Fonctions transcendantes

lundi 26, mardi 27, mercredi 28 novembre, lundi 3, mardi 4, mercredi 5, jeudi 6 décembre 2012

Table des matières

1 Introduction

Les deux opérations fondamentales de l'algèbre (addition et multiplication) engendrent toute une classe de fonctions d'arguments complexes, à l'instar de Id, $3\operatorname{Id}^2 - i\operatorname{Id} - 5$, $\operatorname{Id}^{18} - 1$, $\binom{a}{b} \mapsto \sqrt{2}a^3 - b^2 - \pi ab + e^{i\frac{\pi}{3}}a^{42}b^5$, $(u,v,w) \mapsto (\cos 1)\, uv^2w^3$, appelées ***fonctions polynomiales***. Sans l'addition, on obtient les ***fonctions monomiales***, comme $t \mapsto t^{18}$, $a \mapsto \sqrt{5}a$, ou $(\lambda,\mu) \mapsto 5\lambda^2\mu^{42}$). Un ***polynôme*** est ainsi une somme de ***monômes***.

Lorsque l'on s'amuse à mettre dans un polynôme des *arguments* en *exposant*, à l'instar de $x \mapsto 2^x$ ou $t \mapsto t^t$, l'exposant peut alors *dépasser tout degré fixé*, ce qui est une des acceptions de la *transcendance*. C'est pourquoi les fonctions rencontrées dans ce cours, toutes fondées sur l'exponentielle $c \mapsto e^c$, seront qualifiées de transcendantes.

Quelques rappels fonctionnels.

• Si P est une partie de $\mathbf{C}$, une application $P \xrightarrow{f} \mathbf{C}$ est dite paire si $\begin{cases} \forall p \in P,\ -p \in P \\ \forall t \in \mathbf{R},\ f(-t) = f(t) \end{cases}$.

• Si P est une partie de $\mathbf{C}$, une application $P \xrightarrow{f} \mathbf{C}$ est dite impaire si $\begin{cases} \forall p \in P,\ -p \in P \\ \forall t \in \mathbf{R},\ f(-t) = -f(t) \end{cases}$.

• Une injection $f : A \hookrightarrow B$ possède une réciproque $f^{-1} : \operatorname{Im} f \longrightarrow A$ telle que $\begin{cases} \forall a \in A,\ f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall b \in \operatorname{Im} f,\ f\left(f^{-1}(b)\right) = b \end{cases}$.

• Une application strictement monotone est injective et sa réciproque est monotone de même sens.

• Si f est une application strictement monotone dérivable, alors f^{-1} est dérivable en les points où f' ne s'annule pas et on a en un tel point $f^{-1}(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{-1}(t) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}.$$

2 Exponentielles, logarithmes, puissances, racines

2.1 Exponentielle complexe

Caractère transcendant de l'exponentielle.
Si l'exponentielle était un polynôme $a_n \operatorname{Id}^n + a_{n-1} \operatorname{Id}^{n-1} + \cdots + a_1 \operatorname{Id} + a_0$ (où les a_i sont des complexes avec $a_n \neq 0$) dériver donnerait $n a_n \operatorname{Id}^{n-1} + \cdots + a_1 = \exp' = \exp = a_n \operatorname{Id}^n + \cdots + a_0$, d'où en divisant par Id^n l'égalité $\frac{n a_n}{\operatorname{Id}} + \frac{(n-1)a_{n-1}}{\operatorname{Id}^2} + \cdots + \frac{2a_2}{\operatorname{Id}^{n-1}} + \frac{a_1}{\operatorname{Id}^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{\operatorname{Id}} + \cdots \frac{a_0}{\operatorname{Id}^n}$ et un passage à la limite en ∞ donnerait $0 = a_n$, ce qui est absurde (on a supposé $a_n \neq 0$).

Osons alors écrire l'exponentielle sous forme d'un polynôme "infini", mettons $\exp = a_0 + a_1 \operatorname{Id} + a_2 \operatorname{Id}^2 + \cdots$. On a envie d'écrire $\exp' = a_1 + 2a_2 \operatorname{Id} + 3a_3 \operatorname{Id}^2 + \cdots$ puis d'identifier les coefficients, d'où un système infini

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \\ 2a_2 = a_1 \\ 3a_3 = a_2 \\ \cdots \end{cases}. \text{ Puisque } a_0 = \exp 0 = 1, \text{ on obtient } \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \\ a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3.4} \\ \cdots \end{cases},$$

d'où $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \frac{1}{n!}$ (où $n! := 1 \times 2 \times \cdots \times n$ se lit "factorielle n" (attention à $0! = 1$)). Cette heuristique[1] motive la définition suivante.

Définition. *Soit c un complexe. On appelle **exponentielle** de c le complexe*

$$e^c := 1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3!} + \frac{c^4}{4!} + \cdots = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{c^n}{n!}.$$

*L'application **exponentielle** est l'application* $\exp : \begin{cases} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & e^a \end{cases}$.

Théorème (admis).
- *La définition précédente fait sens pour tout complexe c.*
- *L'exponentielle est un morphisme de $(\mathbf{C}, +)$ sur $(\mathbf{C}^*, \times)$, au sens où*

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbf{C},\ \forall b \in \mathbf{C}, \quad & e^{a+b} = e^a e^b, \\ \forall c \in \mathbf{C}, \quad & e^c \neq 0, \\ \forall \varepsilon \in \mathbf{C}^*,\ \exists \lambda \in \mathbf{C}, \quad & e^\lambda = \varepsilon. \end{aligned}$$

- *L'exponentielle est dérivable en tout complexe et*

$$\exp' = \exp .$$

MNÉMO (pour la dérivée). Pour $c \in \mathbf{C}$, on a envie d'écrire[2]

$$\begin{aligned} \exp' c &= \frac{\partial e^c}{\partial c} \\ &= \frac{\partial}{\partial c}\left(1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3!} + \frac{c^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= 0 + 1 + \frac{2c}{2} + \frac{3c^2}{3!} + \frac{4c^3}{4!} + \cdots \\ &= 1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \cdots \\ &= e^c. \end{aligned}$$

[1] Art de trouver, de découvrir, souvent opposé à un exposé doctrinal – bien que ces deux aspects soient complémentaires.
[2] Malgré son aspect convainquant, ce qui suit n'est pas une démonstration : il faudrait pour cela d'une part donner du sens à la somme infinie et d'autre part justifier que la dérivation est "infiniment" additive, ce qui ne sera pas fait dans ce cours.

Corollaire. *On a les identités*

$$\begin{array}{rl} & e^0 = 1, \\ \forall c \in \mathbf{C}, & e^{-c} = \dfrac{1}{e^c}, \\ \forall a \in \mathbf{C},\ \forall b \in \mathbf{C}, & e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}, \\ \forall c \in \mathbf{C}, & \overline{e^c} = e^{\overline{c}}, \\ \forall \theta \in \mathbf{R}, & \left|e^{i\theta}\right| = 1, \\ \forall c \in \mathbf{C},\ \forall k \in \mathbf{Z}, & (e^c)^k = e^{kc}, \\ \forall c \in \mathbf{C}, & |e^c| = e^{\operatorname{Re} c}. \end{array}$$

Démonstration.

• On spécialise l'égalité $\forall a \in \mathbf{C},\ \forall b \in \mathbf{C},\ e^{a+b} = e^a e^b$ selon $\left\{\begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ b \leftarrow 0 \end{array}\right.$, ce qui donne $e^{0+0} = e^0 e^0$, *i. e.* $e^0 = \left(e^0\right)^2$, *i. e.* $e^0 \in \{0, 1\}$; or l'exponentielle évite 0, donc il ne reste que $e^0 = 1$.

• Soit $c \in \mathbf{C}$. On spécialise l'égalité $e^{a+b} = e^a e^b$ selon $\left\{\begin{array}{l} a \leftarrow c \\ b \leftarrow -c \end{array}\right.$, ce qui donne $e^{c-c} = e^c e^{-c}$, *i. e.* $1 = e^c e^{-c}$, *i. e.* $e^{-c} = \frac{1}{e^c}$.

• Soient a et b dans $\mathbf{C}$. On a $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a e^{-b} \underset{\text{point}}{\overset{\text{deuxième}}{=}} e^a \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$.

• Soit $c \in \mathbf{C}$: on a

$$\begin{aligned} \overline{e^c} &= \overline{1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3!} + \frac{c^4}{4!} + \cdots} \\ &= \overline{1} + \overline{c} + \overline{\frac{c^2}{2}} + \overline{\frac{c^3}{3!}} + \overline{\frac{c^4}{4!}} + \cdots \quad \begin{array}{c}\text{(en admettant que le conjugué d'une somme "infinie"} \\ \text{soit la somme (infinie) des conjugués de ses termes)}\end{array} \\ &= 1 + \overline{c} + \frac{\overline{c}^2}{2} + \frac{\overline{c}^3}{3!} + \frac{\overline{c}^4}{4!} + \cdots \\ &= e^{\overline{c}}. \end{aligned}$$

• Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On a $\left|e^{i\theta}\right|^2 = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} e^{\overline{i\theta}} \overset{\theta \in \mathbf{R}}{=} e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1$.

• Soit de plus $k \in \mathbf{Z}$. Si k est positif, on a $(e^c)^k = \underbrace{e^c e^c \cdots e^c}_{k \text{ facteurs}} = e^{\overbrace{c + c + \cdots + c}^{k \text{ termes}}} = e^{kc}$; on en déduit lorsque k est négatif

$$(e^c)^k \overset{k \leq 0}{=} (e^c)^{-|k|} \underset{\text{point}}{\overset{\text{deuxième}}{=}} \frac{1}{(e^c)^{|k|}} \underset{\text{point}}{\overset{\text{troisième}}{=}} \frac{1}{e^{|k|c}} \underset{\text{point}}{\overset{\text{deuxième}}{=}} e^{-|k|c} \overset{k \leq 0}{=} e^{kc}.$$

• Soit $c \in \mathbf{C}$. Puisque $e^c = e^{\operatorname{Re} c + i \operatorname{Im} c} = e^{\operatorname{Re} c} e^{i \operatorname{Im} c}$, prendre le module donne $|e^c| = \left|\underbrace{e^{\operatorname{Re} c}}_{>0}\right| \underbrace{\left|e^{i \operatorname{Im} c}\right|}_{=1} = e^{\operatorname{Re} c}$.

2.2 Exponentielle & logarithmes réels

Soit a un réel. Vu la définition de $e^a = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{a^n}{n!}}_{\in \mathbf{R}}$ comme une limite de réels, il raisonnable de croire que e^a restera dans $\mathbf{R}$, ce que l'on admettra[3]. On peut alors affirmer que exp stabilise $\mathbf{R}$ (au sens où $\forall a \in \mathbf{R},\ \exp a \in \mathbf{R}$). Par ailleurs, puisque exp transforme sommes en produits, on peut écrire

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exp' a = e^a = e^{2\frac{a}{2}} = \left(e^{\frac{a}{2}}\right)^2 > 0,$$

[3]Lorsqu'une partie de $\mathbf{R}$ est stable par passage à la limite, on dira qu'elle est ***fermée***. On vient donc d'admettre que $\mathbf{R}$ est fermé.

ce qui montre que exp croît strictement sur $\mathbf{R}$. L'exponentielle induit donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur son image $\left]\lim_{-\infty}\exp, \lim_{\infty}\exp\right[$.

Définition. *On appelle **logarithme**[4] (**naturel** ou **népérien**[5]) la réciproque de* $\exp_{|\mathbf{R}}$. *On la note*[6]

$$\ln := \left[\exp_{|\mathbf{R}}\right]^{-1}.$$

Propriétés.
- *La fonction* $\ln$ *est un morphisme strictement croissant de* $\left(\mathbf{R}_+^*, \times\right)$ *sur* $(\mathbf{R}, +)$*, au sens où :*

$$\begin{aligned} & \ln : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \forall a > 0,\ \forall b > 0, \quad & a < b \Longrightarrow \ln a < \ln b, \\ \forall a > 0,\ \forall b > 0, \quad & \ln(ab) = \ln a + \ln b, \\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad & \exists \varepsilon > 0,\ \lambda = \ln \varepsilon. \end{aligned}$$

- *On a les identités*

$$\begin{aligned} & \ln 1 = 0, \\ \forall a > 0, \quad & \ln \frac{1}{a} = -\ln a, \\ \forall a > 0,\ \forall b > 0, \quad & \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \\ \forall a > 0,\ \forall k \in \mathbf{Z}, \quad & \ln a^k = k \ln a. \end{aligned}$$

Démonstration. Toutes ces propriétés découlent de celles de l'exponentielle.
- L'ensemble but de ln est l'ensemble source de la fonction $\exp_{|\mathbf{R}}$ dont elle est la réciproque, à savoir $\mathbf{R}$.
- L'ensemble de définition de ln est l'image $\left]\lim_{-\infty}\exp, \lim_{\infty}\exp\right[$ de $\exp_{|\mathbf{R}}$: montrons qu'elle vaut $\mathbf{R}_+^*$. En vertu de la définition de exp, on peut écrire $\forall a \geq 0,\ e^a = 1 + a + \underbrace{\frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots}_{\geq 0} \geq 1 + a$, ce qui montre que $\exp \geq \mathrm{Id} + 1$ sur $\mathbf{R}_+$, d'où en prenant la limite en ∞ l'égalité $\lim_\infty \exp = \infty$. Passant à l'inverse, on en déduit $0 = \lim_\infty \frac{1}{\exp} = \lim_\infty e^{-\mathrm{Id}} = \lim_{-\infty} e^{\mathrm{Id}}$.
- L'exponentielle croît strictement sur $\mathbf{R}$, donc sa réciproque ln également.
- Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab = e^{\ln(ab)}$, d'où (par injectivité de exp) $\ln a + \ln b = \ln ab$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons $\varepsilon := e^\lambda$. Alors $\ln \varepsilon = \ln(\exp \lambda) = \left[\ln \circ \exp_{|\mathbf{R}}\right](\lambda) = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(\lambda) = \lambda$.
- On a $\ln 1 = \ln e^0 = \ln(\exp(0)) = \mathrm{Id}(0) = 0$.
- Soit $a > 0$. On $e^{-\ln a} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a} = e^{\ln \frac{1}{a}}$, d'où (par injectivité de exp) $-\ln a = \ln \frac{1}{a}$.
- Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
- Soient $a > 0$ et $k \in \mathbf{Z}$. On a $e^{k \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^k = (a)^k = \left(a^k\right) = e^{\ln\left(a^k\right)}$, d'où (par injectivité de exp) $k \ln a = \ln a^k$.

Exercice. Simplifier pour $a > 0$ réel

$$\ln \frac{a^{42}}{(1+a)^{-18}} = \ln\left[a^{42}(1+a)^{18}\right] = \ln\left(a^{42}\right) + \ln\left((1+a)^{18}\right) = 42 \ln a + 18 \ln(a+1).$$

Définition.

[4] Du grec *logos* (rapport) et *arithmos* (nombre). Le *logarithme* désignait historiquement le rapport des vitesses parcourues par deux mobiles dont l'un avance à vitesse constante et l'autre à une vitesse proportionnelle à la vitesse lui restant à parcourir.

[5] du nom de son inventeur John Napier (francisé en Neper) qui publia ses recherches sur le logarithme en 1614 dans la *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*

[6] On trouvera la notation Log dans des ouvrages moins récents.

On appelle **base des logarithmes népériens** *le nombre*

$$e := \exp 1.$$

Soit $a > 0$ *différent de* 1. *On appelle* **logarithme de base** a *l'application*

$$\lg_a := \frac{\ln}{\ln a} =: \log_a .$$

Les applications $\lg_2$ *et* $\lg_{10}$ *s'appellent respectivement le* **logarithme binaire** *et le* **logarithme décimal**.

Remarques.
La dernière propriété ci-dessus spécialisée selon $a \leftarrow e$ s'écrit

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \ln e^k = k.$$

Il convient également de remarquer que le logarithme de base e est le logarithme naturel :

$$\lg_e = \ln .$$

Propriétés. Soit $a > 0$.
L'application $\lg_a$ *vérifie les mêmes propriétés que celle de* $\ln$ *énoncées ci-dessus (juste après la définition de* $\ln$*).*

On a de plus

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \lg_a a^k = k.$$

(pour une démonstration, diviser par a les identités connues[7] pour ln).

Exercice. Simplifier

$$\lg_5 4 - \lg_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} = \frac{\ln 4}{\ln 5} - \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln \frac{1}{5}} = \frac{\ln 4}{\ln 5} - \frac{-\ln 4}{-\ln 5} = \frac{\ln 4}{\ln 5} - \frac{\ln 4}{\ln 5} = 0.$$

Application. *Soit* $a \in \mathbf{N}$. *Exprimer le nombre de chiffres de* a *en fonction de* a.

Il convient de préciser la base où s'écrit a. Appelons-la b (c'est un entier supérieur ou égal à 2). On peut donc écrire

$$a = c_0 + c_1 b^1 + c_2 b^2 + \cdots + c_n b^n$$

où n désigne le nombre (plus 1) de chiffres de a en base b et où chaque c_i est un entier dans $[0, b[$ avec $c_n \neq 0$.

En majorant tous les chiffres par $b - 1$, on peut majorer

$$\begin{array}{rcl} a & \leq & (b-1) + (b-1)\,b + (b-1)\,b^2 + \cdots + (b-1)\,b^n \\ & = & (b-1)\left(1 + b + b^2 + \cdots + b^n\right) \\ & = & \begin{array}{l} b + b^2 + b^3 + \cdots + b^{n+1} \\ -1 - b - b^2 - \cdots - b^n \end{array} \\ & = & b^{n+1} - 1 \\ & < & b^{n+1}, \end{array}$$

d'où par stricte croissance des logarithmes $\lg_b a < n + 1$.

Par ailleurs, en minorant tous les chiffres par 0 (à l'exception de c_n que l'on minore par 1), on peut minorer

$$a \geq 0 + 0b + 0b^2 + \cdots + 0b^{n-1} + 1b^n = b^n,$$

d'où (par croissance de $\lg_b$) $\lg_b a \geq n$.

Finalement, on a obtenu l'encadrement $n \leq \lg_b a < n+1$, ce qui équivaut (par définition de la partie entière) à $n = \lfloor \lg_b a \rfloor$. On en conclut que le nombre de chiffres de a écrit en base b vaut

$$\lfloor \lg_b a \rfloor + 1.$$

[7]★ dans cette démonstration, on ne pourra pas réécrire ces identités en quantifiant sur a puisque ce dernier a été fixé avant la démonstration

2.3 Puissances & racines entières

Définition. *Soit $n \geq 1$ un entier et z un complexe. Une **racine n-ième** de z est un complexe r tel que $r^n = z$.*

On regarde dans cette partie le cas où le z de la définition ci-dessus est un *réel.*

Proposition / définition (racines) (admise). Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. *La fonction $\mathrm{Id}^{-n} := \frac{1}{\mathrm{Id}^n}$ est définie sur $\mathbf{R}^*$ et décroît strictement sur $\mathbf{R}_+^*$,*
   (a) *si n est pair, alors Id^{-n} est paire et croît sur $\mathbf{R}_-^*$;*
   (b) *si n est impair, alors Id^{-n} est impaire et décroît sur $\mathbf{R}_-^*$.*
2. *La fonction Id^n est définie sur tout $\mathbf{R}$;*
   (a) *si n est impair, alors Id^n est impaire et croît strictement sur tout $\mathbf{R}$; la réciproque de Id^n est notée $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & \sqrt[n]{a} \end{array} \right.$ et est appelée "**racine** n**-ième**" ;*
   (b) *si n est pair, alors Id^n est paire, décroît strictement sur $\mathbf{R}_-$ et croît strictement sur $\mathbf{R}_+$; la réciproque de $\mathrm{Id}^n_{|\mathbf{R}_+}$ est notée $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ a & \longmapsto & \sqrt[n]{a} \end{array} \right.$ et est appelée "**racine n-ième**".*

[dessin : graphes de $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ et $\frac{1}{\mathrm{Id}^2}$]
[dessin :graphes de Id^3, Id^5, $\sqrt[3]{\cdot}$ et $\sqrt[5]{\cdot}$ avec $\mathrm{Id} = \sqrt[1]{\cdot}$]
[dessin : graphes de Id^2, Id^4, $\sqrt{\cdot}$ et $\sqrt[4]{\cdot}$ avec Id]

À RETENIR : si r et t sont deux réels POSITIFS et si $n \geq 1$ est un entier, on a alors les équivalences

$$r \text{ est la racine } n\text{-ième de } t \iff r^n = t.$$

En particulier, on a toujours

$$\forall a \geq 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sqrt[n]{a}^n = a = \sqrt[n]{a^n}$$

Illustrons cela en démontrant les propriétés suivantes.

Propriétés. *Soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$ des réels, soient $p \geq 0$ et $q \geq 0$ des entiers. On a les égalités suivantes :*
- $\sqrt[n]{0} = 0$;
- $\sqrt[n]{1} = 1$;
- $\sqrt[1]{a} = a$;
- $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$;
- $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$;
- $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^p$;
- $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$.

Démonstration.
- Puisque $0^a = \underline{0}$, la racine a-ième de $\underline{0}$ vaut 0.
- Puisque $1^a = \underline{1}$, la racine a-ième de $\underline{1}$ vaut 1.
- Puisque $a^1 = \underline{a}$, la racine 1-ième de $\underline{a}$ vaut a.
- On revient à la définition d'un exposant entier :

$$\begin{aligned}
(a^p)^q &= \overbrace{a^p \times a^p \times \cdots \times a^p}^{q \text{ facteurs } a^p} \\
&= \left.\overbrace{\begin{pmatrix} & a \\ \times & a \\ \times & \vdots \\ \times & \\ & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & a \\ \times & a \\ \times & \vdots \\ \times & \\ & a \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} & a \\ \times & a \\ \times & \vdots \\ \times & \\ & a \end{pmatrix}}^{q \text{ colonnes}}\right\} p \text{ lignes} \\
&= a^{\text{nombre de facteurs } a \text{ dans le tableau ci-dessus}} \\
&= a^{pq}.
\end{aligned}$$

On montrerait de même que $(a^q)^p = a^{qp}$, d'où le résultat puisque les exposants pq et qp sont égaux.

• On veut montrer que la racine p-ième de ab vaut $\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$, ce qui revient à montrer que la puissance p-ième de ce dernier vaut ab. Or cela est immédiat : $\left(\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}\right)^p = \sqrt[p]{a}^p\sqrt[p]{b}^p = ab$.

• On veut montrer que la racine q-ième de a^p vaut $\sqrt[q]{a}^p$, ce qui revient à montrer que la puissance q-ième de ce dernier vaut a^p. Or cela est aisé en utilisant les points précédents : $\left(\sqrt[q]{a}^p\right)^q = \left(\sqrt[q]{a}^q\right)^p = a^p$.

• On veut montrer que la racine pq-ième de a vaut $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$, ce qui revient à montrer que la puissance pq-ième de ce dernier vaut a. Or cela est aisé en utilisant les points précédents : $\left(\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}\right)^{pq} = \left(\left(\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}\right)^q\right)^p = (\sqrt[p]{a})^p = a$. Puisque p et q commutent, on en déduit l'autre égalité souhaitée : $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a} = \sqrt[qp]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$.

Application. On peut simplifier

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}\sqrt{a^3}}{a^{-\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{1}{6}}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = a^{\frac{8+9+1}{6}} = a^{\frac{18}{6}} = a^3.$$

2.4 Le nombre π et les racines de l'unité

Cette partie s'intéresse aux antécédents de 1 par l'exponentielle. En un certain sens, le nombre $2i\pi$ les engendre tous – et ce fait peut être pris comme une *définition* du nombre π. Ce dernier permettra de décrire aisément les racines de l'unité.

Théorème (définition de π) (admis). *Il existe un unique réel $\pi > 0$ tel que*

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \left[\left(e^{it} = 1\right) \iff (t \in 2\pi\mathbf{Z})\right].$$

Corollaire 1. *Pour tout complexe c, on a l'équivalence*

$$(e^c = 1) \iff (\exists k \in \mathbf{Z},\ c = 2\pi ik).$$

Démonstration. On écrit $c = a + ib$ avec a et b réels.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $k \in \mathbf{Z}$ tel que $c = 2\pi ik$. On a alors $e^c = e^{2\pi ik} = 1$ par le théorème précédent.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $e^c = 1$. Alors $1 = |1| = |e^c| = e^{\operatorname{Re} c} = e^a$, d'où $a = 0$; on en déduit $1 = e^c = e^{ib}$, d'où par le théorème précédent $b \in 2\pi\mathbf{Z}$.

Corollaire 2. *On a les égalités*

$$e^{i\pi} = -1 \qquad \textit{et} \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Démonstration.
Puisque le complexe $e^{i\pi}$ a pour carré $\left(e^{i\pi}\right)^2 = e^{2i\pi} = 1$, il vaut ±1 ; s'il valait 1, le théorème précédent nous donnerait un entier k tel que $i\pi = 2ki\pi$, d'où $1 = 2k$, ce qui est impossible.

De la même façon, le complexe $e^{i\frac{\pi}{2}}$ a pour carré $e^{2i\frac{\pi}{2}} = -1$ (d'après ce qui précède), donc vaut $\pm i$. Nous verrons plus loin comment trancher le signe (que nous admettons pour l'instant être +).

Corollaire 3 (racines de l'unité). *Pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $z^n = 1$ (d'inconnue z) possède n solutions : les puissances de $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Autrement dit, les racines n-ièmes de 1 sont les $e^{2\pi i\frac{k}{n}}$ pour k décrivant $\mathbf{N} \cap [0, n[$.*

En d'autres termes, on a les équivalences à $c \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ fixés :

$$\begin{aligned} c^n = 1 &\iff \exists k \in \mathbf{N} \cap [0, n[\,,\ c = e^{2\pi i\frac{k}{n}} \\ &\iff \text{c est un sommet du n-gone régulier inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets.} \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $c \in \mathbf{C}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} c^n = 1 &\iff \left(e^{\operatorname{Ln} c}\right)^n = 1 \\ &\iff e^{n \operatorname{Ln} c} = 1 \\ &\iff n \operatorname{Ln} c \in 2\pi i \mathbf{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ n \ln |c| + in \operatorname{Arg} c = 2\pi i k \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ \begin{cases} n \ln |c| = 0 \\ n \operatorname{Arg} c = 2\pi i k \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ \begin{cases} |c| = 1 \\ \operatorname{Arg} c = 2\pi i \frac{k}{n} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ c = e^{2\pi i \frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

Corollaire (racines d'un complexe). *Soit $n \geq 1$ un entier.*

Si c est un complexe non nul, alors les racines n-ièmes de c sont les $\rho_0 \omega$ où ρ dénote une racine n-ième de c et où ρ parcourt l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

Si $r \geq 0$ et θ sont des réels, alors une racine n-ième de $re^{i\theta}$ est $\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$.

Démonstration.

Soient $r \geq 0$ et θ deux réels. On a $\left(\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = \sqrt[n]{r}^n \left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = re^{i\theta}$, *c. q. f. d.*.

Soient $c \in \mathbf{C}^*$ et ρ un complexe. En notant $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de 1, on a les équivalences

$$\begin{aligned} & \rho \text{ est une racine } n\text{-ième de } c \\ \iff & \rho^n = c \\ \iff & \rho^n = \rho_0^n \\ \iff & \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = 1 \qquad \begin{array}{c}(\text{on peut diviser par } \rho_0 \text{ sinon} \\ 0 = 0^n = \rho_0^n = c \neq 0)\end{array} \\ \iff & \frac{\rho}{\rho_0} \in \mathbf{U}_n \\ \iff & \rho \in \rho_0 \mathbf{U}_n,\ \textit{c. q. f. d.}. \end{aligned}$$

Exemple. *Trouver les racines quatrièmes de $i - 1$.*

On commence par chercher *une* telle racine. Pour cela, on prend la racine quatrième du module et le quart de l'argument : $i - 1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[8]{2}^4 \left(e^{i\frac{3\pi}{16}}\right)^4 = \left(\sqrt[8]{2} e^{i\frac{3\pi}{16}}\right)^4$. Puisque les racines quatrièmes de 1 sont les puissances de $e^{\frac{2i\pi}{4}} = i$, on en déduit que les racines cherchées sont les $\sqrt[8]{2} e^{i\frac{3\pi}{16}} i^k$ pour k décrivant $\{0, 1, 2, 3\}$, à savoir les complexes de modules $\sqrt[8]{2}$ et d'arguments respectifs $\frac{3\pi}{16}$, $\frac{11\pi}{16}$, $\frac{19\pi}{16} = -\frac{13\pi}{16}$ et $\frac{27\pi}{16} = -\frac{5\pi}{16}$. Observer que ces quatre racines forment un carré.

Plus généralement, si $n \geq 1$ est un entier on retiendra que

les racines n-ième d'un complexe donné forment un n-gone régulier centré en 0.

2.5 Logarithme et argument complexes

Définitions (logarithmes et arguments). *Soit c un complexe.*

On appelle ***logarithme*** *de c tout complexe λ tel que $c = e^{\lambda}$.*

On appelle ***argument*** *de c tout complexe α tel que $c = |c| e^{i\alpha}$.*

Le programme exige la maîtrise des arguments mais n'aborde pas les logarithmes complexes. Pourtant, le premier point qui suit montre que les deux objets sont intimement reliés.

Proposition.
• *Si c est un complexe non nul, alors α est un argument de c ssi $i\alpha$ est un logarithme de $\frac{c}{|c|}$.*
• *Tout complexe est argument de 0 et 0 n'a pas de logarithme.*

Démonstration.
• Soit $c \in \mathbf{C}^*$: on a les équivalences à $\alpha \in \mathbf{C}$ fixé

$$\alpha \text{ argument de } c \underset{\text{d'un argument}}{\overset{\text{définition}}{\iff}} c = |c|\, e^{i\alpha} \overset{c\neq 0}{\iff} \frac{c}{|c|} = e^{i\alpha} \underset{\text{d'un logarithme}}{\overset{\text{définition}}{\iff}} i\alpha \text{ logarithme de } \frac{c}{|c|}.$$

• Soit α un complexe : on a $|0|\, e^{i\alpha} = 0e^{i\alpha} = 0$, donc α est un argument de 0. Puisque $\exp$ évite 0, ce dernier ne peut avoir de logarithme.

Proposition / définition (argument et logarithme principaux) (admise).
*Tout complexe non nul c admet un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, appelé **argument principal** de c et noté $\operatorname{Arg} c$.*
*Tout complexe non nul c admet un unique logarithme dont la partie imaginaire tombe dans $]-\pi, \pi]$, appelé **logarithme principal** de c et noté $\operatorname{Ln} c$.*

Propriétés. *Soit c un complexe non nul.*
• *On a l'égalité*

$$\operatorname{Ln} c = \ln |c| + i \operatorname{Arg} c.$$

• *Pour tout réel non nul t, on a*

$$\operatorname{Ln} t = \begin{cases} \ln t & \text{si } t > 0 \\ \ln |t| + i\pi & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

• *Les arguments de c sont les $\operatorname{Arg} c + 2\pi k$ pour k décrivant $\mathbf{Z}$.*
• *Les logarithmes de c sont les $\operatorname{Ln} c + 2\pi i k$ pour k décrivant $\mathbf{Z}$.*
• *Pour tous complexes a et b non nuls, on a les égalités modulaires*

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} ab &= \operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b \text{ modulo } 2\pi\mathbf{Z}, \\ \operatorname{Ln} ab &= \operatorname{Ln} a + \operatorname{Ln} b \text{ modulo } 2\pi i\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

★ Chez les complexes, les logarithmes ne transforment produits en sommes SEULEMENT *modulo* $2\pi i\mathbf{Z}$ (tout comme les arguments ne le font seulement *modulo* $2\pi\mathbf{Z}$).

Démonstration.
• Posons $\lambda := \ln |c| + i \operatorname{Arg} c$. D'une part on a $\pi < \operatorname{Im} \lambda \leq \pi$, d'autre part on $e^{\lambda} = e^{\ln|c| + i \operatorname{Arg} c} = e^{\ln|c|} e^{i \operatorname{Arg} c} = |c|\, e^{i \operatorname{Arg} c} = c$, ce qui montre que λ est un logarithme de c dont la partie imaginaire tombe dans $]-\pi, \pi]$: d'après l'unicité dans la définition ci-dessus, le complexe λ est le logarithme principal $\operatorname{Ln} c$.
• Soit t un réel non nul. Son argument principal vaut 0 si $t > 0$ et vaut π si $t < 0$, d'où le résultat en appliquant le point précédent.
• Soit α un complexe. On a les équivalences

$$\alpha \text{ argument de } c \iff c = |c|\, e^{i\alpha} \iff |c|\, e^{i \operatorname{Arg} c} = |c|\, e^{i\alpha} \iff 1 = e^{i(\alpha - \operatorname{Arg} c)} \iff \alpha - \operatorname{Arg} c \in 2\pi\mathbf{Z} \iff \alpha \in \operatorname{Arg} c + 2\pi\mathbf{Z}.$$

• Soit λ un complexe. En écrivant $\lambda = a + ib$ avec a et b réels, on a les équivalences

$$\lambda \text{ logarithme de } c \iff c = e^{\lambda} \iff e^{\operatorname{Ln} c} = e^{\lambda} \iff 1 = e^{\lambda - \operatorname{Ln} c} \iff \lambda - \operatorname{Ln} c \in 2\pi i\mathbf{Z} \iff \lambda \in \operatorname{Ln} c + 2\pi i\mathbf{Z}.$$

• D'après le deuxième point, il suffit de vérifier que $\operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b$ est un argument de ab, ce qui est immédiat vu que $e^{i(\operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b)} = e^{i \operatorname{Arg} a + i \operatorname{Arg} b} = e^{i \operatorname{Arg} a} e^{i \operatorname{Arg} b} = \frac{a}{|a|} \frac{b}{|b|} = \frac{ab}{|ab|}$.
• D'après le troisième point, il suffit de vérifier que $\operatorname{Ln} a + \operatorname{Ln} b$ est un logarithme de ab, ce qui est immédiat vu que $e^{\operatorname{Ln} a + \operatorname{Ln} b} = e^{\operatorname{Ln} a} e^{\operatorname{Ln} b} = ab$.

Convention. Si t dénote un réel strictement positif, *le* logarithme de t désignera son logarithme naturel $\ln t$, lequel vaut aussi son logarithme principal $\operatorname{Ln} t$ d'après ce qui précède.

Exemples. *Déterminer les logarithmes principaux de $1+i$, $i\sqrt{3}-1$ et $e^{-3i\pi}$.*
Vu le premier point, il est pertinent d'écrire ces complexes sont forme polaire, ce qui donne

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(1+i) &= \operatorname{Ln}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{Ln}\left(i\sqrt{3}-1\right) &= \operatorname{Ln}\left(2e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=\ln 2+i\frac{2\pi}{3},\\ \operatorname{Ln}e^{-3i\pi} &= \operatorname{Ln}\left(1e^{i\pi}\right)=\ln 1+i\pi=i\pi.\end{aligned}$$

★ Attention à ne pas écrire $\operatorname{Ln}e^{-3i\pi}=-3i\pi$, ce serait exactement aussi faux qu'écrire $\operatorname{Arg}e^{-3i\pi}=-3\pi$ (un argument principal doit rester dans $]-\pi,\pi]$).

BIG WARNING : lorsque a et b désignent des réels, on bien a les égalités $\begin{cases}\ln e^a=a\\ \ln ab=\ln a+\ln b\end{cases}$. **MAIS** lorsque a et b dénotent des complexes, les égalités $\begin{cases}\operatorname{Ln}e^a\overset{?}{=}a\\ \operatorname{Ln}ab\overset{?}{=}\operatorname{Ln}a+\operatorname{Ln}b\end{cases}$ ne sont vraies **SEULEMENT** *modulo* $2\pi i\mathbf{Z}$.

★★★ On prendra par conséquent garde à ne pas appliquer "le" logarithme sur des complexes. ★★★

Application 1. *Résoudre l'équation $e^{\frac{\lambda}{2}-1}=1+i$ en l'inconnue $\lambda\in\mathbf{C}$.*
Soit $\lambda\in\mathbf{C}$. Puisque $1+i=e^{\operatorname{Ln}(1+i)}=e^{\frac{\ln 2}{2}+i\frac{\pi}{4}}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} & \lambda\text{ est solution de l'équation proposée}\\ \iff\ & e^{\frac{\lambda}{2}-1}=1+i\\ \iff\ & e^{\frac{\lambda}{2}-1}=e^{\frac{\ln 2}{2}+i\frac{\pi}{4}}\\ \iff\ & \exists k\in\mathbf{Z},\ \frac{\lambda}{2}-1=\frac{\ln 2}{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik\\ \iff\ & \exists k\in\mathbf{Z},\ \lambda=2+\ln 2+i\frac{\pi}{2}+4\pi ik.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $2+\ln 2+i\frac{\pi}{2}+2\pi i\mathbf{Z}$.

Application 2. *Résoudre l'équation $4+e^{4\beta+6}=e^{2\beta+3+\ln 2}$ en l'inconnue complexe β.*
Soit $\beta\in\mathbf{C}$. En posant $B:=e^{2\beta+3}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} & \beta\text{ est solution de l'équation proposée}\\ \iff\ & 4+\left(e^{2\beta+3}\right)^2=e^{2\beta+3}e^{\ln 2}\\ \iff\ & 4+B^2=2B\\ \iff\ & (B-1)^2=-3\\ \iff\ & B=1\pm i\sqrt{3}\\ \iff\ & e^{2\beta+3}=e^{\operatorname{Ln}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)}\\ \iff\ & \exists k\in\mathbf{Z},\ 2\beta+3=\ln 2\pm i\frac{\pi}{6}+2\pi ik\\ \iff\ & \exists k\in\mathbf{Z},\ \beta=\frac{\ln 2-3}{2}\pm i\frac{\pi}{12}+\pi ik.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left(\frac{\ln 2-3}{2}+i\frac{\pi}{12}+\pi i\mathbf{Z}\right)\cup\left(\frac{\ln 2-3}{2}-i\frac{\pi}{12}+\pi i\mathbf{Z}\right)$.

À RETENIR *Deux complexes ont même exponentielle ssi ils diffèrent d'un multiple entier de $2\pi i$:*

$$\begin{matrix}\forall a\in\mathbf{C}\\ \forall b\in\mathbf{C}\end{matrix},\ \left(e^a=e^b\right)\iff\left(\exists k\in\mathbf{Z},\ a=b+2\pi ik\right).$$

2.6 Puissances complexes (dont réelles)

Définition (puissances).
*Soit z un complexe et $a > 0$ un réel. On définit un complexe (lu "a **puissance** z") par*

$$a^z := e^{z \ln a}.$$

Sanity checks.
Lorsque z est entier, on a bien $e^{z \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^z = (a)^z$, ce qui est cohérent.
Lorsque $a = e$, on obtient $e^{z \ln a} = e^{z \ln e} = e^z = a^z$, ce qui est cohérent.

Remarque. Lorsque z est réel, le complexe a^z reste dans $\mathbf{R}$. Il est naturel d'étudier cette quantité vue comme fonction de la base a ou comme fonction de l'exposant z.

Graphes des fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ a & \longmapsto & a^t \end{array} \right.$ selon le réel t :
[dessin : deux cas $t < 0$, le cas $t = 0$, deux cas $0 < t < 1$, le cas $t = 1$, deux cas $t > 1$]
On voit que, lorsque $t \geq 0$, le graphe se prolonge "continûment" en 0, ce qui donne envie d'écrire

$$0^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t > 0,\ 0^t = 0.$$

On introduit pour cela une notation commode.

Notation (symbole de Kronecker). Pour tous symboles S et Σ, on définit un entier $\delta_{S,\Sigma}$ ou δ_Σ^S par

$$\delta_S^\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } S \neq \Sigma \\ 1 \text{ si } S = \Sigma \end{array} \right. \quad \text{(appelé un } \textbf{\textit{symbole de Kronecker}}\text{).}$$

Convention : on pose pour tout réel t POSITIF

$$0^t := \delta_0^t = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } t > 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{array} \right. .$$

Graphes des fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ t & \longmapsto & a^t \end{array} \right.$ selon le réel $a > 0$:
[dessin : deux cas $0 < a < 1$, le cas $a = 1$, deux cas $a > 1$]

Propriétés. *Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels et z un complexe. On a les identités suivantes :*
- $a^0 = 1$;
- $1^z = 1$;
- $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$;
- $(ab)^z = a^z b^z$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{a^z}{b^z}$;

Démonstration. On revient systématiquement à la définition.
- On a $a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1$.
- On a $1^z = e^{z \ln 1} = e^{z0} = e^0 = 1$.
- On a $a^{-z} = e^{(-z)\ln a} = e^{-(z \ln a)} = \frac{1}{e^{z \ln a}} = \frac{1}{a^z}$.
- On a $(ab)^z = e^{z \ln(ab)} = e^{z(\ln a + \ln b)} = e^{z \ln a + z \ln b} = e^{z \ln a} e^{z \ln b} = a^z b^z$.
- On a $\left(\frac{a}{b}\right)^z = e^{z \ln \frac{a}{b}} = e^{z(\ln a - \ln b)} = e^{z \ln a} e^{-z \ln b} = a^z \frac{1}{b^z} = \frac{a^z}{b^z}$.

Propriétés (puissances réelles). *Soit $a > 0$ un réel. On a les égalités*
- $\left(a^t\right)^u = a^{tu} = \left(a^u\right)^t$ *pour tous réels t et u ;*
- $\ln\left(a^t\right) = t \ln a$ *pour tout réel t ;*
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ *pour tout entier n ;*
- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^p$ *pour tous entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.*

Démonstration

• Soient u et v deux réels. Puisque $a^u = e^{u \ln a}$ est réel, on peut considérer $(a^u)^v$, lequel vaut $e^{v \ln e^{u \ln a}} = e^{vu \ln a} = a^{vu} = a^{uv}$.

• Soit t réel : on a $\ln(a^t) = \ln\left(e^{t \ln a}\right) \overset{\ln \circ \exp = \mathrm{Id}}{=} t \ln a$.

• Découle du point suivant en spécialisant $\left\{ \begin{array}{l} p \leftarrow 1 \\ q \leftarrow n \end{array} \right.$.

• On a $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}q} = a^p$, ce qui montre que $a^{\frac{p}{q}}$ est une racine q-ième de a^p ; puisque $a^{\frac{p}{q}}$ est par ailleurs un réel positif, c'est *la* racine q-ième $\sqrt[q]{a^p}$.

Exercice. *Montrer que* $\exp(\ln 1 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 + \cdots - \ln 18) = \frac{18!}{2^{18}\ 9!^2}$.
On commence par exprimer la parenthèse comme un seul logarithme :

$$\begin{aligned} & \ln 1 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 + \cdots - \ln 18 \\ = \ & \ln 1 + \ln 3 + \ln 5 + \cdots + \ln 17 \\ & - \ln 2 - \ln 4 - \cdots - \ln 18 \\ = \ & \ln(3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 17) - \ln(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 18) \\ = \ & \ln \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 18}. \end{aligned}$$

Il reste alors à transformer la fraction en complétant la factorielle au numérateur :

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 18} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 17 \cdot 18}{(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 18)(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 18)}.$$

Le numérateur vaut $18!$ et le dénominateur vaut le carré de $(2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot 9) = 2^9 (1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 9) = 2^9\ 9!$, ce qui permet de conclure :

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 18} = \frac{18!}{(2^9 9!)^2} = \frac{18!}{2^{18}\ 9!^2}$$

Exercice. *Résoudre l'équation* $2^{x^2+1} = 3^{x^2-1}$ *en l'inconnue réelle* x.
Soit $x \in \mathbf{R}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} x \text{ est solution} & \iff 2^{x^2+1} = 3^{x^2-1} \\ & \overset{\ln \text{ injective}}{\iff} \ln\left(2^{x^2+1}\right) = \ln\left(3^{x^2-1}\right) \\ & \iff \left(x^2+1\right) \ln 2 = \left(x^2-1\right) \ln 3 \\ & \iff \ln 2 + \ln 3 = x^2 (\ln 3 - \ln 2) \\ & \iff x = \pm\sqrt{\frac{\ln 3 + \ln 2}{\ln 3 - \ln 2}} = \pm\sqrt{\frac{\ln 6}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Exercice. *Résoudre l'équation* $4^a + 3 \cdot 16^a = 7$ *en l'inconnue réelle* a.
Soit $a \in \mathbf{R}$. Puisque $16^a = \left(4^2\right)^a = (4^a)^2$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} a \text{ est solution} & \iff 4^a + 3 \cdot 16^a = 7 \\ & \iff 3 \cdot (4^a)^2 + 4^a - 7 = 0 \\ & \iff 4^a \text{ est racine du trinôme } 3X^3 + 4X - 7 = (3X+7)(X-1) \\ & \iff 4^a = 1 \text{ ou } 4^a = -\frac{7}{3} \qquad \begin{array}{c} \text{(la seconde égalité est absurde car} \\ \text{une puissance est toujours positive)} \end{array} \\ & \iff 4^a = 1 \\ & \iff a \ln 4 = \ln 1 \\ & \iff a = 0. \end{aligned}$$

2.7 Croissances comparées

On sait facilement comparer la "croissance" des fonctions polynomiales vers l'infini : c'est le polynôme de plus haut degré qui croîtra le plus vite, au sens où

$$\begin{array}{l}\forall\alpha\in\mathbf{R}\\ \forall\beta\in\mathbf{R}\end{array},\ \frac{t^\alpha}{t^\beta}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\left\{\begin{array}{c}0 \text{ si } \alpha<\beta\\ 1 \text{ si } \alpha=\beta\\ \infty \text{ si } \alpha>\beta\end{array}\right. .$$

L'introduction des fonctions transcendantes permet de créer de nouveaux ordres de "croissance".

Proposition (croissances comparées). *Soient $\alpha>0$ et $\beta>0$ deux réels On a les tendances*[8] *suivantes :*

$$\frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad \frac{t^\alpha}{(e^t)^\beta}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad u^\alpha(\ln u)^\beta\overset{u\to0^+}{\longrightarrow}0.$$

On pourra retenir les deux premières tendances de cette proposition sous la forme

logarithmes << puissances << exponentielles.

Démonstration. Soit $t>0$ un réel.

Montrons tout d'abord la tendance $\frac{t}{e^t}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$. Puisque $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\cdots$ où tous les termes sont positifs, on a la comparaison $e^t\geq\frac{t^2}{2}$, d'où l'on tire $\frac{t}{e^t}\leq\frac{2}{t}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Vu l'égalité $\frac{t^\alpha}{(e^t)^\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}t}{e^{\frac{\beta}{\alpha}t}}\right)^\alpha$, il alors est judicieux de composer les limites : on a les implications $\begin{array}{l}\boxed{\frac{\beta}{\alpha}t}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\underline{\infty}\\ \frac{\square}{e^\square}\overset{\square\to\infty}{\longrightarrow}0\end{array}\Longrightarrow\frac{\boxed{\frac{\beta}{\alpha}t}}{e^{\boxed{\frac{\beta}{\alpha}t}}}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ et $\begin{array}{l}\boxed{\frac{\frac{\beta}{\alpha}t}{e^{\frac{\beta}{\alpha}t}}}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\underline{0}\\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\square^\alpha\overset{\square\to0}{\longrightarrow}0\end{array}\Longrightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\boxed{\frac{\frac{\beta}{\alpha}t}{e^{\frac{\beta}{\alpha}t}}}^\alpha\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$, ce qui permet de conclure $\frac{t^\alpha}{(e^t)^\beta}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$.

On en déduit la tendance $\frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ en composant les limites $\begin{array}{l}\ln t\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\underline{\infty}\\ \frac{\square^\alpha}{(e^\square)^\beta}\overset{\square\to\infty}{\longrightarrow}0\end{array}\Longrightarrow\frac{\boxed{\ln t}^\alpha}{\left(e^{\boxed{\ln t}}\right)^\beta}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Soit à présent $u>0$ un réel. En écrivant $u\ln u=\frac{-\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}}$, on peut composer les limites $\begin{array}{l}\boxed{\frac{1}{u}}\overset{u\to0^+}{\longrightarrow}\underline{\infty}\\ \frac{\ln\square}{\square}\overset{\square\to\infty}{\longrightarrow}0\end{array}\Longrightarrow\frac{\ln\boxed{\frac{1}{u}}}{\boxed{\frac{1}{u}}}\overset{u\to0^+}{\longrightarrow}0$, d'où la tendance $u(\ln u)\overset{u\to0^+}{\longrightarrow}0$.

3 Trigonométrie

L'exponentielle complexe permet de définir convenablement les fonctions trigonométriques usuelles, lesquelles permettent de paramétrer les cercles et les branches d'hyperboles[9]. Dans cette démarche, et contrairement à l'intuition, il est plus naturel de commencer par les fonctions hyperboliques.

Avant cela, nous allons montrer que toute fonction s'écrit d'une unique manière comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire[10].

Propriété. *Une fonction paire et impaire est nulle.*

Démonstration. Soit $f:A\longrightarrow\mathbf{C}$ une telle fonction. Soit $a\in A$: le complexe $f(-a)$ vaut d'une part $f(a)$ par parité de f, d'autre part $-f(a)$ par imparité de f, d'où l'égalité $f(a)=-f(a)$, *i. e.* $f(a)=0$, *c. q. f. d.*.

[8] le fait de *tendre* vers

[9] qui seront traitées dans le prochain cours sur les coniques

[10] les techniques mises en œuvre nous resservirons plus tard en algèbre linéaire

Définition. *Soit A une partie de $\mathbf{C}$ symétrique, au sens où $\forall a\in A,\ -a\in A$, et soit $f:A\longrightarrow\mathbf{C}$.*
On appelle ***partie paire*** *de f l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & \frac{f(a)+f(-a)}{2} \end{array}\right.$.
On appelle ***partie impaire*** *de f l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & \frac{f(a)-f(-a)}{2} \end{array}\right.$.

Proposition. *Soit $f:A\longrightarrow\mathbf{C}$ où A est une partie symétrique de $\mathbf{C}$.*
- *La partie paire $f^\natural$ (resp. impaire $f^\sharp$) de f est une application paire (resp. impaire).*
- *On a l'égalité $f=f^\natural+f^\sharp$.*
- *Si f s'écrit $p+i$ où* $\left\{\begin{array}{l} p \text{ est une application paire} \\ i \text{ est une application impaire} \end{array}\right.$, *alors $\binom{p}{i}=\binom{f^\natural}{f^\sharp}$.*

Démonstration.
- Tout d'abord, les ensembles source de $f^\natural$ et $f^\sharp$ sont bien symétriques. Soit ensuite $a\in A$: on a

$$\begin{array}{rcl} \text{d'une part, } f^\natural(-a) & = & \dfrac{f(-a)+f(-(-a))}{2}=\dfrac{f(-a)+f(a)}{2}=\dfrac{f(a)+f(-a)}{2}=f^\natural(a)\,, \\ \text{d'autre part, } f^\sharp(-a) & = & \dfrac{f(-a)-f(-(-a))}{2}=\dfrac{f(-a)-f(a)}{2}=-\dfrac{f(a)-f(-a)}{2}=-f^\sharp(a)\,. \end{array}$$

- Soit $a\in A$: on a $\left[f^\natural+f^\sharp\right](a)=f^\natural(a)+f^\sharp(a)=\frac{f(a)+f(-a)}{2}+\frac{f(a)-f(-a)}{2}=f(a)$.
- Supposons $f=p+i$ avec p paire et i impaire. Puisque $f=f^\natural+f^\sharp$, on en déduit $p-f^\natural=f^\sharp-i$; or l'application de droite est paire (comme somme de fonctions paires) et l'application de gauche est impaire (comme somme de fonctions impaires), donc ces deux applications sont nulles (d'après la propriété ci-dessus), ce qui s'écrit $\left\{\begin{array}{c} p-f^\natural=0 \\ f^\sharp-i=0 \end{array}\right.$, *i. e.* $\binom{p}{i}=\binom{f^\natural}{f^\sharp}$.

3.1 Fonctions hyperboliques

Définition. *Les parties paire et impaire de l'exponentielle sont appelées respectivement* ***cosinus hyperbolique*** *(noté* $\cosh$ *ou* ch*) et* ***sinus hyperbolique*** *(noté* $\sinh$ *ou* sh*). Les* ***tangente hyperbolique*** *(notée* $\tanh$ *ou* th*) et* ***cotangente hyperbolique*** *(notée* $\coth$*) sont définies respectivement par les fonctions* $\operatorname{th}:=\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ *et* $\coth:=\frac{\cosh}{\sinh}$.

On pourra donc écrire

$$\operatorname{ch}:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ c & \longmapsto & \frac{e^c+e^{-c}}{2} \end{array}\right.,\qquad \operatorname{sh}:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ c & \longmapsto & \frac{e^c-e^{-c}}{2} \end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad \exp=\operatorname{ch}+\operatorname{sh}\,.$$

Propriétés.
- ch *est paire,* sh *est impaire,* th *est impaire.*
- *On a les égalités suivantes des dérivées :*

$$\operatorname{ch}'=\operatorname{sh}\,,\qquad \operatorname{sh}'=\operatorname{ch}\qquad\text{et}\qquad \operatorname{th}'=1-\operatorname{th}^2=\frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

- *On a l'identité*

$$\operatorname{ch}^2-\operatorname{sh}^2=1.$$

MNÉMO : on fera le parallèle avec les formules $\cos'=-\sin$, $\sin'=\cos$, $\tan^2=1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$ et $\cos^2+\sin^2=1$.

Démonstration.
- ch est une partie paire et sh est une partie impaire. Leur quotient th est donc impair.
- Soit $c\in\mathbf{C}$: on a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}' c & = & \dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{e^c+e^{-c}}{2}=\dfrac{e^c-e^{-c}}{2}=\operatorname{sh} c, \\ \operatorname{sh}' c & = & \dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{e^c-e^{-c}}{2}=\dfrac{e^c+e^{-c}}{2}=\operatorname{sh} c, \end{array}$$

d'où l'on tire $\mathrm{th}' = \left[\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\right]' = \frac{\mathrm{sh}'\,\mathrm{ch} - \mathrm{sh}\,\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}^2} = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$. Le point suivant montre que ce dernier quotient vaut aussi $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

• Soit $c \in \mathbf{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\left[\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2\right](c) &= \mathrm{ch}^2 c - \mathrm{sh}^2 c \\
&= (\mathrm{ch}\, c - \mathrm{sh}\, c)(\mathrm{ch}\, c + \mathrm{sh}\, c) \\
&= \left[\frac{e^c + e^{-c}}{2} - \left(\frac{e^c - e^{-c}}{2}\right)\right]\left[\frac{e^c + e^{-c}}{2} + \frac{e^c - e^{-c}}{2}\right] \\
&= \left(e^{-c}\right)\left(e^c\right) \\
&= e^{-c+c} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On s'intéresse à présent aux restrictions réelles de ch, sh et th (observer que th est définie sur tout $\mathbf{R}$ puisque son dénominateur ch est toujours strictement positif comme somme d'exponentielles).

Lemme. *On a la comparaison*

$$\forall a > 0,\ a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Démonstration. Soit $a > 0$. La comparaison ci-dessus se réécrit $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$, ce qui est vrai.

On en déduit, si l'on fixe un réel t, que $\mathrm{ch}\, t = \frac{e^t + \frac{1}{e^t}}{2} \geq \frac{2}{2} = 1$. En particulier, on a $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \geq 1 > 0$, donc sh croît strictement sur $\mathbf{R}$, donc y est injective, donc induit une bijection de $\mathbf{R}$ sur son image. Or, lorsque $t \to \infty$, on a $\left\{\begin{array}{l} e^t \longrightarrow \infty \\ e^{-t} \longrightarrow 0 \end{array}\right.$, donc $\mathrm{sh}\, t \longrightarrow \infty$, d'où (par imparité) $\mathrm{Im}\,\mathrm{sh} = \mathbf{R}$. La réciproque de sh est donc définie sur tout $\mathbf{R}$; on l'appelle ***argument sinus hyperbolique*** et on la note argsh.

De même, on a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} > \mathrm{sh}\,(0) = 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc ch croît strictement sur $\mathbf{R}_+$ et induit une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur son image. Puisque $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{ch}\,(0) = 1 \\ \mathrm{ch}\, t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{array}\right.$, sa réciproque est définie sur $[1, \infty[$; on l'appelle ***argument cosinus hyperbolique*** et on la note argch.

Enfin, si t est un réel, on observera

$$\begin{aligned}
\text{d'une part }\ \mathrm{th}\, t &= \frac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{ch}\, t} = \frac{\frac{e^t - e^{-t}}{2}}{\frac{e^t + e^{-t}}{2}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = 1 - \overbrace{\frac{2}{\underbrace{e^{2t}}_{>0} + 1}}^{\in]0,2[} \in \left]-1, 1\right[, \\
\text{d'autre part }\ \mathrm{th}'\, t &= 1 - \mathrm{th}^2\, t \in \left]0, 1\right],\ \text{donc th croît strictement sur } \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Puisque $\left\{\begin{array}{l} \lim_{-\infty} \mathrm{th} = -1 \\ \lim_{\infty} \mathrm{th} = 1 \end{array}\right.$, on en déduit que la réciproque de th est définie sur $]-1, 1[$; on l'appelle ***argument tangente hyperbolique*** et on la note argth.

[graphes de ch, sh, argch, argsh]
[graphes de th, argth]

MNÉMO : le graphe de ch est une **ch**aînette suspendue par deux points de même altitude.
On retiendra une ressemblance entre les graphes d'une part de atn et $\frac{\pi}{2}$ th, d'autre part de tan et argth $\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Id}\right)$.

Proposition. *On a les égalités des dérivées suivantes :*

$$\begin{aligned}
\forall c \geq 1,\ \mathrm{argch}'\, c &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}, \\
\forall s \in \mathbf{R},\ \mathrm{argsh}'\, s &= \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}, \\
\forall t \in \left]-1, 1\right[,\ \mathrm{argth}'\, t &= \frac{1}{1 - t^2}.
\end{aligned}$$

MNÉMO : retenir les *ensembles de définition* ainsi que les *signes* à l'aide des *graphes*.

Démonstration.

• Soit $c \geq 1$. On a $\operatorname{argch}' c = \left[\operatorname{ch}^{-1}\right]'(c) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch} c)} = \frac{1}{\operatorname{sh} \operatorname{argch} c}$. Puisque $1 = \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2$, évaluer cette égalité en $\operatorname{argch} c$ donne $1 = c^2 - \operatorname{sh}^2 \operatorname{argch} c$, d'où $\operatorname{sh} \operatorname{argch} c = \pm\sqrt{c^2 - 1}$; or $\begin{cases} \operatorname{argch} \geq 0 \\ \operatorname{sh} \geq 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+ \end{cases}$, donc le signe est un $+$.

• Soit $s \in \mathbf{R}$. On a $\operatorname{argsh}' s = \left[\operatorname{sh}^{-1}\right]'(s) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} s)} = \frac{1}{\operatorname{ch} \operatorname{argch} c}$. Puisque $1 = \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2$, évaluer cette égalité en $\operatorname{argsh} s$ donne $1 = \operatorname{ch}^2 \operatorname{argsh} s - s^2$, d'où $\operatorname{ch} \operatorname{argsh} s = \pm\sqrt{1 + c^2}$; or $\operatorname{ch} \geq 0$, donc le signe est un $+$.

• On a $\operatorname{argth}' = \left[\operatorname{th}^{-1}\right]' = \frac{1}{\operatorname{th}' \circ \operatorname{argth}} = \frac{1}{[1-\operatorname{th}^2] \circ \operatorname{argth}} = \frac{1}{1-\operatorname{Id}^2}$.

3.2 Fonctions circulaires

Définitions. *Soit c un complexe. On définit ses **cosinus**, **sinus**, **tangente** et **cotangente** respectivement par*

$$\begin{aligned} \cos c &:= \frac{e^{ic} + e^{-ic}}{2}, \\ \sin c &:= \frac{e^{ic} - e^{-ic}}{2i}, \\ \tan c &= \frac{\sin c}{\cos c} \text{ (si } \cos c \neq 0), \\ \cot c &= \frac{\cos c}{\sin c} \text{ (si } \sin c \neq 0). \end{aligned}$$

Ces définitions (à l'exception de la cotangente) équivalent aux égalités $\begin{cases} \operatorname{ch}(i\cdot) = \cos \\ \operatorname{sh}(i\cdot) = i \sin \\ \operatorname{th}(i\cdot) = i \tan \end{cases}$, ce qui explicite le lien étroit reliant fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques.

Ainsi, puisque l'on connaît ses formules de trigonométrie circulaire, on peut connaître celles de trigonométrie hyperboliques en substituant[11] $\begin{cases} \cos \leftarrow \operatorname{ch} \\ \sin \leftarrow i \operatorname{sh} \\ \tan \leftarrow i \operatorname{th} \end{cases}$ (MNÉMO : mettre un i devant les fonctions ***i**mpaires*).

Exemples.

L'identité de Pythagore $\cos^2 + \sin^2 = 1$ devient $(\operatorname{ch})^2 + \left(i \operatorname{sh}^2\right) = 1$, *i. e.* $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

L'identité de duplication $\cos(2\cdot) = \begin{cases} \cos^2 - \sin^2 \\ 2\cos^2 - 1 \\ 1 - 2\sin^2 \end{cases}$ devient $\operatorname{ch}(2\cdot) = \begin{cases} (\operatorname{ch})^2 - (i \operatorname{sh})^2 \\ 2(\operatorname{ch})^2 - 1 \\ 1 - 2(i \operatorname{sh})^2 \end{cases}$, *i. e.* $\operatorname{ch}(2\cdot) = \begin{cases} \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2 \\ 2\operatorname{ch}^2 - 1 \\ 1 + 2\operatorname{sh}^2 \end{cases}$.

La formule d'addition (à a et b complexes fixés) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ devient $[i \operatorname{sh}](a \pm b) = i \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{ch} a \; i \operatorname{sh} b$, *i. e.* $\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$.

Conformément à notre intuition du cercle trigonométriques, on retrouve les lieux d'annulation des fonctions trigonométriques circulaires.

Proposition. *Soit c un complexe. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \sin c &= 0 \iff c = 0 \;\; [\pi], \\ \cos c &= 0 \iff c = \frac{\pi}{2} \;\; [\pi], \\ (\text{si } \cos c \neq 0) \;\; \tan c &= 0 \iff c = 0 \;\; [\pi]. \end{aligned}$$

Démonstration.

[11] Ce qui précède montre qu'il faut en réalité substituer $\sin \leftarrow -i \operatorname{sh}$ mais la pratique montre que l'on peut oublier le signe $-$.

Pour sin, on les équivalences

$$\begin{aligned}\sin c = 0 &\iff \frac{e^{ic} - e^{-ic}}{2} = 0\\ &\iff e^{ic} = e^{-ic}\\ &\iff e^{2ic} = 1\\ &\iff 2ic \in 2i\pi\mathbf{Z}\\ &\iff c \in \pi\mathbf{Z},\end{aligned}$$

pour cos, on les équivalences

$$\begin{aligned}\cos c = 0 &\iff \frac{e^{ic} + e^{-ic}}{2} = 0\\ &\iff e^{ic} = -e^{-ic}\\ &\iff e^{2ic} = e^{i\pi}\\ &\iff 2ic = i\pi \ \ [2i\pi]\\ &\iff c = \frac{\pi}{2} \ \ [\pi],\end{aligned}$$

pour tan on a l'équivalence (si $\cos c \neq 0$) $\tan c = 0 \iff \sin c \iff c \in \pi\mathbf{Z}$.

Les formules d'addition se retrouveraient par un calcul direct, d'où l'on tirerait les formules de linéarisation puis celle de factorisation. De ces dernières, on retrouverait comment "simplifier" par sin, cos ou tan dans une équation, ce qui s'énonce comme suit (a et b sont deux complexes fixés) :

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin b \iff \begin{cases} a = b \ \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ a = \pi - b \ \ [2\pi]\end{cases}\\ \cos a &= \cos b \iff \begin{cases} a = b \ \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ a = -b \ \ [2\pi]\end{cases}\\ \tan a &= \tan b \iff a = b \ \ [\pi]\end{aligned}$$

Rappelons enfin quelques propriétés qu'il serait facile de déduire de celles de ch, sh et th :

• *Pour tout complexe $c \in \mathbf{C}$, on a l'égalité $e^{ic} = \cos c + i \sin c$.*
• *La fonction* sin *est 2π-périodique, impaire et dérivable avec* $\sin' = \cos$.
• *La fonction* cos *est 2π-périodique, paire et dérivable avec* $\cos' = -\sin$.
• *La fonction* tan *est π-périodique, impaire, définie sur* $\mathbf{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right)$ *et dérivable avec* $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

★ En général, l'écriture $\cos c + i \sin c$ N'EST PAS l'écriture rectangulaire de e^{ic} (il faudrait pour cela que $\cos c$ et $\sin c$ soient réels).
★ En général, il est FAUX d'écrire $\left|e^{ic}\right| = 1$ (il faudrait pour cela que $\cos c$ et $\sin c$ soient réels)

Regardons à présent le cas réel.

On dira qu'une application f ***stabilise*** un ensemble A si ce dernier est ***stable*** par f, au sens où $\forall a \in A,\ f(a) \in A$.

Proposition / Définitions. (admise[12])

La fonction sin *stabilise* $\mathbf{R}$, *sa restriction à* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *croît strictement, la réciproque associée est appelé **arc sinus** et notée*

$$\arcsin := \left[\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right]^{-1}.$$

La fonction cos *stabilise* $\mathbf{R}$, *sa restriction à* $[0, \pi]$ *décroît strictement, la réciproque associée est appelé **arc cosinus** et notée*

$$\arccos := \left[\cos_{|[0,\pi]}\right]^{-1}.$$

[12] bien sûr, seule la proposition est admise puisque les définitions n'auraient aucun sens à l'être

La fonction tan *envoie* $\mathbf{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z}\right)$ *dans* $\mathbf{R}$*, sa restriction à* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *croît strictement, la réciproque associée est appelé **arc tangente** et notée*

$$\arctan := \left[\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}\right]^{-1}.$$

La fonction cot *envoie* $\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{R}$*, sa restriction à* $]0,\pi[$ *décroît strictement, la réciproque associée est appelé **arc cotangente** et notée*

$$\operatorname{arccot} := \left[\cot_{|]0,\pi[}\right]^{-1}.$$

[graphes de arcsin et arccos, symétrie $\arccos+\arcsin=\frac{\pi}{2}$]
[graphes de arctan et arccot, symétrie $\arctan+\arctan=\frac{\pi}{2}$]

Comme pour les fonctions argch, argsh et argth, il convient de connaître les dérivées des fonctions ci-dessus et ne pas les confondre toutes.
MNÉMO : retenir les *ensembles de définition* ainsi que les *signes* à l'aide des *graphes*.

Proposition (admise).
Les fonctions arcsin *et* arccos *sont dérivables sur* $]-1,1[$ *et l'on a*

$$\begin{aligned}\forall s &\in \ ]-1,1[,\ \arcsin' s = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}},\\ \forall c &\in \ ]-1,1[,\ \arccos' c = \frac{-1}{\sqrt{1-c^2}}.\end{aligned}$$

Les fonctions arctan *et* arccot *sont dérivables sur* $\mathbf{R}$ *et l'on a*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbf{R},\ \arctan' t &= \frac{1}{1+t^2},\\ \forall c \in \mathbf{R},\ \operatorname{arccot}' c &= \frac{-1}{1+c^2}.\end{aligned}$$

Digression sur les arctangentes.