Courbes paramétrées

lundi 7, mardi 8, mercredi 9 janvier 2013

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Introduction

Intuitivement, une courbe[1] est ce que l'on peut tracer sans lever le crayon : segment, cercle, ellipse, droite (prolongement infini du segment), parabole, graphe d'une fonction continue... Pour étudier une courbe, on peut chercher à la ***paramétrer***, *i. e.* à la réaliser comme l'image par une application $(p_1, ..., p_n) \mapsto \gamma(p_1, ..., p_n)$ où les p_i sont alors appelés des ***paramètres***. Souvent, on aime bien exprimer tous les paramètres en fonction d'un seul, le "temps", d'où un paramétrage $t \mapsto \gamma(p_1(t), ..., p_n(t))$ où le "temps" varie dans un intervalle de $\mathbf{R}$. Par exemple :

1. le graphe d'une application f peut être paramétré par l'abscisse $x \mapsto \binom{x}{f(x)}$;
2. le cercle unité peut-être paramétré par l'argument $\theta \mapsto e^{i\theta} = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$;
3. la branche d'hyperbole d'équation $\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = 1 \\ x > 0 \end{array} \right.$ peut être paramétrée par sinus et cosinus hyperboliques $\psi \mapsto \binom{\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\psi}$;
4. le cercle unité privé de -1 peut être paramétré par la tangente de l'arc moitié $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

Dans le plan $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, deux systèmes de paramètres sont naturels[2] : $\binom{\text{abscisse}}{\text{ordonnée}}$ et $\binom{\text{module}}{\text{argument}}$. Le programme se restreint au premier (dit paramétrage ***cartésien***[3]), ce qui nous amène à étudier les applications de la forme $t \mapsto \binom{x(t)}{y(t)}$ où x et y sont deux applications continues à valeurs réelles.

1.2 Rappels de dérivabilité

On fixe pour cette partie un intervalle I infini.
Si φ est une fonction réelle définie sur I, on suppose connu le sens de "*φ est **continue**[4] sur I*".

Définitions.

[1] Rappelons que les lettres c/C et γ/Γ viennent dans le même ordre alphabétique. On utilisera souvent les majuscules C et Γ pour désigner des courbes et les minuscules c et γ pour dénoter des paramétrages de ces courbes.
[2] dans l'espace, on aurait de même trois paramétrages naturels : par les coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques
[3] le second est dit ***polaire***
[4] sera défini proprement plus tard dans l'année

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbf{C}$.

On dit que f est ***de classe*** *C^n sur I si la fonction $f^{(n)}$ est définie sur tout I et y est continue.*

On dit que f est ***de classe*** *C^∞ sur I si f est de classe C^k sur I pour tout entier $k \geq 0$.*

On dit que γ est ***de classe*** *C^n (resp. C^∞) sur I si les applications* $\mathrm{Re} \circ \gamma$ *et* $\mathrm{Im} \circ \gamma$ *sont de classe C^n* (resp. C^∞) sur *I.*

Remarque. On pourra omettre (par abus de langage) de dire "de classe" devant "C^n" ou "C^∞". Par exemple, les fonctions C^0 (sur I) sont les fonctions continues (sur I) et les fonctions C^∞ (sur I) sont les fonctions infiniment dérivables (sur I).

Exemples.

L'application $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \binom{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array} \right.$ est C^∞ car les applications $\mathrm{Re} \circ \gamma = \cos$ et $\mathrm{Im} \circ \gamma = \sin$ sont C^∞ (sur $\mathbf{R}$). Idem en remplaçant (co)sinus circulaires par (co)sinus hyperboliques.

L'application $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & (t, |t|) \end{array} \right.$ est C^0 car les applications $\mathrm{Re} \circ \gamma = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Im} \circ \gamma = |\cdot|$ sont continues mais n'est pas C^1 car $\mathrm{Im} \circ \gamma$ n'est pas dérivable en 0.

Propriétés. Soient α et β deux applications de I vers $\mathbf{R}$ de classe C^1. On pose $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \binom{\alpha(t)}{\beta(t)} \end{array} \right.$.

1. *L'application γ est C^1 et on a*
$$\forall t \in I,\ \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}.$$
2. *Soit $\lambda : I \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1. Alors $\lambda\gamma$ est C^1 et on a*
$$[\lambda\gamma]' = \lambda'\gamma + \lambda\gamma'.$$
3. *Soit $c : I \longrightarrow R^2$ de classe C^1. Alors $\langle \gamma \mid c \rangle$ et $\det(\gamma, c)$ sont C^1 et on a*
$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \gamma \mid c \rangle' = \langle \gamma' \mid c \rangle + \langle \gamma \mid c' \rangle \\ \det(\gamma, c)' = \det(\gamma', c) + \det(\gamma, c') \end{array} \right. .$$
4. *L'application $|\gamma|$ est C^1 sur l'ensemble $\{t \in I \ ; \ \gamma(t) \neq 0\}$ des réels où γ ne s'annule pas et, sur cet ensemble, on a $|\gamma|' = \left\langle \gamma' \mid \frac{\gamma}{|\gamma|} \right\rangle$.*

Démonstration (point 4).

L'application $|\gamma| = \sqrt{|\gamma|^2} = \sqrt{\langle \gamma \mid \gamma \rangle}$ est dérivable là où $\langle \gamma \mid \gamma \rangle = |\gamma|^2$ ne s'annule pas, *i. e.* là où $\gamma \neq 0$. Sur cet ensemble, on a alors

$$\begin{array}{rcl} |\gamma|' & = & \sqrt{\langle \gamma \mid \gamma \rangle}' \\ & = & \dfrac{1}{2\sqrt{\langle \gamma \mid \gamma \rangle}} \times \langle \gamma \mid \gamma \rangle' \\ & = & \dfrac{\langle \gamma' \mid \gamma \rangle + \langle \gamma \mid \gamma' \rangle}{2\,|\gamma|} \\ & = & \dfrac{2\,\langle \gamma' \mid \gamma \rangle}{2\,|\gamma|} \\ & = & \left\langle \gamma' \mid \dfrac{\gamma}{|\gamma|} \right\rangle. \end{array}$$

MNÉMO (points 2 et 3). Si φ est bilinéaire (*e. g.* le produit réel-complexe, le produit scalaire, le déterminant), on a toujours $\varphi\binom{A}{B}' = \varphi\binom{A'}{B} + \varphi\binom{A}{B'}$ où A et B sont des applications dérivables (qui donnent sens aux quantités mises en jeu dans l'égalité précédentes).

Il est bon de comprendre l'heuristique suivante de l'égalité précédente. Fixons un réel $t \in I$ et un réel $\varepsilon \neq 0$ très petit en module : on s'intéresse au taux de variation $\frac{\varphi\binom{A(t+\varepsilon)}{B(t+\varepsilon)}-\varphi\binom{A(t)}{B(t)}}{\varepsilon}$. En approchant les applications A et B autour de t par leurs applications tangentes respectives, on obtient les approximations $\left\{\begin{array}{l} A(t+\varepsilon) \simeq A(t)+\varepsilon A'(t) \\ B(t+\varepsilon) \simeq B(t)+\varepsilon B'(t) \end{array}\right.$, d'où (en admettant que φ respecte $\simeq$) l'approximation

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix} A(t+\varepsilon) \\ B(t+\varepsilon) \end{pmatrix} &\simeq \varphi\begin{pmatrix} A(t)+\varepsilon A'(t) \\ B(t)+\varepsilon B'(t) \end{pmatrix} \\
&\overset{\varphi \text{ est bilinéaire}}{=} \varphi\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}+\varepsilon\varphi\begin{pmatrix} A'(t) \\ B(t) \end{pmatrix}+\varepsilon\varphi\begin{pmatrix} A(t) \\ B'(t) \end{pmatrix}+\varepsilon^2\varphi\begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c'est comme si on développait un produit $\times \begin{matrix} a+\varepsilon\alpha \\ b+\varepsilon\beta \end{matrix} = \times \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} + \varepsilon \times \begin{matrix} \alpha \\ b \end{matrix} + \varepsilon \times \begin{matrix} a \\ \beta \end{matrix} + \varepsilon^2 \times \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$) et le taux d'accroissement

$$\frac{\varphi\binom{A(t+\varepsilon)}{B(t+\varepsilon)}-\varphi\binom{A(t)}{B(t)}}{\varepsilon} \simeq \varphi\begin{pmatrix} A'(t) \\ B(t) \end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix} A(t) \\ B'(t) \end{pmatrix}+\underbrace{\varepsilon\varphi\begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix}}_{\longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0}.$$

Application. *Montrons pourquoi, dans une ellipse, les rayons issus d'un foyer se focalisent*[5] *dans l'autre foyer.*

Soit Γ une ellipse dont note F et G les foyers ainsi que respectivement a et b les demi-grand axe et demi-petit axe. En paramétrant Γ comme l'image de l'application $\gamma : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \twoheadrightarrow & \Gamma \\ t & \longmapsto & \binom{a\cos t}{b\sin t} \end{array}\right.$, dériver la caractérisation bifocale donne

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}2a \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(F\gamma(t)+G\gamma(t)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left|\overrightarrow{F\gamma(t)}\right|+\frac{\partial}{\partial t}\left|\overrightarrow{G\gamma(t)}\right| \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\overrightarrow{F\gamma(t)}}_{=\gamma(t)-F} \mid \underbrace{\frac{\overrightarrow{F\gamma(t)}}{F\gamma(t)}}_{=:u_t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\overrightarrow{G\gamma(t)}}_{=\gamma(t)-G} \mid \underbrace{\frac{\overrightarrow{G\gamma(t)}}{G\gamma(t)}}_{=:v_t} \right\rangle \\
&= \langle \gamma'(t) \mid u_t \rangle + \langle \gamma'(t) \mid v_t \rangle \\
&= \langle \gamma'(t) \mid u_t+v_t \rangle,
\end{aligned}$$

ce qui montre l'orthogonalité des vecteurs $\gamma'(t)$ et u_t+v_t ; or le premier dirige la tangente à Γ en $\gamma(t)$ et le second la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{F\gamma(t)G}$, donc cette orthogonalité s'exprime en disant que la bissectrice de l'angle $\widehat{F\gamma(t)G}$ est la normale à Γ en $\gamma(t)$, *c. q. f. d.*.

2 Courbes paramétrées

2.1 Définitions

Définition.

On appelle ***courbe paramétrée (plane)*** *ou* ***arc paramétré (plan)*** *toute application continue à valeurs dans le plan, de source un intervalle infini de* $\mathbf{R}$.

L'image d'une courbe paramétrée est appelée son ***support*** *ou sa* ***trajectoire***.

Remarque. Le support est un objet *géométrique* (la courbe) : elle *ne dépend pas* du paramétrage choisi, *a fortiori* de même pour toutes les notions *géométriques* associées – tangentes, asymptotes, courbure, vecteur normal...

[5] propriété vue dans le cours sur les coniques

Remarque. Une courbe paramétrée peut s'interpréter comme la donnée d'un point mobile se déplaçant continûment le long d'une courbe (la trajectoire de la courbe), *i. e.* d'une *cinématique* de la trajectoire. La cinématique *dépend* du paramétrage choisi. (Par exemple, les applications $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{it^2}$ paramètrent toutes deux le cercle unité mais la "vitesse" du second mobile croît indéfiniment tandis qu'elle reste constante pour le premier.)

Définitions. Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une courbe paramétrée et $a \in I$.

*Lorsqu'ils font sens, les vecteurs $\gamma'(a)$ et $\gamma''(a)$ sont appelés respectivement **vecteur vitesse** en a et **vecteur accélération** en a. La **vitesse** en a est (quand elle fait sens) la norme $|\gamma(a)|$ du vecteur vitesse en a.*

*Lorsque la vitesse en a (fait sens et) est nulle, on dit que a est un **point stationnaire** (ou **singulier** ou **critique**). Sinon, quand $|\gamma(a)|$ (fait sens et) est non nul, on dit que a est un **point régulier**.*

*Si a est un point régulier, la droite $\gamma(a) + \mathbf{R}\gamma'(a)$ est appelée la **tangente** en a.*

*Si $|\gamma(t)| \overset{t \to a}{\longrightarrow} \infty$, on dit que γ **a/possède une branche infinie** en a ; dans ce cas, si le vecteur unitaire $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ admet une limite en a, cette limite définit (au signe près) la **direction asymptotique** en a.*

*Soit D une droite d'équation $ux+vy+w = 0$. On dit que D est une **asymptote** en a si $ux(t)+vy(t)+w \overset{t \to a}{\longrightarrow} 0$.*

★ un point stationnaire/régulier n'est pas un point de la trajectoire, c'est un paramètre : il se pourrait très bien que deux points, l'un stationnaire l'autre régulier, aient même image ! (ce n'est donc pas une donnée géométrique mais cinématique)

De même, les notions "avoir une branche infinie en a", "direction asymptotique en a" et "asymptote en a" dépendent du paramètre a et donc du paramétrage choisi ; en vérité, elles dépendent *uniquement* du point $\gamma(a)$ de la trajectoire, ce qui montre que ce sont en fait des notions géométriques.

Propriété. Soit $\gamma : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \binom{u(t)}{v(t)} \end{cases}$ une courbe paramétrée possédant une branche infinie en un point a donné de I.

1. *Si $\frac{v}{u}$ admet une limite finie en a, mettons $\frac{v}{u} \overset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors γ a en a une direction asymptotique donnée par le vecteur $(1, \ell)$; de plus, si $v - \ell u$ admet une limite en a, mettons $v - \ell u \overset{a}{\longrightarrow} L$, alors la droite d'équation $y - \ell x = L$ est asymptote en a.*
2. *Si $\frac{v}{u}$ tend vers $\pm\infty$* en *a, alors γ a en a une direction asymptotique verticale (donnée par le vecteur $(0, 1)$) ; de plus, si u admet une limite en a, mettons $u \overset{a}{\longrightarrow} u_0$, alors la droite verticale d'abscisse x_0 est asymptote en a.*

MNÉMO Si $\frac{v}{u} \overset{a}{\longrightarrow} \ell$, on a $\frac{v}{u} \simeq \ell$ autour de a, donc $v \simeq \ell u$, *i. e.* γ est proche d'une droite de pente ℓ. Pour éclairer l'approximation $v \simeq \ell u$, on regarde la différence $v - \ell u$, ce qui donne une information supplémentaire (l'ordonnée à l'origine) qui était invisible (car négligeable) devant u et v.

2.2 Exemples

L'objectif (rarement explicité) est *in fine* de *tracer le support* d'une courbe paramétrée γ donnée. C'est donc bien l'objet géométrique $\operatorname{Im}\gamma$ (la "courbe") qui nous intéresse ultimement et non sa cinématique donnée par le paramétrage γ ni les applications coordonnées $\operatorname{Re}\circ\gamma$ et $\operatorname{Im}\circ\gamma$.

Méthode. (= "étude de fonctions généralisée")

1. Réduire l'intervalle d'étude à l'aide de *symétries* : regarder (pour $t \in I$) ce que devient $\gamma(t)$ si l'on remplace t par $t + T$, $-t$, $1 - t$, $\frac{1}{t}$...
2. Étudier le caractère éventuellement *monotone* ou *borné* des applications coordonnées ainsi que les *limites* en les points où γ n'est pas défini ; résumer le tout dans un tableau de variations.
3. Donner les éventuelles *tangentes* en les points d'abscisse ou ordonnée extrémale.
4. Donner les éventuelles *droites asymptotes* aux points en lesquels γ possède une branche infinie.
5. Tracer $\operatorname{Im}\gamma$ en fonction des informations récoltées aux points précédents.

Exemple 1. *Étudier* $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \binom{x(t):=\cos 3t}{y(t):=\sin 2t} \end{array} \right.$.

Les applications x et y sont 2π-périodiques, donc γ aussi. Pour t réel, on a $\gamma(-t) = \binom{x(t)}{-y(t)} = \operatorname{ref}_{\mathbf{R}} \gamma(t)$ et $\gamma(t+\pi) = \binom{-x(t)}{y(t)} = \operatorname{ref}_{i\mathbf{R}} \gamma(t)$. Grâce à ces trois symétries, on peut restreindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis symétriser la trajectoire obtenue par rapport à $\mathbf{R}$, ce qui donnera le support de γ restreint à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis symétriser ce dernier support par rapport à $i\mathbf{R}$, ce qui donnera le support de γ restreint à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, *i. e.* toute la trajectoire en vertu de la 2π-périodicité.

Le tableau de variation montre que x décroît de $x(0) = 1$ à $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ puis croît jusqu'à $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, tandis que y croît de $y(0) = 0$ à $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ puis décroît jusqu'à $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Il convient alors de récupérer $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (On observera que la trajectoire est incluse dans le carré $[-1,1]^2$ vu que x et y sont bornées par 1).

On a $\forall t \in \mathbf{R},\ \gamma'(t) = \binom{-3\sin 3t}{2\cos 2t}$. En particulier, on a $\gamma'(0) = \binom{0}{2}$, d'où une tangente verticale en 0 ; on a $\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \binom{\neq 0}{0}$, d'où une tangente horizontale en $\frac{\pi}{4}$; on a $\gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \binom{0}{\neq 0}$, d'où une tangente verticale en $\frac{\pi}{3}$; on a $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \binom{3}{-2}$, d'où une tangente de pente $-\frac{2}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$.

On peut alors tracer la courbe : [dessin].

Exemple 2. *Étudier* $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \delta & \longmapsto & \binom{a(\delta):=\delta-\sin\delta}{b(\delta):=1-\cos\delta} \end{array} \right.$.

Pour δ réel, on a $c(\delta+2\pi) = c(\delta) + \binom{2\delta}{0}$ et $c(-\delta) = \binom{-a(\delta)}{b(\delta)} = \operatorname{ref}_{i\mathbf{R}} c(\delta)$, donc on peut restreindre l'étude de c à $[0,\pi]$ (la trajectoire de c s'obtient à partir de celle sur $[0,\pi]$ en symétrisant cette dernière par rapport à $i\mathbf{R}$ puis en translatant la courbe obtenue horizontalement de $2\pi\mathbf{Z}$).

Pour $\delta \in [0,\pi]$, on a $a'(\delta) = 1 - \cos\delta \geq 0$, donc a croît, tout comme b, d'où le tableau de variations. [tableau]

On a $c'(\pi) = \binom{2}{0}$, d'où une tangente horizontale en π. On a $c'(0) = \binom{0}{0}$, donc 0 est un point stationnaire : pour déterminer une éventuelle tangente, on peut regarder la limite du vecteur tangent $\frac{c'(\delta)}{|c'(\delta)|}$ lorsque δ tend vers 0^+ (on a bien $|c'(\delta)| \neq 0$ pour $\delta \neq 0\ \ [2\pi]$) : pour $\delta \in]0,\pi]$, on a

$$|c'(\delta)|^2 = (1-\cos\delta)^2 + (\sin\delta)^2 = 1 - 2\cos\delta + \cos^2\delta + \sin^2\delta = 2(1-\cos\delta) = 4\sin^2\frac{\delta}{2},$$

donc $|c'(\delta)| = 2\sin\frac{\delta}{2}$ (le sinus est bien positif car $0 < \delta < \pi$), d'où

$$\begin{aligned} \frac{c'(\delta)}{|c'(\delta)|} &= \frac{(1-\cos\delta, \sin\delta)}{|c'(\delta)|} \\ &= \frac{\left(2\sin^2\frac{\delta}{2}, 2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}\right)}{2\sin\frac{\delta}{2}} \\ &= \left(\sin\frac{\delta}{2}, \cos\frac{\delta}{2}\right) \\ &\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} (0,1), \end{aligned}$$

ce qui montre que c admet une tangente verticale en 0.

On peut alors tracer la trajectoire : [dessin].

Culture. Cette courbe s'appelle une ***cycloïde*** et décrit le mouvement d'un point fixe d'un cercle roulant sans frottement sur une droite.

Exemple 3. *Étudier* $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \pi & \longmapsto & (\sigma(\pi), \rho(\pi)) := \left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}, \frac{4\pi}{\pi^2-1}\right) \end{array} \right.$.

L'application h est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{\pm 1\}$.

Pour $\pi \neq \pm 1$, on a $h(-\pi) = \binom{\sigma(\pi)}{-\rho(\pi)} = \operatorname{ref}_{\mathbf{R}} h(\pi)$ et

$$h\left(\frac{1}{\pi}\right) = \left(\frac{\frac{1}{\pi^2}+1}{\frac{1}{\pi^2}-1}, \frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{1}{\pi^2}-1}\right) = \left(\frac{1+\pi^2}{1-\pi^2}, \frac{4\pi}{1-\pi^2}\right) = (-\sigma(\pi), \rho(\pi)) = \operatorname{ref}_{i\mathbf{R}} h(\pi),$$

donc on peut restreindre l'étude de h sur $[0,1[$.

On a $\sigma = 1 + \frac{2}{\mathrm{Id}^2-1}$ qui décroît de $\sigma(0) = -1$ à $\lim_{1^-}\sigma = -\infty$ et on a $\rho = \frac{4}{\mathrm{Id}-\frac{1}{\mathrm{Id}}}$ qui décroît de $\rho(0) = 0$ à $\lim_{1^-}\rho = -\infty$. (On voit en particulier que h admet une branche infinie en 1^-.)

On a $\sigma' = \frac{-4\operatorname{Id}}{(1-\operatorname{Id}^2)^2}$ et $\rho' = 4\frac{1+\operatorname{Id}^2}{(1-\operatorname{Id}^2)^2}$. En particulier, on a $h'(0) = \binom{0}{-4}$, d'où une tangente verticale en 0. Puisque $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{4\operatorname{Id}}{1+\operatorname{Id}^2} \xrightarrow{1^-} \frac{4\cdot 1}{1+1^2} = 2$, la courbe h possède en 1^- une direction asymptotique donnée par le vecteur $\binom{1}{2}$. Par ailleurs, puisque

$$\rho - 2\sigma = 2\frac{2\operatorname{Id} - \left(1+\operatorname{Id}^2\right)}{1-\operatorname{Id}^2} = -2\frac{(1-\operatorname{Id})^2}{(1-\operatorname{Id})(1+\operatorname{Id})} = -2\frac{1-\operatorname{Id}}{1+\operatorname{Id}} \xrightarrow{1^-} 0,$$

on en déduit que la droite d'équation $\rho = 2\sigma$ est asymptote à h en 1^-.

On peut alors tracer la courbe : [dessin]. Elle ressemble beaucoup à l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre 0, axe focal $\mathbf{R}$, demi-axes focal 1 et non focal 2 (dont une équation est $\sigma^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 = 1$). Montrons ce fait de deux manières différentes.

1. D'une part, pour tout réel $\pi \neq 1$ on a

$$\begin{aligned}\sigma(\pi)^2 - \left(\frac{\rho(\pi)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\pi^2-1}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^4+2\pi^2+1-4\pi^2}{\left(\pi^2-1\right)^2} \\ &= \frac{\pi^4-2\pi^2+1}{\left(\pi^2-1\right)^2} \\ &= 1, \quad \textit{i. e. } h(\pi) \in \mathcal{H},\end{aligned}$$

ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} h \subset \mathcal{H}$; d'autre part, le tableau de variations de σ et ρ sur tout $\mathbf{R}\backslash\{\pm 1\}$ montre qu'aucun point de $\mathcal{H}$ n'est évité par h, d'où l'égalité voulue $\operatorname{Im} h = \mathcal{H}$.

2. Les expressions de σ et ρ doivent rappeler le paramétrage du cercle unité (épointé) par la tangente de l'arc moitié ; vus les signes en jeu, il serait pertinent de reparamétrer selon $\pi \leftarrow \operatorname{th} u$. Précisons cela.

   Soit $\pi \in\,]-1,1[$. Posons $u := \operatorname{argth} \pi$. On a alors $\pi = \operatorname{th} u$, d'où

$$\begin{aligned}\sigma(\pi) &= \frac{\operatorname{th}^2 u + 1}{\operatorname{th}^2 u - 1} = \frac{\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{ch}^2 u} = -\operatorname{ch} 2u \\ \text{et } \rho(\pi) &= \frac{4\operatorname{th}\pi}{\operatorname{th}^2 u - 1} = \frac{4\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{ch}^2 u} = -2\operatorname{sh} 2u.\end{aligned}$$

   Lorsque π décrit $]-1,1[$, le réel u décrit tout $\mathbf{R}$, donc le point $h(\pi) = -\binom{\operatorname{ch} 2u}{2\operatorname{sh} u}$ décrit toute la branche de $\mathcal{H}$ d'équation $\left\{\begin{array}{c}\sigma^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 = 1 \\ \sigma < 0\end{array}\right.$; en d'autres termes, cette dernière branche est l'image / la trajectoire de $h_{|]-1,1[}$. Vu que, par ailleurs, $h \circ \frac{1}{\operatorname{Id}} = -h$, on récupère l'autre branche de $\mathcal{H}$ comme étant l'image de $h_{|]\mathbf{R}\backslash[-1,1]\,[}$.