Coniques

mardi 11, mercredi 12, lundi 17, mardi 18, mercredi 19 décembre

Table des matières

1 Introduction aux ellipses (par section d'un cylindre) 1
1.1 Caractérisation par foyer et directrice . . . 1
1.2 Caractérisation par foyers et grand-axe . . . 2
1.3 Lien entre les deux caractérisations . . . 3
1.4 Équations (cartésienne, paramétrique, des tangentes) . . . 3

2 Sections planes d'un cône 5
2.1 Descriptions des coniques . . . 6
2.1.1 Cas dégénérés (lieu vide, singletons, réunions de deux droites, plans) . . . 6
2.1.2 Cylindre de rayon non nul, $\alpha \neq 0$ (ellipse) . . . 6
2.1.3 Cône avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha < \alpha_0$ (hypobole) . . . 6
2.1.4 Cône avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha = \alpha_0$ (parabole) . . . 7
2.1.5 Cône avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha_0 < \alpha$ (hyperbole) . . . 7
2.2 Résumé . . . 9
2.2.1 Coniques ususelles . . . 9
2.2.2 Coniques dégénérées . . . 10
2.3 Pourquoi parler de *foyer(s)* ? . . . 10

3 Polynômes quadratiques à deux indéterminées 10

1 Introduction aux ellipses (par section d'un cylindre)

Quelle est l'intersection $\mathcal{C}$ d'un cyclindre (creux, vertical, de rayon non nul) par un plan π faisant un angle α (non droit) avec l'horizontale ? [dessin]

Cette section ressemble à un cercle "étiré", il lui manque (du fait de cet étirement) quelque chose pour avoir la perfection du cercle : les anciens la nommèrent pour cela ***ellipse***.

1.1 Caractérisation par foyer et directrice

Insérons une sphère $\mathcal{S}$ tangente intérieurement au cylindre (le long d'un cercle) ainsi qu'au plan π en un point F (appelé un ***foyer***[1]). [dessin]

Le plan contenant le cercle tangent $\mathcal{S} \cap \pi$ (appelé plan équatorial de $\mathcal{S}$) rencontre le plan π selon une droite Δ (appelée une ***directrice***).

Remarque. Soit A un point extérieur à une sphère donnée et T le point de tangence d'une tangente à la sphère passant par A. Alors la distance AT ne dépend pas de la tangente choisie. [dessin]

Appliquons. Soit C un point de l'ellipse $\mathcal{C}$ et T le point du cercle tangent situé à la verticale de C. Alors

1. d'une part la droite (FC) est incluse dans un plan tangent à la sphère $\mathcal{S}$, donc (CF) est tangente à $\mathcal{S}$ en F ;

[1] La terminologie vient de ce que des sons émis d'un des deux foyers (on verra bientôt le second foyer) se focalisent sur l'autre, *cf.* section *Pourquoi parler de foyer(s) ?*.

2. d'autre part la droite (CT) est incluse dans le cylindre tangent à la sphère $\mathcal{S}$, donc (CT) est tangente à $\mathcal{S}$ en T ;

la remarque permet de conclure à l'égalité $CF = CT$. Par ailleurs, en notant H le projeté orthogonal de C sur la directrice Δ, on lit dans le triangle rectangle HCT l'égalité $\sin\alpha = \frac{CT}{CH}$, d'où l'on tire

$$FC = e\ d(\Delta, C)$$

où l'on a posé $e := \sin\alpha$, appelée l'***excentricité*** de l'ellipse (quand e croît, $\mathcal{C}$ s'allonge ; quand $e = 0$, $\mathcal{C}$ est un cercle (et la directrice Δ part "à l'infini") ; quand $e \to 1$, on tombe dans un cas dégénéré).

On vient de montrer que $\forall P \in \pi,\ FP = e\ d(\Delta, P)$, ce qui revient à avoir prouvé l'inclusion

$$\mathcal{C} \subset \{P \in \pi\ ;\ FP = e\ d(\Delta, P)\}.$$

On admettra l'inclusion réciproque.

Conclusion (caractérisation par foyer et directrice). *L'ellipse $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points du plan π dont la distance au foyer F vaut celle à la directrice Δ multipliée par l'excentricité e :*

$$\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ FC = e\ d(\Delta, C)\}.$$

1.2 Caractérisation par foyers et grand-axe

On aurait pu choisir une *autre* sphère $\mathcal{S}'$ tangente intérieurement au cylindre et tangente au plan π. En appelant F' le point de tangence avec π et Δ' la droite-intersection de π avec le plan équatorial de $\mathcal{S}'$, on montrerait *mutandis mutadis*[2] que $\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ F'C = e\ d(\Delta', C)\}$ (avec toujours $e = \sin\alpha$). Les deux foyers permettent cependant ensemble un autre description de $\mathcal{C}$. [dessin]

En notant a la demi-distance entre les plans équatoriaux de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, tout point $C \in \mathcal{C}$ vérifie

$$FC + F'C = TC + T'C \overset{C \in [TT']}{=} TT' = 2a.$$

On vient de montrer que $\forall P \in \pi,\ FP + F'P = 2a$, ce qui revient à avoir prouvé l'inclusion

$$\mathcal{C} \subset \{P \in \pi\ ;\ FP + F'P = 2a\}.$$

On admettra l'inclusion réciproque.

Conclusion (caractérisation bifocale[3]). *L'ellipse $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de π dont la somme des distances aux foyers F et F' vaut constamment $2a$:*

$$\mathcal{C} = \{P \in \pi\ ;\ FP + F'P = 2a\}.$$

On en déduit une construction "manuelle" d'une ellipse grâce à une ficelle[4] de longueur $2a$: [dessin] si l'on plante ses deux extrémités en chacun des foyers et si l'on tend la ficelle pour faire apparaîtré un triangle, alors le troisième sommet (autre que les foyers) décrira l'ellipse cherchée.

Définitions (axe focal, centre).
La droite (FF') reliant les deux foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$ est appelée son ***axe focal****.*
Le milieu du segment $[FF']$ reliant les deux foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$ est appelé son ***centre****.*

[2] *Mutatis mutandis* est une locution latine, signifiant littéralement : « ce qui devait être changé ayant été changé », et que l'on pourrait traduire de façon plus actuelle par : « Une fois effectués les changements nécessaires ». Cette locution indique donc au lecteur que l'on va procéder quant au fond à une analogie, à un rapprochement de deux situations similaires, desquelles on soustraira volontairement les dissemblances « devant être changées » pour qu'un réel rapprochement puisse avoir lieu.

[3] *bi* $\leftrightarrow$ 2, *focale* $\leftrightarrow$ foyer ; l'adjectif *bifocal* signifie donc "relatif à deux foyers"

[4] Cela fonctionne également avec une paire d'écouteurs.

1.3 Lien entre les deux caractérisations

Comment retrouver, dans la caractérisation bifocale, l'excentricité e et les directrices ?

Proposition (lien entre foyers, directrices, excentricité et demi-grand axe). (admise) [dessin]

1. *Les directrices Δ et Δ' et sont parallèles et orthogonales à l'axe focal (FF').*
2. *Le centre O de $\mathcal{C}$ en est un centre de symétrie et est équidistant des directrices.*
3. *En notant S et D les points d'intersection respectivement de $[OF) \cap C$ et de $[FF') \cap \Delta$, on a les égalités des longueurs* $\begin{cases} OF = ea \\ OS = a \\ OD = \frac{a}{e} \end{cases}$.

MNÉNO (métrique). a dénote une distance (appelée ***demi-grand axe*** de $\mathcal{C}$) tandis que e est un scalaire adimensionné compris entre 0 et 1.

1.4 Équations (cartésienne, paramétrique, des tangentes)

Proposition (& définitions).
Dans un repère orthonormé d'origine le centre O de $\mathcal{C}$ et d'axe des abscisses l'axe focal (FF'), un point $P \in \pi$ de coordonnées $\binom{x}{y}$ appartient à $\mathcal{C}$ ssi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{[dessin]}$$

*où $b := a\sqrt{1-e^2} = a\cos\alpha$ (appelé **demi-petit axe** de l'ellipse $\mathcal{C}$), ou encore ssi*

$$\exists \psi \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = a\cos\psi \\ y = b\sin\psi \end{cases}.$$

MNÉMO $\begin{cases} x, y, a, b \text{ sont des } \textit{distances} \\ e, \cos\psi, \sin\psi \text{ sont } \textit{adimensionés} \end{cases}$

Démonstration.
La proposition précédente montre que F a pour coordonnées cartésiennes $\binom{ea}{0}$ et que Δ a pour abscisse $\frac{a}{c}$. Fixons un point P dans π.
On a les équivalences

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C} &\iff FP = e\ d(\Delta, P) \\ &\iff FP^2 = e^2\ d(\Delta, P)^2 \\ &\iff (x - ea)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \\ &\iff (x - ea)^2 + y^2 = (ex - a)^2 \\ &\iff x^2 - 2eax + e^2a^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2 \\ &\iff \left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 = \left(1 - e^2\right)a^2 \\ &\iff \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2 \\ &\iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

La seconde caractérisation vient de l'équivalence

$$\forall u, v \in \mathbf{R},\ \left(u^2 + v^2 = 1\right) \iff \left(\exists \psi \in \mathbf{R},\ \binom{u}{v} = \binom{\cos\psi}{\sin\psi}\right)$$

spécialisée selon $\binom{u}{v} \leftarrow \binom{x/a}{y/b}$.

Remarque (focale). Pour placer les foyers connaissant le centre O ainsi que les demi-axes a et b, on utilise un troisième sommet [dessin] : par symétrie, on a $sF = sF'$, d'où $sF = \frac{Fs+F's}{2} = \frac{2a}{2} = a$. On retrouve ainsi l'expression de la ***demi-distance focale*** $OF = \sqrt{a^2 - b^2} = ea$ (parfois noté c).

Remarque (limite). Lorsque $e = 0$, *i. e.* quand $a = b$ (ou encore lorsque $\alpha = 0$), on retrouve l'équation du cercle de rayon a centré en O ainsi que le paramétrage $\psi \mapsto ae^{i\psi}$ de ce même cercle (les directrices n'ont alors plus de sens, rejetée "à l'infini").

Exemples. *Reconnaître les ellipses d'équations respectives $x^2 + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$, $x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 0$.*

Le mot d'ordre est COMPLÉTER LES CARRÉS.

La première équation se réécrit $\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(4y^2 - 4y + 1\right) = 3 + 1 + 1$, *i. e.* $(x-1)^2 + (2y-1)^2 = 5$, *i. e.* $\left(\frac{x'}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)^2 = 1$ où $\begin{cases} x' := x - 1 \\ y' := y - \frac{1}{2} \end{cases}$. On reconnaît une ellipse centrée en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ de demi-grand axe $a := \sqrt{5}$ et demi-petit axe $b := \frac{\sqrt{5}}{2}$. Son excentricité vaut $e := \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (On pourrait ainsi réaliser cette ellipse comme section d'un cylindre verticale par un plan faisant un angle $\arcsin e = \frac{\pi}{3}$ avec l'horizontale).

La deuxième équation se réécrit $2\left(x^2 + 2x + 1\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) = 2 + 9 - 2$, *i. e.* $2(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$, *i. e.* $\left(\frac{x'}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = 1$ où $\begin{cases} x' := x + 1 \\ y' := y - 3 \end{cases}$. On reconnaît une ellipse centrée en $(-1, 3)$ de demi-grand axe $a := 3$ et demi-petit axe $b := \frac{3}{\sqrt{2}}$ (attention, le grand axe est cette fois dans la direction de l'axe des ordonnées). Son excentricité vaut $e := \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (On pourrait ainsi réaliser cette ellipse comme section d'un cylindre verticale par un plan faisant un angle $\arcsin e = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale).

La troisième équation se réécrit $x^2 + (2y-1)^2 = 0$, ce qui équivaut à $\binom{x}{y} = \binom{0}{\frac{1}{2}}$. Il s'agit d'une ellipse dégénérée en un singleton (réduit à son centre).

Corollaire (de l'équation cartésienne).
Dans un plan donné, les ellipses sont exactement les images de cercles par une affinité.
Une équation de la tangente en un point $\binom{x_0}{y_0}$ donné est $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

MNÉMO : on "*dédouble*" dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ les inconnues $\binom{x^2 \leftarrow x_0 x}{y^2 \leftarrow y_0 y}$.

Démonstration. Considérons le paramétrage $\Gamma : \psi \mapsto \binom{a\cos\psi}{b\sin\psi}$.

Γ est la composée $\psi \xmapsto{\gamma} \binom{a\cos\psi}{a\cos\psi} \xmapsto{A} \binom{a\cos\psi}{b\cos\psi}$ où γ paramètre le cercle de rayon a centré en O et où A est l'affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{b}{a}$ (parallèlement à $i\mathbf{R}$), donc $\mathcal{C}$ est l'image d'un cercle par une affinité.

Considérons réciproquement un cercle et une affinité de rapport λ. On choisit un repère orthonormé dont l'axe des abscisses coïncide avec celui de l'affinité donnée et où le cercle donné est centré en $\binom{0}{1}$. On note alors a le rayon du cercle. Alors un point $\binom{a\cos\psi}{1+a\sin\psi}$ est envoyé par l'affinité donnée sur sur $\binom{a\cos\psi}{\lambda(1+a\sin\psi)} = \binom{0}{\lambda} + \binom{a\cos\psi}{\lambda a\sin\psi}$ qui décrit une ellipse de centre $\binom{0}{\lambda}$ et de demi-axes a et λa.

Le vecteur tangent en un point $\Gamma(\psi)$ est $\frac{\partial\Gamma(\psi)}{\partial\psi} = \binom{-a\sin\psi}{b\cos\psi}$, de sorte qu'un vecteur normal à C en un point $\Gamma(\psi_0)$ est $\binom{b\cos\psi_0}{a\sin\psi_0} = ab\binom{\frac{x_0}{a^2}}{\frac{y_0}{b^2}}$,. On en déduit qu'un point $P\binom{x}{y}$ appartient à la tangente à $\mathcal{C}$ en $\Gamma(\psi_0)$ ssi $\overrightarrow{\Gamma(\psi_0)P} \perp \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$, *i. e.* ssi $\binom{x-x_0}{y-y_0} \cdot \binom{\frac{x_0}{a^2}}{\frac{y_0}{b^2}} = 0$, *i. e.* ssi $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} \underbrace{-\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}_{-1} = 0$.

Application. *Montrer que le produit des distances des foyers d'une ellipse à une tangente quelconque est constamment égal au carré du demi petit-axe de l'ellipse.*

On paramétrise l'ellipse par $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a \geq b$. On sait alors que la tangente $\mathcal{T}$ en (x_0, y_0) est régie par l'équation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, que les coordonnées des foyers F et F' sont $\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ et que la distance d'un point $P(u,v)$ à une droite $\mathcal{D}$ d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ est donnée par $d(P,\mathcal{D})=\frac{|\alpha u+\beta v+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. On en déduit

$$\begin{aligned}
d(F,\mathcal{T})\times d(F',\mathcal{T}) &= \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}\frac{\left|-\frac{x_0}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}=\frac{\left|1-\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2\left(a^2-b^2\right)\right|}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2} \\
&= b^2\left|\frac{a^4-x_0^2\left(a^2-b^2\right)}{b^2x_0^2+a^2\left(\frac{a}{b}y_0\right)^2}\right|=b^2\frac{a^4-a^2x_0^2+b^2x_0^2}{b^2x_0^2+a^2\left(a^2-x_0^2\right)}=b^2,\ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

Conséquence (du fait que les ellipses soient les images de cercles par des affinités).
La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.
L'aire d'une ellipse vaut π fois le produit de ses demi-axes.

Démonstration.
Partons de l'observation suivante. [dessin : un point $d\in D$, son rotaté $\delta\in\Delta$ et son projeté orthogonal H sur Δ] Soient dans un plan deux droites D et Δ faisant un angle α non plat. On note O leur intersection. Alors la projection orthogonale sur Δ coïncide sur D avec la composée d'une rotation (de centre O et d'angle $\pm\alpha$) et d'une homothétie de rapport $\cos\alpha$ (centrée en 0) (en effet, on lit immédiatement $OH=(\cos\alpha)\,OD=(\cos\alpha)\,O\delta$; puisque H et δ sont par ailleurs du même côté de O, on en déduit $\overrightarrow{OH}=(\cos\alpha)\,\overrightarrow{O\delta}$, *c. q. f. d.*).

On déduit de cette observation plane le fait spatial suivant. [dessin] Soient dans l'espace deux plans P et Π faisant un angle α non plat. On note Δ leur droite-intersection. Alors la projection orthogonale sur Π coïncide sur P avec la composée d'une rotation (d'axe Δ et d'angle $\pm\alpha$) et d'une *affinité* orthogonale de rapport $\cos\alpha$ (et d'axe Δ).

Par conséquent, la projection orthogonale d'un cercle est l'image par une affinité de l'image d'un cercle par une rotation, *a fortiori* est l'image par une affinité d'un cercle, donc (par le corollaire précédent) une ellipse.

Quant à l'aire, d'une part une ellipse de demi-axes a et b est l'image du cercle de rayon a par une affinité orthogonale de rapport $\frac{b}{a}$, d'autre part une affinité orthogonale multiplie les aires (pas les distances !) par son rapport, ce qui permet d'affirmer que l'aire d'une ellipse de demi-axes a et b vaut $\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$, *c. q. f. d.*.

2 Sections planes d'un cône

Dans cette partie, on généralise ce qui précède en étudiant l'intersection plane d'un cône (éventuellement dégénéré en un cylindre).

Définition (conique). *Une* ***conique*** *est l'intersection d'un cône ou d'un cylindre*[5] *par un plan.*

Remarque. Rappelons les paramétrisations standard d'un cône usuel de sommet l'origine et d'axe celui des cotes : [dessin] $\begin{cases}\text{en sphériques : } \sin\varphi=\sin\varphi_0\\ \text{en cylindriques : } |z|=|r|\cot\varphi_0\\ \text{en cartésiennes : } z^2=\left(x^2+y^2\right)\cot^2\varphi_0\end{cases}$ .où φ_0 désigne l'angle fait entre la verticale (l'axe des cotes) et n'importe quelle directrice.

On fixera par la suite un tel cône, ce qui revient à se donner un angle $\varphi_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On notera $\alpha_0:=\frac{\pi}{2}-\varphi_0$ l'angle fait par n'importe quelle directrice avec l'horizontale (le plan de cote nulle). On notera de même π un plan de l'espace et α l'angle fait par π avec l'horizontale. Enfin, on notera $\mathcal{C}$ la conique intersection du cône ci-dessus avec le plan π.

[5] On peut voir un cylindre comme un cône dont le sommet a été rejeté "à l'infini" dans la direction de l'axe de symétrie du cylindre. [dessin]

2.1 Descriptions des coniques

2.1.1 Cas dégénérés (lieu vide, singletons, réunions de deux droites, plans)

$\varphi_0 = 0$: alors le cône se réduit à une droite, donc $\mathcal{C}$ est ou bien vide [dessin], ou bien une droite [dessin], ou bien un singleton [dessin].

(Ce cas correspond également à celui où le rayon du cylindre est nul.)

$\alpha_0 = 0$: alors le cône s'identifie au plan de cote nulle, donc $\mathcal{C}$ est ou bien vide [dessin], ou bien une droite [dessin], ou bien un plan [dessin].

cylindre dont l'axe est parallèle à π : alors $\mathcal{C}$ est ou bien vide [dessin], ou bien une droite (cas d'un plan tangent au cylindre) [dessin], ou bien la réunion de deux droites parallèles [dessin].

cône traversé par π en son sommet : alors $\mathcal{C}$ est ou bien un singleton (cas $\alpha < \alpha_0$) [dessin], ou bien un droite (cas $\alpha = \alpha_0$) [dessin], ou bien la réunion de deux droites sécantes (cas $\alpha > \alpha_0$) [dessin].

Résumé. *Les coniques dégénérées sont*[6] *:*

1. *le lieu vide ;*
2. *les singletons ;*
3. *les droites ;*
4. *les réunions de deux droites parallèles ;*
5. *les réunions de deux droites sécantes ;*
6. *les plans.*

2.1.2 Cylindre de rayon non nul, $\alpha \neq 0$ (ellipse)

[dessin] On obtient (*cf.* introduction) une ***ellipse*** caractérisée

1. par ses deux ***foyers*** F et F' et son ***demi-grand axe*** a *via* [dessin]
$$\forall C \in \pi,\ C \in \mathcal{C} \iff FC + F'C = 2a,$$
2. ou (si $\alpha \neq 0$) par un foyer F, une directrice Δ et son excentricité e *via* [dessin]
$$\forall C \in \pi,\ C \in \mathcal{C} \iff FC = e\ d(\Delta, C).$$

Le ***demi-petit axe*** de l'ellipse est défini par
$$b := a\sqrt{1-e^2} = a\cos\alpha.$$
Une équation cartésienne est alors
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

2.1.3 Cône avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha < \alpha_0$ (hypobole)

[dessin : Σ désigne le plan contenant le cercle tangent à la sphère an cône] Le même raisonnement qu'en introduction montre qu'un point $C \in \mathcal{C}$ vérifie
$$FC = CT = \frac{d(C,\Sigma)}{\cos\varphi_0} \overset{\text{si } \alpha\neq 0}{=} \frac{d(C,\Delta)\sin\alpha}{\sin\varphi_0},$$
d'où la description par foyer et directrice
$$\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ FC = e\ d(\Delta, C)\} \qquad \text{avec } e := \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$$
ainsi que la descrition bifocale [dessin]
$$\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ FC + F'C = 2a\}.$$
On obtient donc une ellipse (aussi parfois appelée ***hypobole***) d'excentricité $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} \in [0,1[$, le cas $e = 0$ correspondant au cas $\alpha = 0$ où $\mathcal{C}$ est un cercle.

[6] les points 3,4,5 ci-après peuvent se résumer en "*réunion de deux droites*"

2.1.4 Cône avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha = \alpha_0$ (parabole)

[dessin] Le même raisonnement qu'en introduction conduit à une description par foyer et directrice

$$\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ FC = d(\Delta, C)\}$$

où l'excentricité $e := \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$ vaut 1. On dit que la conique $\mathcal{C}$ est une ***parabole*** de ***foyer*** F et ***directrice*** Δ. Son ***paramètre*** est la distance entre foyer et directrice : $p := d(F, \Delta)$.

Remarque (limite et focale). L'autre sphère étant rejetée à l'infini, on peut voir une parabole comme une ellipse dont on a envoyé l'un des foyers à l'infini. C'est pourquoi une parabole n'admet ni centre ni description bifocale.

Équation cartésienne. [dessin] Prenons un repère orthogonal de Σ où $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et où Δ pour pour équation $x = -\frac{p}{2}$. Soit $P \in \Sigma$ dont on note (x, y) les coordonnées. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{C} &\iff FP^2 = d(\Delta, P)^2 \\
&\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\
&\iff x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + x + \frac{p^2}{4} \\
&\iff \boxed{y^2 = 2px} \\
&\iff \boxed{\tfrac{x}{p} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{y}{p}\right)^2} \quad \text{(penser à l'homogénéité pour ne faireapparaître que des grandeurs adimensionnées).}
\end{aligned}$$

Exemple. *Reconnaître la courbe d'équation* $y = x^2$. On commence par échanger x et y puis on lit $p = \frac{1}{2}$, d'où le [dessin]

Tangentes. La tangente à $\mathcal{C}$ en un point $\binom{x_0}{y_0} \in \mathcal{C}$ a pour équation $\boxed{y_0 y = p(x_0 + x)}$ (dédoubler $\begin{matrix} y^2 \leftarrow y_0 y \\ 2x \leftarrow x_0 + x \end{matrix}$).

2.1.5 Cône avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha_0 < \alpha$ (hyperbole)

[dessin] Le même raisonnement qu'en introduction conduit à une description bifocale de chacun des branches

$$\forall B \in \pi, \begin{cases} B \in \mathcal{B} \iff F'B - FB = 2a \\ B \in \mathcal{B}' \iff FB - F'B = 2a \end{cases},$$

d'où une caractérisation bifocale de la conique

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{C \in \pi\ ;\ |F'B - FB| = 2a\}.$$

On dit que $\mathcal{C}$ est une ***hyperbole*** de ***foyers*** F et F' et de ***demi-axe focal*** a ; les lieux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont ses ***branches***. La droite (FF') s'appelle l'***axe focal*** de l'hyperbole $\mathcal{C}$ et le milieu de $[FF']$ s'appelle son ***centre*** .

On a aussi une description par foyer et directrice

$$\mathcal{C} = \begin{matrix} \{C \in \pi\ ;\ FC = d(\Delta, C)\} \\ \{C \in \pi\ ;\ F'C = d(\Delta', C)\} \end{matrix}$$

où l'***excentricité*** $e := \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$ est strictement supérieure à 1. Les droites Δ et Δ' sont appelée ***directrices*** et sont respectivement associées aux foyers F et F'.

Tout comme pour les ellipses, on montre [dessin]

1. que les directrices sont parallèles et orthogonales à l'axe focal ;
2. que le centre de $\mathcal{C}$ en est un centre de symétrie et est équidistant des directrices ;

3. les égalités métriques $\begin{cases} OF = ea \\ OS = a \\ OD = \frac{a}{e} \end{cases}$.

On en déduit une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans un répère orthonormé d'origine le centre de $\mathcal{C}$ et dont l'axe des abscisses est l'axe focal de $\mathcal{C}$: étant donné un point $P \in \pi$, on a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathcal{C} & \iff & FP = e\ d(\Delta, P) \\ & \overset{cf.\text{ intro}}{\iff} & \left(1-e^2\right)x^2 + y^2 = \left(1-e^2\right)a^2 \\ & \iff & \left(e^2-1\right)x^2 - y^2 = \left(e^2-1\right)a^2 \\ & \iff & \dfrac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2 \quad \text{où } b := a\sqrt{e^2-1} \\ & \iff & \boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}. \end{array}$$

Tangentes. Comme pour les ellipses, la tangente à $\mathcal{C}$ en un point (x_0, y_0) admet une équation cartésienne de la forme $\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$ (dédoubler les coordonnées).

★ Contrairement à l'ellipse, les demi-axes a et b ne sont pas comparables en général, il se peut très bien que $a < b$ ou que $a > b$ selon les cas. (Si a dénote le demi-axe focal, alors on appellera b le ***demi-axe non focal***.)

★ Le demi-axe focal n'est pas toujours le truc en-dessous du x ; c'est cependant toujours le truc de la fraction carrée précédée d'un signe $+$ (si l'on a un $+1$ dans l'autre membre).

Asymptotes. Lorsque $|x|$ est grand, l'équation devient $\left|\frac{y}{x}\right|^2 = \frac{b^2}{a^2} - \underbrace{\left(\frac{b}{ax}\right)^2}_{\simeq 0} \simeq \frac{b^2}{a^2}$, *i. e.* $y \simeq \pm \frac{b}{a}x$, d'où *deux asymptotes* [dessin]. Le demi-angle entre ces asymptotes a pour cosinus $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{e}$, ce qui donne une *interprétation angulaire* de l'excentricité. Lorsque les asymptotes sont orthogonales (ce qui équivaut respectivement à $a = b$ ou à $e = \sqrt{2}$), on dit que l'hyperbole $\mathcal{C}$ est ***équilatère***[7].

Exemple. *Reconnaître le graphe de* $\frac{1}{\mathrm{Id}}$.

On réécrit l'équation $y = \frac{1}{x}$ sous la forme $xy = 1$, ou encore $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4$, *i. e.* $x'^2 - y'^2 = 1$ où $\begin{cases} x' := \frac{x+y}{2} \\ y' = \frac{x-y}{2} \end{cases}$. En admettant que le changement de variable précédent multiplie les distances par une même constante, on reconnaît alors une hyperbole équilatère dont les axes sont les première et seconde bissectrice du repère initial (ils ont en effet pour équations respectives $x' = 0$ et $y' = 0$), donc dont les asymptotes sont les axes du repère initial.

Foyers. Pour placer les foyers connaissant le centre et les demi-axes, on reporte la longueur $\sqrt{a^2+b^2}$ sur l'axe focal [dessin], ce qui permet de retrouver la ***demi-distance focale*** $OF = ea$ (parfois notée c).

Paramétrage.

1. Donnons une définition : *un* ***paramétrage*** *d'une partie A du plan est une surjection d'image A, l'ensemble source est alors appelé* ***espace des paramètres***. En d'autres termes, tout point de ce qui est paramétré sera l'image par le paramétrage considéré d'un truc appelé paramètre.

   Un bon paramétrage doit vérifier deux choses : que l'espace des paramètres soit plus "simple" que la partie paramétrée, que l'application paramétrant possède des propriétés "sympathiques".

2. Deux exemples archi-classiques : le cercle unité $\mathbf{U}$ peut se paramétrer *via* $\begin{cases} \mathbf{R} & \twoheadrightarrow & \mathbf{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{cases}$ ou *via* $\begin{cases} \mathbf{R} & \twoheadrightarrow & \mathbf{U} \\ \theta & \longmapsto & \binom{\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases}$ (c'est ce qu'on appelle son paramétrage ***transcendant***), le cercle unité privé de -1 peut se paramétrer par des quotients de polynômes *via* $\begin{cases} \mathbf{R} & \twoheadrightarrow & \mathbf{U}\setminus\{-1\} \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{cases}$ (c'est ce qu'on appelle son paramétrage ***rationnel***).

[7] *équi* $\leftrightarrow$ même, *latère* $\leftrightarrow$ côté ; donc *équitatère* signifie l'égalité des côtés $a = b$

3. Retournons à présent aux hyperboles.

Tout comme les fonction sin et cos, appelées respectivement sinus et cosinus circulaires, paramètrent le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ *via* $\psi \mapsto \binom{\cos\psi}{\sin\psi}$ [dessin], les fonctions ch et sh, appelées respectivement sinus et cosinus hyperboliques, paramètrent la branche d'hyperbole d'équation $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$ *via* $\psi \mapsto \binom{\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\psi}$ [dessin].

Démonstration. Notons $h : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \psi & \longmapsto & \binom{\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\psi} \end{cases}$. On veut montrer que $\mathcal{B} = \operatorname{Im} h$.

• Montrons que $\operatorname{Im} h \subset \mathcal{B}$. Soit $i \in \operatorname{Im} h$. Il s'écrit $i = h(\psi)$ pour un réel ψ. Pour montrer que le point $h(\psi)$ est sur la branche $\mathcal{B}$, il suffit de vérifier que ses coordonnées $(\operatorname{ch}\psi, \operatorname{sh}\psi)$ vérifient l'équation de $\mathcal{B}$ donnée, ce qui s'écrit $\begin{cases} (\operatorname{ch}\psi)^2 - (\operatorname{sh}\psi)^2 = 1 \\ \operatorname{ch}\psi > 0 \end{cases}$ et est bien vrai.

• Montrons que $\mathcal{B} \subset \operatorname{Im} h$. Soit B un point de $\mathcal{B}$. Ses coordonnées (x, y) vérifient donc l'équation $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$. Posons $a := \operatorname{ash} y$. Alors $x^2 = 1 + y^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 a = \operatorname{ch}^2 a$, d'où $x = \pm \operatorname{ch} a$; puisque $x > 0$, on peut conclure $x = +\operatorname{ch} a$. Finalement, $B = \binom{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} = h(a) \in \operatorname{Im} h$, *c. q. f. d.*.

À RETENIR (dans cette démonstration). Pour montrer une égalité ensembliste, on peut procéder par ***double inclusion***.

2.2 Résumé

2.2.1 Coniques ususelles

L'angle α de notre cône vérifie $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et le plan π le sectionnant ne passe pas par son sommet.

représentation 3D	[dessin]	[dessin]	[dessin]
nom de la conique	ellipse (ou hypobole)	parabole	hyperbole
excentricité $e = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$	$0 \leq e < 1$ $(\alpha < \alpha_0)$	$e = 1$ $(\alpha = \alpha_0)$	$e > 1$ $(\alpha > \alpha_0)$
équation cartésienne	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ (où $a > b > 0$)	$y^2 = 2px$ ou $\frac{x}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{p}\right)^2$ (où $p > 0$)	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ (où $a > 0$ et $b > 0$)
paramétrage	$\psi \mapsto \binom{a\cos\psi}{b\sin\psi}$	$t \mapsto p\binom{\frac{1}{2}t^2}{t}$	$\psi \mapsto \binom{a\operatorname{ch}\psi}{b\operatorname{sh}\psi}$
équation cartésienne de la tangente en $\binom{x_0}{y_0}$	$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$	$y_0 y = p(x_0 + x)$	$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$
représentation plane	[dessin] $b = a\sqrt{1 - e^2}$ $e = 0 \Longleftrightarrow a = b \Longleftrightarrow$ l'ellipse est un cercle	[dessin] $p = d(F, \Delta)$ (ellipse dont on a envoyé un foyer à l'infini)	[dessin] $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ demi-angle entre les asymptotes : $\operatorname{acs}\frac{1}{e}$
caractérisation bifocale	$FC + F'C = 2a$	$\emptyset$ (un seul foyer !)	$\lvert F'C - FC \rvert = 2a$
caractérisation par foyers et directrices	(si $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle) $C \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow FC = e\, d(\Delta, C)$		

2.2.2 Coniques dégénérées

$\mathcal{C}$	singleton	vide	droite	réunion de deux droites parallèles	réunion de deux droites sécantes	plan
type	ellipse	ellipse parabole	parabole	parabole	hyperbole	?
équation cartésienne	$x^2+y^2=0$	$x^2+y^2=-1$ $y^2=-1$	$y^2=0$	$y^2=1$	$y^2-(\lambda x)^2=0$	$0=0$
représentation plane	[dessin]	[dessin]	[dessin]	[dessin]	[dessin]	[dessin]
représentation spatiale	[cône]	[cône plat] ou [cylindre]	[cône] ou [cylindre]	[cylindre]	[cône]	[cône plat]

[cône] : côné usuel traversé par π en son sommet
[cylindre] : cylindre d'axe parallèle à π
[cône plat] : cône dégénéré en plan

2.3 Pourquoi parler de *foyer(s)* ?

[dessin] *Des rayons issus d'un foyer d'une ellipse se réfléchissent sur l'ellipse en direction de l'autre foyer.* En d'autres termes, la tangente en un point $C\in\mathcal{C}$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FCF'}$, ou encore la normale en un point $C\in\mathcal{C}$ bissecte l'angle $\widehat{FCF'}$.

Deux applications sont :

1. l'espionnage dans les stations de métro à Paris des conversations sur l'autre quai ;
2. l'audition dans certains théâtres grecs.

Lorsque l'on envoit le foyer F' à l'infini, on obtient une propriété analogue pour les paraboles [dessin] : *des rayons parallèles à l'axe de la parabole se réfléchissent sur cette dernière en direction de son foyer.* En d'autres termes, une source lumineuse située au foyer d'une parabole enverra (après réflexion sur cette dernière) un faisceau de rayons parallèles dans la direction de l'axe de la parabole (propriété utilisée pour les phares de voiture).

De même pour les hyperboles [dessin], ce qui permet de focaliser des rayons vers un *autre* foyer (principe utilisé dans les télescopes.)

3 Polynômes quadratiques à deux indéterminées

Les couples de réels annulant un polynôme de degré 1 forment généralement une droite (à l'instar des zéros de $Y-2X-1$). Lorsque l'on incrémente le degré, on obtient généralement une conique (à l'instar des zéros de X^2+Y^2-4 (un cercle) ou de $XY-1$ (une hyperbole)). Cette section va préciser ce fait qui explique pourquoi, d'un point de vue algébrique, les coniques sont les courbes les plus "simples" après les droites. Tout est dit dans le théorème suivant.

(Cette partie a pour cadre un plan noté π.)

Théorème (admis). *Considérons dans un repère orthonormé un lieu $\mathcal{L}$ d'équation cartésienne $ax^2+bxy+y^2+dx+ey+f=0$ où a,b,c,d,e,f sont six réels tels que a,b,c ne soient pas tous nuls*[8]*. On pose $\Delta := b^2-4ac$.*

- *Si $\Delta<0$, alors $\mathcal{L}$ est une ellipse (éventuellement dégénérée : singleton ou vide).*

[8] si $a=b=c=0$, alors l'équation donnée devient une équation *affine* qui code ou bien une droite, ou bien le lieu vide, ou bien tout le plan

• *Si $\Delta = 0$, alors $\mathcal{L}$ est une parabole (éventuellement dégénérée : réunion de deux droites parallèles ou vide).*
• *Si $\Delta > 0$, alors $\mathcal{L}$ est une hyperbole (éventuellement dégénérée : réunion de deux droites sécantes).*

MNÉMO 1 La position relative du discriminant Δ par rapport à 0 est la même que celle de l'excentricité e par rapport à 1, ainsi que celle de l'angle α par rapport à α_0) :

conique	ellipse (ou hypobole)	parabole	hyperbole
excentricité	$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
angle	$\alpha < \alpha_0$	$\alpha = \alpha_0$	$\alpha > \alpha_0$
discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$

MNÉMO 2 Lorsque $\Delta > 0$, le polynôme $aX^2 + bXY + Y^2 + dX + eY + f$ a toujours une racine (parallèle : un trinôme de discriminant > 0 a toujours une racine), ce qui est dire $\mathcal{L} \neq \emptyset$; or l'hyperbole est la seule conique qui n'est jamais vide (même dégénérée).

Exemples typiques à connaître.

• $\Delta < 0$: $\quad x^2 + y^2 = \begin{cases} 1 \longrightarrow \text{ellipse} \\ 0 \longrightarrow \text{singleton} \\ -1 \longrightarrow \text{vide} \end{cases}$

• $\Delta = 0$: $\quad y^2 = \begin{cases} x \longrightarrow \text{parabole} \\ 1 \longrightarrow \text{réunion de deux droites parallèles} \\ 0 \longrightarrow \text{droite (double)} \\ -1 \longrightarrow \text{vide} \end{cases}$

• $\Delta > 0$: $\quad x^2 - y^2 = \begin{cases} 1 \longrightarrow \text{hyperbole} \\ 0 \longrightarrow \text{réunion de deux droites sécantes} \end{cases}$

Conclusion. *Les coniques d'un plan π peuvent être vues indifféremment comme :*

1. *les intersections de π par un cône ou un cylindre ;*
2. *les parties de π dont une équation (cartésienne en repère orthonormé) est $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme de degré au plus 2 ;*
3. *les parties de π dont les points ont pour coordonnées (cartésiennes dans un repère orthonormé) les zéros d'un polynôme de degré au plus 2.*