu'un ensemble à n éléments a tous ses éléments égaux).

Soit E un ensemble à 1 élément, mettons $E = \{e\}$. L'énoncé $\forall (i, j) \in E^2, i = j$ équivaut alors à $e = e$, ce qui est vrai.

Soit $n \geq 1$ un entier tel que C_n . Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments, mettons $E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Alors les parties $E' := \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ et $E'' := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ont chacune n éléments, donc C_n permet d'affirmer $\begin{cases} \forall (a, b) \in E'^2, a = b \\ \forall (r, s) \in E''^2, r = s \end{cases}$, i. e. $\begin{cases} \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, e_i = e_1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, e_j = e_1 \end{cases}$, d'où l'on tire $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, e_k = e_1$, ce qui montre $\forall (x, y) \in E^2, x = y$ et conclut à C_{n+1} .

Tout semble aller. Et pourtant... pour $n = 1$, les parties E et E' sont disjointes, donc ne peuvent avoir d'élément en commun, donc e_1 ne peut appartenir à E' et E'' à la fois. Où a-t-on péché? L'élément e_1 appartient bien à E'' puisqu'il est son "premier" élément mais est le "deuxième" élément de E' , élément qui n'existe pas si E' n'a qu'un seul élément, ce qui est précisément le cas lorsque $n = 1$.

Morale de l'histoire :

toujours bien préciser DANS QUEL ENSEMBLE appartiennent les objets que l'on invoque.

(surtout quand on suppose P_n pour montrer P_{n+1} : où invoque-t-on n ?)

⁶cette propriété peut s'écrire entièrement en symboles mathématiques en terme de *cardinaux*, comme nous allons le voir dans la section suivante

2 Dénombrément

2.1 Cardinal d'un ensemble fini

On fixe un ensemble E pour cette partie.

Dénombrer E , c'est étiqueter ses éléments à l'aide d'étiquettes de référence faites pour dénombrer, par exemple $1, 2, 3, \dots, n$ (où n sera le nombre d'éléments de E), ce qui revient à bijecter E avec un intervalle entier $\{1, \dots, n\}$.

Définition / proposition (admise⁷). *On dit que E est **fini** s'il existe un entier naturel n pour lequel E est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$. Un tel entier est alors unique, appelé **cardinal** de E et noté⁸ $\text{Card } E$. Dans le cas contraire, on dit que E est **infini**.*

Remarque. Lorsque E est fini, mettons de cardinal n , on peut écrire $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ où les objets e_1, \dots, e_n sont deux à deux distincts. Le cardinal correspond par conséquent bien au nombre d'éléments (et la cardinalité à la propriété de pouvoir être bijecté avec n'importe quel autre ensemble de même cardinal).

★ Si E s'écrit $\{e_1, \dots, e_n\}$ pour certains objets e_1, \dots, e_n (avec $n \geq 1$), alors E est fini mais on ne peut pas dire mieux que $1 \leq \text{Card } E \leq n$ (il se pourrait que certains e_i coïncident).

Remarque. L'intervalle entier $\{1, \dots, n\}$ s'écrit aussi $]0, n] \cap \mathbf{N}$; il est donc vide pour $n = 0$. L'ensemble vide est par conséquent de cardinal nul (et il est le seul) :

$$\text{Card } E = 0 \iff E = \emptyset.$$

Théorème (admis). *Deux ensembles finis ont même cardinal ssi⁹ il existe une bijection de l'un sur l'autre :*

$$\forall X, \forall Y, \text{Card } X = \text{Card } Y \iff (\exists \varphi : X \longrightarrow Y, \varphi \text{ bijective}).$$

Si l'on remplace "bijection" par "injection" ou "surjection", on peut encore dire des choses.

Proposition (cardinaux et applications) (admise). *Soient X et Y deux ensembles finis et f une application de X dans Y . Alors*

1. si f est injective, on a $\text{Card } X \leq \text{Card } Y$;
2. si f est surjective, on a $\text{Card } X \geq \text{Card } Y$.

(Intuitivement, quand on injecte X dans un ensemble, il faut que cet ensemble d'arrivée soit assez "gros" pour contenir une "copie" de X ; et, si l'on surjecte un ensemble vers Y , il faut que cet ensemble de départ soit assez "gros" pour atteindre chaque élément de Y .) [dessin]

Propriété (sous-ensemble fini) (admise). *Soit A une partie de E . Alors A est fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$ avec égalité ssi $A = E$.*

Intérêt : pour montrer une égalité ensembliste, on montre une inclusion et une égalité d'entiers (au lieu d'une autre inclusion ensembliste). Très utile pour vérifier si on a toutes les copies d'une classe.

Propriété (ordonner un ensemble fini d'entiers) (admise). *Soit A une partie finie de \mathbf{N} . Alors il existe une unique bijection (strictement) croissante de A sur $\{1, 2, \dots, \text{Card } A\}$.*

(Intuitivement, si φ est la bijection évoquée, alors $\varphi^{-1}(1)$ est le plus petit élément de A , $\varphi^{-1}(2)$ est le deuxième plus petit, etc.)

Propriété (bijectivité) (admise). *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application entre ensembles finis de même cardinal. Alors il est équivalent de dire que f est injective, surjective, ou bijective.*

Application (exercice). *Soit M un magma associatif régulier fini admettant un neutre. Montrer que M est un groupe.*

⁷ ce n'est pas la définition qui est admise, ce qui n'aurait aucun sens

⁸ on pourra trouver dans la littérature $|E|$ voire $\#E$

⁹ Ce théorème peut être pris comme une définition d'"avoir même cardinal" pour les ensembles infinis. Nous n'en parlerons pas dans ce cours. (Mnémono : $|X| = |Y| \iff X \overset{\sim}{\longrightarrow} Y$.)

Solution proposée. Il s'agit de montrer que tous les éléments de M sont inversibles. Notons 1 le neutre de M . Soit $m \in M$. Les applications $x \mapsto mx$ et $x \mapsto xm$ sont alors injectives (c'est dire que m est régulier), donc bijectives (par la propriété précédente), donc atteignent chacune 1 , mettons respectivement en un $\delta \in M$ et en un $\gamma \in M$, ce qui s'écrit $m\delta = 1 = \gamma m$. On a alors (comme dans le cours sur les l. c. i.) $\gamma = \gamma 1 = \gamma(m\delta) = (\gamma m)\delta = 1\delta = \delta$, ce qui montre que m est inversible d'inverse $\delta = \gamma$.

2.2 Cardinaux et opérations ensemblistes usuelles

Proposition (règles de la somme, du produit, de la puissance) (admise). Soient A et B deux ensembles finis. Alors les ensembles $A \cup B$, $A \times B$ et B^A sont finis et l'on a

$$\begin{aligned} \text{(si } A \text{ et } B \text{ sont disjoints)} \quad \text{Card}(A \amalg B) &= \text{Card } A + \text{Card } B \\ \text{Card}(A \times B) &= \text{Card } A \times \text{Card } B \\ \text{Card}(B^A) &= \text{Card } B^{\text{Card } A}. \end{aligned}$$

On retiendra donc que Card transforme

1. les unions disjointes¹⁰ \amalg en sommes¹¹ \sum ;
2. les produits cartésiens \amalg en produits¹² \prod .

Le premier point montre que, pour dénombrer un ensemble, on gagnera souvent à le partitionner en parties que l'on peut plus facilement dénombrer¹³.

Corollaire. Soient A , B et E trois ensembles finis.

$$\begin{aligned} \text{Si } A \subset E, \text{ on a } \text{Card } E \setminus A &= \text{Card } E - \text{Card } A. \\ \text{On a } \text{Card } A \cup B &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B) \\ \text{et } \text{Card } \mathfrak{P}(E) &= 2^{\text{Card } E}. \end{aligned}$$

Démonstration.

On partitionne $E = A \amalg (E \setminus A)$, d'où $\text{Card } E = \text{Card } A + \text{Card}(E \setminus A)$.

On partitionne $A \cup B = A \amalg [B \setminus (A \cap B)]$, d'où $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$.

Choisir une partie de E , c'est décider pour tout élément de E s'il appartient ou non à cette partie, ce qui fait 2 choix pour chacune des $\text{Card } E$ décisions indépendantes, d'où $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\text{Card } E \text{ facteurs}} = 2^{\text{Card } E}$ choix en tout. On

revoie aux T. G. pour une démonstration propre.

2.3 Coefficients binomiaux

Définition¹⁴. Soit E un ensemble et $p \geq 0$ un entier.

On appelle **combinaison** de E à p éléments toute partie de E à p éléments.

Proposition (admise). Soient n et p deux entiers naturels et E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre de permutations de E est $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Le nombre de parties de E à p éléments vaut¹⁵ $\binom{n}{p} := \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$ (anciennement noté C_n^p).

Conséquences. Soient n et p deux entiers naturels :

¹⁰ Expliquer en quoi les symboles \amalg et \prod sont "duaux" l'un de l'autre (ce que suggère leur notation) nous emmènerait dans les contrées des problèmes universels en théorie des catégories, ce qui est hors de propos dans ce cours.

¹¹ C'est pourquoi l'union disjointe est également notée \uplus dans d'autres textes (ce que nous ne ferons pas). Cette notation a l'avantage d'être cohérente avec la somme directe \oplus que l'on verra avec les espaces vectoriels.

¹² C'est l'avantage de noter $|E| := \text{Card } E$ pour tout ensemble E : on peut alors retenir $|A \times B| = |A| \times |B|$ et $|B^A| = |B|^{|A|}$.

¹³ Le français devrait pouvoir parler de parties "dénombrables" mais ce dernier adjectif a une acception bien précise (hors programme) : être en bijection avec \mathbf{N} .

¹⁴ le terme "combinaison" a certainement son histoire mais autant le remplacer directement par "partie" qui exactement signifie la même chose (en plus court)

¹⁵ nous aimerions suggérer la notation très commode $n^{\overbrace{p \text{ facteurs}}^p} := n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

1. le rationnel $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}$ est entier;
2. on a l'équivalence $\binom{n}{p} \neq 0 \iff 0 \leq p \leq n$;
3. on a les égalités $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
4. on a les égalités $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;
5. on a l'égalité $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Propriétés. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Si p et q sont deux entiers naturels de somme n , on a alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!q!} = \binom{n}{q}$.
2. Si $p \in \mathbf{N}$, on a $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$.
3. Si a et b sont des complexes, on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ce qui s'explique en

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Démonstration.

1. Montrons que $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$. Pour tout $k \in \{p, q\}$, notons \mathfrak{P}_k l'ensemble des parties de $E := \{1, 2, \dots, n\}$ à k éléments. La bijection $c : \begin{cases} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ A & \longmapsto & E \setminus A \end{cases}$ (de réciproque elle-même) envoie toute partie à p éléments sur une partie à $\text{Card } E - p = q$ éléments et, réciproquement, toute partie à q éléments est l'image (de son complémentaire) par c , ce qui montre que c induit une bijection $\begin{cases} \mathfrak{P}_p & \longrightarrow & \mathfrak{P}_q \\ A & \longmapsto & E \setminus A \end{cases}$, d'où l'égalité cherchée en prenant les cardinaux.

Montrons à présent $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!q!}$ par le calcul en complétant $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ jusqu'à obtenir $n!$. On a

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(q+1)}{p!} \frac{q(q-1)(q-2)\cdots 1}{q!} = \frac{n!}{p!q!};$$

cette dernière expression étant inchangée par transposition de p et q , le membre de gauche $\binom{n}{p}$ l'est également, ce qui redonne l'égalité $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$.

2. **(démonstration combinatoire)** Notons $E := \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et, pour tout k entier, \mathfrak{P}_k (resp. \mathfrak{P}_k^*) l'ensemble des parties à k éléments de E (resp. de $E \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots, n\}$). En répartissant les éléments de \mathfrak{P}_p selon qu'ils contiennent ou non l'élément $0 \in E$, on obtient une écriture de \mathfrak{P}_p comme union disjointe de \mathfrak{P}_p^* et de l'ensemble des parties de E à p éléments qui contiennent 0 :

$$\mathfrak{P}_p = \mathfrak{P}_p^* \amalg \{X \in \mathfrak{P}_p ; 0 \in X\}.$$

Or ce dernier ensemble est en bijection avec \mathfrak{P}_{p-1}^* en rajoutant/supprimant l'élément 0 , d'où l'égalité des cardinaux $\text{Card } \{X \in \mathfrak{P}_p ; 0 \in X\} = \text{Card } \mathfrak{P}_{p-1}^*$. On en déduit l'égalité $\text{Card } \mathfrak{P}_p = \text{Card } \mathfrak{P}_p^* + \text{Card } \mathfrak{P}_{p-1}^*$, ce qui s'écrit $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$, *c. q. f. d.*

(démonstration calculatoire) On peut également procéder par un calcul brutal en écrivant

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!(n-(p-1))!} \\ &= \frac{n!}{p! \times (n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!(n+1-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n+1-p)!} ((n+1-p) - p) \\ &= \frac{n!(n+1)}{p!(n+1-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{p!((n+1)-p)!} \\ &= \binom{n+1}{p}, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

3. Pour développer $(a + b)^n = \overbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}^{n \text{ facteurs}}$, on pioche dans chaque facteur $a + b$ un terme a ou b , on multiplie les n termes ainsi piochés et on somme tous les produits ainsi obtenus. Un tel produit a pour expression $a^p b^{n-p}$ où p désigne le nombre de termes a piochés (on a donc pioché autre chose pour les $n - p$ autres facteurs, à savoir $n - p$ termes b); or, à p fixé, piocher p termes a revient à choisir p facteurs $a + b$ (ceux où l'on piochera a) parmi les n facteurs de $(a + b)^n$, ce qui se fait en $\binom{n}{p}$ choix. En sommant sur tous les p possibles (entiers de 0 à n), on obtient la formule désirée. (cf. cours sur le calcul pour une démonstration par récurrence.)

Remarque (nominale). La troisième identité est dite "*du binôme de Newton*". C'est pourquoi les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

Remarque (symétrique). Vu que a et b commutent pour l'addition, on peut réécrire

$$(a + b)^n = (b + a)^n = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} b^q a^{n-q}.$$

Si l'on souhaite faire apparaître la symétrie entre a et b , on pourra écrire

$$(a + b)^n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0, q \geq 0}} \frac{n!}{p!q!} a^p b^q, \text{ ce qui s'écrit encore } \frac{(a + b)^n}{n!} = \sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0, q \geq 0}} \frac{a^p b^q}{p! q!}$$

Remarque (algorithmique). Les coefficients binomiaux peuvent se calculer récursivement à l'aide du deuxième point ci-dessus : on dessine un triangle en remplissant avec des 1 deux côtés issus d'un même sommet donné (ce sont les conditions initiales) et on remplit les lignes à l'aide de la relation du point 2 :

	0	0	1	0	0		
	0	0	1	1	0	0	
	0	0	1	2	1	0	0
	0	1	3	3	1	0	
	0	1	4	6	4	1	0
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Ce "tableau" est appelé *triangle de Pascal*. La présence des zéros découle du point 2 des conséquences ci-dessus.

Exemple. $(a + b)^4 = a^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + b^4$.

3 Calcul

Rappels de vocabulaire :

1. une *somme* est le résultat d'une *addition* ;
2. un *produit* est le résultat d'une *multiplication* ;
3. un *terme* est un objet qui apparaît dans une *somme* ;
4. un *facteur* est un objet qui apparaît dans un *produit* ;

Deux questions se posent naturellement lorsque l'on calcule dans \mathbf{C} : comment transformer

1. un produit (de sommes) en une somme (cela s'appelle *développer*).
2. une somme (de produits) en un produit (cela s'appelle *factoriser*).

Toute réponse (partielle) à l'une de ces questions en fournit une à l'autre. Nous nous concentrerons sur la première qui a l'avantage d'admettre une réponse algorithmique.

3.1 Développer

*Pour développer un produit de sommes,
on pioche dans chaque facteur-somme un terme,
on multiplie les termes ainsi piochés
puis on somme tous les produits ainsi obtenus.*

Sanity check. Compter le nombre de termes obtenus après développement.

Exemples. Soient a et b deux complexes.

1. On a

$$(a + b)^2 = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ commutent.}$$

Interprétation géométrique : [carré de côté $a + b$ divisé en quatre rectangles].

Sanity check : on a deux choix (a ou b) pour chacun des deux termes à piocher pour former un produit, d'où $2^2 = 4$ termes \rightarrow on vérifie que la somme des coefficients obtenus vaut $1 + 2 + 1 = 4$.

2. On a

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac. \end{aligned}$$

Interprétation géométrique : [carré de côté $a + b + c$ divisé en neuf rectangles].

Sanity check : on a trois choix (a , b ou c) pour chacun des deux termes à piocher pour former un produit, d'où $3^2 = 9$ termes \rightarrow on vérifie que la somme des coefficients obtenus vaut $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9$.

3. On a

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= aaaa + aaab + aaba + aabb + abaa + abab + abba + abbb \\ &\quad + baaa + baab + baba + babb + bbaa + bbab + bbba + bbbb \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (\text{on retrouve le binôme de Newton}). \end{aligned}$$

[pas de dessin en 4D] Sanity check : on a deux choix pour chacun des quatre termes à piocher, d'où $2^4 = 16$ termes \rightarrow or la somme des coefficients obtenus vaut $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

Remarque. Vérifier le nombre de termes revient à remplacer les symboles tous par 1. N'importe quelle autre substitution pourrait tout à fait être utilisée dans le même but.

3.2 Nécessité d'une notation concise : \sum et \prod

Soient p et q deux entiers naturels et $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ des complexes. On a le développement suivant :

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_p)(b_1 + b_2 + \dots + b_q) &= \begin{array}{l} a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \dots + a_1b_q \\ a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \dots + a_2b_q \\ \vdots \\ a_pb_1 + a_pb_2 + a_pb_3 + \dots + a_pb_q \end{array} \end{aligned}$$

On obtient la somme de tous les termes de la forme a_ib_j pour i et j décrivant respectivement $\{1, \dots, p\}$ et $\{1, \dots, q\}$: il y a pq tels termes.

Interprétation géométrique : [le rectangle ci-dessus découpé en pq rectangles d'aires respectives a_ib_j]

Si l'on multipliait par un troisième facteur-somme $c_1 + \dots + c_r$, il faudrait un pavé en 3D pour écrire le résultat (et des points de suspensions dans plein de directions différentes). On introduit une notation pour abréger tout cela.

Notation (signe de sommation \sum , signe de produit \prod). Soient f une application complexe définie sur un ensemble I fini et $P(x)$ un énoncé où x est un symbole libre. La somme, resp. produit, des complexes $f(i)$ pour i décrivant l'ensemble¹⁶ $\{a \in I ; P(a)\}$ est notée

$$\sum_{P(i)} f(i), \quad \text{resp. noté } \prod_{P(i)} f(i).$$

Cas particulier. Très souvent, $P(x)$ est l'appartenance à un segment entier, mettons " $P(x)$ est $x \in [a, b] \cap \mathbf{Z}$ ". On note alors

$$\sum_{i=a}^b f(i) \quad \text{ou} \quad \sum_{a \leq i \leq b} f(i) \quad \text{la somme} \quad \sum_{i \in [a, b] \cap \mathbf{Z}} f(i) \quad (\text{idem pour les produits}).$$

Exemples.

$$\sum_{18 \leq i \leq 42} \ln(i^3 + 1) = \ln(18^3 + 1) + \ln(19^3 + 1) + \ln(20^3 + 1) + \dots + \ln(40^3 + 1) + \ln(41^3 + 1) + \ln(42^3 + 1),$$

$$\prod_{i=3}^{108} \frac{i+1}{i} = \frac{3+1}{3} \frac{4+1}{4} \frac{5+1}{5} \dots \frac{106+1}{106} \frac{107+1}{107} \frac{108+1}{108}.$$

Vocabulaire (indice, implicite, explicite). Dans une somme $\sum_{P(i)} f(i)$ ou un produit $\prod_{P(i)} f(i)$, qualifiés d'*implicites*, le symbole i est souvent appelé *indice*.

★★★L'indice est un SYMBOLE MUET.★★★

Pour s'en convaincre, s'entraîner à décrire la somme en français *sans indice*. Par exemple, les sommes $\sum_{c=1}^{18} c^2$ et $\sum_{1 \leq g \leq 18} g^2$ désignent toutes deux la somme des 18 premiers carrés (et on n'a utilisé ni c ni g pour le dire). Par conséquent, on pourra réécrire indifféremment

$$\sum_{18 \leq i \leq 42} \ln(i^3 + 1) = \sum_{x=18}^{42} \ln(x^3 + 1) = \sum_{17 < \# < 43} \ln(\#^3 + 1)$$

et

$$\prod_{3 \leq i \leq 108} \frac{i+1}{i} = \prod_{\wp=3}^{108} \frac{\wp+1}{\wp} = \prod_{3 \leq Z < 109} \frac{Z+1}{Z}.$$

Expliciter une somme ou un produit, c'est l'écrire sans symbole muet.

Si le nombre de termes est trop grand, on conviendra d'utiliser des points de suspension \dots .

Pécaution & lisibilité. Lorsque l'on explicite une somme (resp. un produit) avec des \dots , toujours

écrire les *deux premiers* termes (resp. facteurs) ainsi que le *dernier* et savoir compter le *nombre de termes* (resp. facteurs).

Exemple. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{2n} k = 0 + 1 + 2 + \dots + 2n \\ 2 \sum_{q=0}^n k = 2(0 + 1 + 2 + \dots + n) \end{array} \right.$; la somme du haut comporte $2n + 1$ termes (incluant 0) et celle du bas (sans le 2) $n + 1$; puisque $2n + 1 \neq 2(n + 1)$, les sommes ci-dessus ne peuvent donc pas coïncider en général.

¹⁶appelé souvent *domaine de sommation* (pour une somme) et parfois *domaine de production* (pour un produit)

3.3 Réindexer (changer d'indice)

On peut indexer (et non indicer !) une somme implicite $\sum_{P(i)} f(i)$ de plusieurs manières. **Réindexer** une somme, c'est changer son indice.

Proprement, si $\varphi : J \longrightarrow I$ est une bijection (la fonction qui va réindexer), on a alors $\sum_{P(i)} f(i) = \sum_{P(\varphi(j))} f(\varphi(j))$. Voyons quelques exemples.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculons les nombres (dits **triangulaires**) $\sum_{k=1}^n k = \sum_{p=0}^n p$ de deux manières différentes.

1) Réindexation par complémentation. Notons $S := \sum_{k=0}^n k$. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n k \\ &= \sum_{\ell=0}^n (n - \ell) \quad \text{en remplaçant } \begin{cases} k \text{ par } n - \ell \\ \ell \text{ par } k - k \end{cases} \\ &\quad \text{(bien vérifier l'équivalence } \left\{ \begin{array}{l} \iff 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq n \end{array} \right. \\ &\quad \text{pour déterminer le nouveau domaine de sommation)} \\ &= \sum_{k=0}^n (n - k) \quad \text{en changeant d'indice muet} \\ &= \sum_{k=0}^n n - \sum_{k=0}^n k \quad \text{en réassociant les termes} \\ &= n \sum_{k=0}^n 1 - S \quad \text{en factorisant } n, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 2S = n \times \text{Card}([0, n] \cap \mathbf{Z}),$$

$$\text{i. e. } 2S = n(n + 1),$$

$$\text{i. e. } S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

À RETENIR : sommer des 1 revient à *dénombrer* le domaine de sommation (ici le segment entier $[0, n] \cap \mathbf{Z}$).

2) Réindexation par incrémentation/décrémentation. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{\ell=0}^n (\ell + 1)^2 \quad \text{en remplaçant } \begin{cases} k \text{ par } \ell + 1 \\ \ell \text{ par } k - 1 \end{cases} \\ &\quad \text{(bien vérifier l'équivalence } \left\{ \begin{array}{l} \iff 1 \leq k \leq n + 1 \\ 0 \leq \ell \leq n \end{array} \right. \\ &\quad \text{pour déterminer le nouveau domaine de sommation)} \\ &= \sum_{k=0}^n (k + 1)^2 \quad \text{en changeant d'indice muet} \\ &= \sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) + 2 \left(\sum_{k=0}^n k \right) + \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) \quad \text{en réassociant les termes} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^n k^2 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \quad \text{(les parenthèses autour des sommes seront toujours implicites),}$$

$$\text{i. e. } \left((n + 1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \right) - \left(0^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \right) = 2S + (n + 1),$$

$$\text{i. e. } (n + 1)^2 = 2S + (n + 1),$$

$$\text{i. e. } \frac{(n + 1)n}{2} = S.$$

Exercice. Trouver par la même méthode les sommes $\sum_{m=1}^n m^2$ et $\sum_{d=1}^n d^3$ (deux méthodes pour la somme des cubes).

On retiendra les résultats :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{et } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

3.4 Télescopier

Soit $N \in \mathbf{N}$. On a explicitement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{N \cdot (N-1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= 1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{=0} + \frac{1}{3} - \dots - \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N}}_{=0} - \frac{1}{N+1} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \quad (\text{on parle de somme } \mathbf{t\acute{e}lescopique}). \end{aligned}$$

Une fois compris ce qui se passe, la notation implicite permet d'éviter de réécrire trois fois la même transformation (mais il faut être soigneux au début) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \quad \text{en réassociant les termes} \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} - \sum_{m=2}^N \frac{1}{m} \quad \text{en réindexant la première somme et en} \\ & \quad \text{changeant d'indice muet dans la seconde} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \sum_{m=2}^{N-1} \frac{1}{m} \right) - \left(\frac{1}{N} + \sum_{m=2}^{N-1} \frac{1}{m} \right) \quad \text{pour faire apparaître la même somme} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Remarque. (non traitée en cours) On en déduit que la suite $(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2})$ est bornée : on a en effet (pour tout $n \in \mathbf{N}^*$)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times (k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Le cours sur les suites nous dira que cette suite croissante majorée tend vers quelque chose (et la culture nous dit que cette limite vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Le "télescopage" peut aussi avoir lieu avec des produits. Par exemple, on a explicitement

$$\frac{1 \cancel{2} \cancel{3}}{\cancel{2} \cancel{3} 4} \dots \frac{17 \cancel{18}}{\cancel{18} 19} = \frac{1}{19} \text{ en simplifiant.}$$

De manière implicite, on écrirait

$$\prod_{i=1}^{18} \frac{i}{i+1} = \frac{\prod_{i=1}^{18} i}{\prod_{i=1}^{18} (i+1)} = \frac{\prod_{i=1}^{18} i}{\prod_{j=2}^{19} j} = \frac{1 \prod_{i=2}^{18} i}{19 \prod_{j=2}^{18} j} = \frac{1}{19}.$$

Proposition (identités remarquables fondées sur un télescopage).

1. Soit $c \neq 1$ un complexe et $k \geq 0$ un entier. On a alors

$$1 + c + c^2 + \dots + c^k = \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c}.$$

(Intérêt : le nombre de termes ne dépend plus de k .)

2. Soient a et b deux complexes et $n \geq 0$ un entier. On a alors la factorisation

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a - b) \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ p \geq 0, q \geq 0}} a^p b^q. \end{aligned}$$

Démonstration.

1. On développe

$$\begin{aligned} (1 - c) \sum_{r=0}^k c^r &= \sum_{r=0}^k c^r - \sum_{r=0}^k c^{r+1} \\ &= \sum_{r=0}^k c^r - \sum_{s=1}^{k+1} c^s \\ &= 1 + \sum_{r=1}^k c^r - \left(c^{k+1} + \sum_{r=1}^k c^r \right) \\ &= 1 - c^{k+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant par $1 - c$ (on peut car $c \neq 1$).

2. Lorsque $a = 0$, l'identité voulue équivaut à $-b^n = (-b)(b^{n-1})$, ce qui est vrai.

Si non, on reprend le calcul précédent en remplaçant c par $\frac{b}{a}$ et k par $n - 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^r &= 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ d'où (en multipliant par } a^n) \\ (a - b) \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-1-r} b^r &= a^n - b^n, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Remarques. Contrairement à la première identité (qui n'est pas homogène en c), la seconde identité est homogène en (a, b) . Il sera donc pertinent d'introduire le rapport adimensionné $\frac{b}{a}$ et de lui substituer c .

Exemples.

1. On a pour tout entier $n \in \mathbf{N}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.$$

2. Si α dénote un complexe, on a

$$\begin{aligned} 1 + \alpha^3 &= 1 - (-\alpha)^3 \\ &= (1 - (-\alpha)) (1^2 + 1(-\alpha) + (-\alpha)^2) \\ &= (1 + \alpha) (1 - \alpha + \alpha^2). \end{aligned}$$

3.5 Quelques sommes "binomiales" classiques

Soient $n \in \mathbf{N}$ et E un ensemble de cardinal n .

Somme 1 (somme des coefficients binomiaux).

On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Sanity check : si $n = 4$, la somme vaut

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

Interprétation combinatoire : le left-hand side compte le nombre de parties de E (regroupées selon leur cardinal k), ce que l'on sait être 2^n .

Somme 2 (somme alternée des coefficients binomiaux).

On a $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = (1-1)^n = 0^n = \delta_0^n$.

Sanity check : si $n = 4$, la somme vaut

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 8 - 8 = 0.$$

Somme 3 (somme des coefficients binomiaux d'indice pair).

Calculons $S := \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}$ pair. Introduisons $T := \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}$ impair. Alors

$$S + T = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ et}$$

$$S - T = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_0^n,$$

d'où l'on tire $S = \frac{S+T}{2} + \frac{S-T}{2} = \frac{2^n + \delta_0^n}{2} = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

Sanity check : si $n = 7$, la somme vaut

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6} = 1 - \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} - 7 = 1 + 21 + 35 + 7 = 64 = 2^{7-1}.$$

Interprétation combinatoire : il y a dans E autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Somme 4 (somme alternée des coefficients binomiaux d'indice pair).

Calculons $\sigma := \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k}$. En observant que $(-1)^{\frac{k}{2}} = i^k$ pour tout entier k pair, on peut écrire σ comme la partie réelle de $\sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k}$ (les k impairs fournissent un terme $i^k \binom{n}{k} = i \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}$ de partie réelle nulle), *i. e.* de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} i^k = (1+i)^n = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

On en déduit $\sigma = \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4}$.

Sanity check : si $n = 7$, la somme vaut

$$\binom{7}{0} - \binom{7}{2} + \binom{7}{4} - \binom{7}{6} = 1 - \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} - 7 = 1 - 21 + 35 - 7 = 8$$

et on a par ailleurs $\sqrt{2}^7 \cos \frac{7\pi}{4} = \sqrt{2} \times (2^3)^2 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2^3 \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 8$.

Somme 5 (une somme pondérée de coefficients binomiaux).

Calculons la somme $A := \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ de deux façons différentes.

1. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \cancel{k} \frac{n!}{(k-1)! \cancel{k} (n-k)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!n}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n \\
 &= n \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} \quad \text{en remplaçant } k \text{ par } q+1 \\
 &= n2^{n-1} \quad \text{d'après le calcul de la somme 1 (en remplaçant } n \text{ par } n-1).
 \end{aligned}$$

2. On peut également se débarrasser du k devant $\binom{n}{k}$ (car c'est lui qui nous embête) en le faisant monter en exposant grâce à une dérivation. En effet, A est la valeur en 1 de la fonction (définie sur \mathbf{R}_+^*)

$$t \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k t^{k-1} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k = \frac{d}{dt} (1+t)^n = n(1+t)^{n-1},$$

ce qui redonne $A = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

Sanity check : si $n = 4$, la somme vaut

$$\begin{aligned}
 &0 \binom{4}{0} + 1 \binom{4}{1} + 2 \binom{4}{2} + 3 \binom{4}{3} + 4 \binom{4}{4} \\
 &= 0 + 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\
 &= 4 + 12 + 12 + 4 \\
 &= 32 \\
 &= 2^5 \\
 &= 4 \cdot 2^{4-1}.
 \end{aligned}$$

Somme 7 (une autre somme pondérée de coefficients binomiaux).

Calculons la somme $B := \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$. On va faire remonter le k^2 en exposant grâce à deux dérivations. On a pour tout $t > 0$ réel

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} t^k = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \right) = \frac{d^2}{dt^2} (1+t)^n = n(n-1)(1+t)^{n-2};$$

or le membre de gauche vaut $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} t^2 - \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} t^2$, d'où (après remplacement de t par 1) l'égalité

$$B = A + n(n-1)2^{n-2} = 2n2^{n-2} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Sanity check : si $n = 4$, la somme vaut

$$\begin{aligned}
 &0^2 \binom{4}{0} + 1^2 \binom{4}{1} + 2^2 \binom{4}{2} + 3^2 \binom{4}{3} + 4^2 \binom{4}{4} \\
 &= 0 + 4 + 4 \cdot 6 + 9 \cdot 4 + 16 \cdot 1 \\
 &= 4 + 24 + 36 + 16 \\
 &= 80 \\
 &= 4 \cdot 5 \cdot 4 \\
 &= 4(4+1)2^{4-2}.
 \end{aligned}$$

3.6 Associativité et retour au développement (section 3.1)

Soient $d \geq 1$ un entier, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_d$ des ensembles finis deux à deux disjoints et f une application complexe définie sur la réunion $\mathcal{D} := \bigcup_{\delta=1}^d \mathcal{D}_\delta = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_d$. Pour sommer les $f(i)$ sur tout le domaine \mathcal{D} , il suffit d'abord de les sommer sur chacun des \mathcal{D}_δ puis de sommer les sommes $\sum_{i \in \mathcal{D}_\delta} f(i)$ ainsi obtenues lorsque δ parcourt $\{1, 2, \dots, d\}$. Cela s'écrit implicitement sous la forme

$$\sum_{1 \leq \delta \leq d} \sum_{i \in \mathcal{D}_\delta} f(i) = \sum_{i \in \mathcal{D}} f(i).$$

Cette égalité n'est qu'une reformulation de l'associativité (et de la commutativité) de l'addition complexe. (Elle pourrait se montrer par récurrence sur le nombre d de sous-domaines.)

Corollaires (développement de sommes, produit de polynômes).

1. Soient p et q deux naturels et $A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_q$ des complexes. On a le développement suivant :

$$\sum_{i=1}^p A_i \sum_{j=1}^q B_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} A_i B_j.$$

★★★ L'égalité $\sum_{i=1}^p \left(A_i \sum_{j=1}^q B_j \right) = \left(\sum_{i=1}^p A_i \right) \left(\sum_{j=1}^q B_j \right)$ (factoriser $\sum_{j=1}^q B_j$) montre que

★ les parenthèses sont ici inutiles. ★

2. Soient n un naturel et c_1, \dots, c_n des complexes. On a le développement

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_i c_j \quad \begin{array}{l} \text{(dans la seconde somme, on} \\ \text{sous-entend } \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right\} \end{array}$$

3. Soient α et β deux naturels et $a_0, a_1, \dots, a_\alpha, b_0, b_1, \dots, b_\beta, \lambda$ des complexes. On a le développement :

$$\sum_{i=0}^{\alpha} a_i \lambda^i \sum_{j=0}^{\beta} b_j \lambda^j = \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \lambda^k.$$

Sanity check (du point 3). On a

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3) (\lambda - 7\lambda^2 - 3\lambda^3) &= \lambda(1) + \lambda^2(-7+2) + \lambda^3(-3-14-3) + \lambda^4(-6+21+1) + \lambda^5(9-7) + \lambda^6(-3) \\ &= \lambda - 5\lambda^2 - 13\lambda^3 + 16\lambda^4 + 2\lambda^5 - 3\lambda^6. \end{aligned}$$

Démonstration.

1. On partitionne [dessin]

$$\underbrace{\{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, q\}}_{=: \mathcal{D}} = \bigcup_{\delta=1}^q \underbrace{\{(i, \delta) ; 1 \leq i \leq p\}}_{=: \mathcal{D}_\delta} \text{ en segments horizontaux.}$$

En définissant $f(i, j) := A_i B_j$ pour tout couple $(i, j) \in \mathcal{D}$, il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} A_i B_j &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} f(i, j) = \sum_{1 \leq \delta \leq q} \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}_\delta} f(i, j) = \sum_{\delta=1}^q \sum_{i=1}^p f(i, \delta) \\ &= \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p A_i B_j \quad \text{en changeant d'indice muet} \\ &= \sum_{j=1}^q \left(\sum_{i=1}^p A_i \right) B_j \quad \text{en factorisant } B_j \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq p} A_i \right) \sum_{1 \leq j \leq q} B_j \quad \text{en factorisant } \sum_{1 \leq i \leq p} A_i, \text{ c. q. f. d..} \end{aligned}$$

2. On applique le point 1 en remplaçant (p, q) par (n, n) puis les (A_i, B_i) par (a_i, a_i) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: il vient

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2 &= \sum_{i,j} c_i c_j \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 + \sum_{i < j} c_i c_j + \sum_{i > j} c_i c_j \text{ en réassociant les termes selon que } \begin{cases} i = j \\ i < j \\ i > j \end{cases} ; \end{aligned}$$

or on a $\sum_{i > j} c_i c_j = \sum_{x > y} c_x c_y = \sum_{y < x} c_y c_x = \sum_{i < j} c_i c_j$, ce qui montre l'égalité des deuxième et troisième sommes ci-dessus, d'où la formule souhaitée.

3. On applique le point 1 en remplaçant (p, q) par (α, β) puis les (A_i, B_j) par (a_{i-1}, b_{j-1}) pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, \alpha\} \times \{1, 2, \dots, \beta\}$: il vient

$$\sum_{i=0}^{\alpha} a_i \lambda^i \sum_{j=0}^{\beta} b_j \lambda^j = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} a_i b_j \lambda^{i+j} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq \alpha \\ 0 \leq j \leq \beta}} a_i b_j \lambda^{i+j}.$$

Afin de regrouper les termes de même puissance $(i+j)$, on va partitionner le domaine de sommation selon des droites de pentes -1 . Avant cela, posons $\begin{cases} a_x := 0 \text{ pour } x > \alpha \\ b_y := 0 \text{ pour } y > \beta \end{cases}$ de sorte à avoir $\sum_{\substack{0 \leq i \leq \alpha \\ 0 \leq j \leq \beta}} a_i b_j \lambda^{i+j} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} a_i b_j \lambda^{i+j}$ où \mathcal{T} désigne le triangle $\{(i, j) \in \mathbf{N}^2 ; i+j \leq p+q\}$. [dessin] En partitionnant $\mathcal{T} = \bigcup_{k=0}^{p+q} \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 ; i+j = k\}$ comme annoncé, on obtient

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} a_i b_j \lambda^{i+j} = \sum_{k=0}^{p+q} \sum_{i+j=k} a_i b_j \lambda^{\overbrace{i+j}^{=k}} = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \lambda^k, \text{ c. q. f. d.}$$

Application (comparaison de Cauchy-Schwarz). Soient n un naturel et $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ des réels. On a alors la comparaison

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \sum_{p=1}^n u_p^2 \sum_{q=1}^n v_q^2.$$

Démonstration. On a d'une part

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (u_i v_i)^2 + \sum_{i < j} 2u_i v_i u_j v_j,$$

d'autre part (en réécrivant en double les termes croisés)

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{j=1}^n v_j^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} u_i^2 v_j^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 v_i^2 + \sum_{i < j} (u_i^2 v_j^2 + u_j^2 v_i^2).$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{j=1}^n v_j^2 &\iff \sum_{i < j} 2u_i v_i u_j v_j \leq \sum_{i < j} (u_i^2 v_j^2 + u_j^2 v_i^2) \\ &\iff 0 \leq \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i)^2, \text{ ce qui est vrai.} \end{aligned}$$