Calcul différentiel simple

lundi 22, mardi 23 octobre, lundi 12, mardi 13, mercredi 14 & mercredi 21 novembre 2012

Table des matières

1 Fonctions dérivées

1.1 Définitions

Certains graphes d'applications possèdent une tangente[1] en certains points : comment la définir proprement ?

Fixons un point $A := \binom{a}{f(a)}$ sur le graphe d'une application f. Un point M voisin (mais distinct) de A définit une droite (AM). Lorsque M tend vers A, on peut espérer que la droite (AM) tende vers la ***tangente*** au graphe en A.

Remarque. Connaître une droite, c'est en connaître la pente et un point. Ici, toutes les droites considérées passent par A ; elles sont donc caractérisées par leurs *pentes*. Celle de (AM) vaut, en notant $\binom{t}{f(t)}$ les coordonnées de M, $\left\{\begin{array}{c}\text{le taux}\\ \text{la fraction}\\ \text{le rapport}\\ \text{le quotient}\end{array}\right.$ des $\left\{\begin{array}{c}\text{accroissements}\\ \text{différences[2]}\\ \text{variations}\end{array}\right.$ $\frac{\Delta ordonn\acute{e}es}{\Delta abscisses} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ (appelé ***taux d'accroissement*** ou ***taux de variation***).

Il est donc naturel de considérer la limite de ce rapport quand M tend vers A, *i. e.* lorsque t tend vers a. Cette limite, *SI elle existe*, est appelée ***dérivée*** de la fonction f au point[3] a. La fonction ***dérivée*** de f associe à tout point de $\mathbf{R}$ la dérivée de f en ce point : on la note f' ou Df (peut ne pas être définie partout). Ainsi, la dérivée de f en a se note naturellement $f'(a)$. Lorsqu'elle existe, on dit que f est ***dérivable*** en a.

[1] du latin *tangere*, toucher ; une droite tangente à une courbe est donc une droite qui la touche en un seul point

[3] On prendra garde à ne pas confondre le *point* $\binom{a}{f(a)}$ du graphe de f avec son abscisse a vue comme *point* de l'ensemble source de f.

1.2 Exemples

Toutes les variations d'une fonction constante sont nulles : tous ses taux d'accroissement sont donc nuls, *a fortiori* leur limite. On en déduit que les fonctions constantes sont partout dérivables de dérivée nulle :

$$Cste' = 0.$$

On montrerait de même qu'une fonction affine a tous ses taux de variations égaux à sa pente ; elle est donc partout dérivable et son graphe se confond avec toutes ses tangentes :

$$\begin{array}{l}\forall\lambda\in\mathbf{R}\\ \forall\mu\in\mathbf{R}\end{array},\ [\lambda\,\mathrm{Id}+\mu]'=\lambda.$$

Considérons la fonction $c:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & t^2\end{array}\right.$. En un réel a donné, le taux de variation de a à $a+\varepsilon$ (où ε est un réel non nul pensé très petit[4] en valeur absolue) vaut

$$\frac{c(a+\varepsilon)-c(a)}{(a+\varepsilon)-a}=\frac{(a+\varepsilon)^2-a^2}{\varepsilon}=\frac{a^2+2a\varepsilon+\varepsilon^2-a^2}{\varepsilon}=2a+\varepsilon.$$

On en déduit $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c(a+\varepsilon)-c(a)}{(a+\varepsilon)-a}=2a$. L'application "élever au carré" est donc partout dérivable de dérivée "doubler" :

$$\left[\mathrm{Id}^{\times 2}\right]'=2\,\mathrm{Id}\,.$$

On montrerait de même (exercice !) que "élever au cube" est partout dérivable de dérivée "élever au carré puis tripler" :

$$\left[\mathrm{Id}^{\times 3}\right]'=3\,\mathrm{Id}^{\times 2}\,.$$

Le graphe de sin suggère une pente 1 en l'origine. Montrons cela.

On veut[5] $\frac{\sin\theta-\sin 0}{\theta-0}\overset{?}{\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}}1$, *i. e.* $\frac{\sin\theta}{\theta}\overset{?}{\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}}1$. Soit θ un réel dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On se rappelle les comparaisons $\sin\theta\leq\theta\leq\tan\theta$, d'où (en divisant par $\sin\theta$) $1\leq\frac{\theta}{\sin\theta}\leq\frac{1}{\cos\theta}$. Or le membre de droite $\frac{1}{\cos\theta}$ tend (quand $\theta\to 0$) vers $\frac{1}{\cos 0}=1$: le membre du milieu est ainsi coincé entre deux quantités tendant chacune vers 1, il doit par conséquent tendre lui aussi vers 1 (c'est le **théorème des gendarmes** ou le **sandwich theorem**). Nous venons de montrer que $\frac{\sin\theta}{\theta}\overset{\theta\to 0^+}{\longrightarrow}1$, *i. e.* que $\lim_{0^+}\frac{\sin}{\mathrm{Id}}=1$; puisque la fonction $\frac{\sin}{\mathrm{Id}}$ est paire, l'existence de sa limite à gauche en 0 équivaut à l'existence de sa limite à droite en 0, ou encore à celle de sa limite (tout court) en 0, d'où l'on tire $\lim_0\frac{\sin}{\mathrm{Id}}=1$, *c. q. f. d.*.

On en déduit la dérivée de sin en tout point grâce à la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+\varepsilon)-\sin a}{(a+\varepsilon)-a} &= \frac{\sin a\cos\varepsilon+\cos a\sin\varepsilon-\sin a}{\varepsilon}\\ &= \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\cos a-\sin a\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

D'une part, on a $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}1$, donc le premier terme tend vers $\cos a$ lorsque $\varepsilon\to 0$. D'autre part, on peut réécrire

$$\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\sin\boxed{\frac{\varepsilon}{2}}}{\boxed{\frac{\varepsilon}{2}}}\right)^2;$$

or l'argument $\boxed{\frac{\varepsilon}{2}}$ tend vers o lorsque $\varepsilon\to 0$ et l'on sait que $\frac{\sin\square}{\square}\overset{\square\to o}{\longrightarrow}1$, d'où l'on tire par composition des limites[6] $\frac{\sin\boxed{\frac{\varepsilon}{2}}}{\boxed{\frac{\varepsilon}{2}}}\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}1$, de sorte que le second terme $-\sin a\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}$ tend, lorsque $\varepsilon\to 0$, vers $-(\sin a)\,\frac{0}{2}\,(1)^2=0$. Finalement, la limite cherchée est $\cos a$.

---

[4] On fera le lien avec le français où l'on parle de quantités *epsilonesques*.

[5] Le point d'interrogation en exposant indique au lecteur que la relation en question *n'est pas affirmée*.

[6] Le théorème utilisé s'énonce $\begin{array}{l}\lim_{\blacksquare} g=L\\ \lim_a f=\blacksquare\end{array}\implies\lim_a[g\circ f]=L$. Usuellement, on l'écrirait plutôt sous la forme "*si* $\left\{\begin{array}{l}\varphi(\square)\overset{\square\to\blacksquare}{\longrightarrow}L\\ \diamondsuit(t)\overset{t\to a}{\longrightarrow}\blacksquare\end{array}\right.$, *alors* $\varphi(\diamondsuit(t))\overset{t\to a}{\longrightarrow}L$" (faire comme si on mettait $\diamondsuit(t)$ dans le carré $\square$).

Conclusion : sin est partout dérivable de dérivée

$$\sin' = \cos .$$

1.3 Notations

Lorsque l'accroissement Δy d'une quantité y devient infiniment petit, on le note dy. La limite du taux d'accroissement, souvent noté $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, pourrait donc s'écrire $\frac{df}{dx}$. Cette notation posera cependant problème pour les fonctions à plusieurs arguments et il faut dès maintenant lui préférer la notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ (le symbole ∂ se lit "d rond").

Problème. Que signifie x dans la notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$? Une ambiguïté naît de deux possibilités (au moins) :

1. le point où l'on dérive f ;
2. l'argument de la fonction dérivée f'.

Convention symbolique. Soit x un réel. L'opérateur[7] $\frac{\partial}{\partial x}$ ou ∂_x signifiera « *interpréter la quantité qui suit comme une fonction appliquée en* x*, dériver cette fonction puis appliquer la fonction dérivée obtenue en* x ». En termes plus concis, pour tout symbole y, on définit :

$$\frac{\partial}{\partial x} y := [x \mapsto y]'(x) \qquad \text{(noté aussi } \frac{\partial y}{\partial x} \text{ ou } \partial_x y).$$

Insistons lourdement sur le fait que, dans la notation ci-dessus, le symbole x *dénote* un objet invoqué (le point où l'on dérive) mais est aussi un symbole *muet* (donnant ainsi sens à la fonction $x \mapsto y$), ce qui est un non-sens (un symbole muet ne peut rien dénoter du tout). Il faut donc, mentalement, dans un premier temps "désinvoquer" x afin de pouvoir le considérer comme symbole muet et pouvoir définir la fonction $x \mapsto y$ puis dans un second temps le réinvoquer pour pouvoir y évaluer la dérivée de cette dernière. C'est à ce prix que la confusion peut être levée.

Ainsi, si f est une fonction et x un réel, on différenciera bien

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \underbrace{[x \mapsto f(x)]}_{=f}{}'(x) = [f]'(x) = f'(x)$$

(qui exprime la dérivée de f en x) de

$$\frac{\partial}{\partial x} f = [x \mapsto f]'(x) = Cst'(x) = 0(x) = 0$$

(en effet, le symbole f ne comporte aucune dépendance en x, donc l'application $x \mapsto f$ est constante).

Souvent, on abrège $f(x)$ en x, d'où la confusion. En pratique extra-mathématique, cela ne pose (presque) aucun problème mais, en mathématique, ce "presque" n'a pas sa place.

Quelques exemples :
$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2+5\right) = 2t$;
$\frac{\partial}{\partial (t^3)} \sin\left(t^3\right) = \cos\left(t^3\right)$;
$\frac{\partial}{\partial a} ab = b$ mais $\frac{\partial}{\partial b} ab = a$;
$\frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x$ mais $\frac{\partial}{\partial y} e^x = 0$ (sauf si x et y sont reliés d'une certaine manière[8]).

Une dernière remarque notationnelle.

Le prime ' s'applique sur une *fonction* (*e. g.* f) et non sur une image (*e. g.* $f(x)$). Pour les mêmes raisons que ci-dessus, à x fixé le symbole $f(x)'$ désigne la fonction nulle et non $f'(x)$ (sauf exception). De plus, si l'expression $f(x)$ est compliquée, le prime n'aide pas à la lecture et on lui préférera $\frac{\partial}{\partial x}$ ou ∂_x. Comparer par

[7] Un ***opérateur*** est une fonction de fonction, comme la dérivation $f \mapsto f'$.

[8] par exemple, si $y = e^x$, on obtient $\frac{\partial}{\partial y} e^x = \frac{\partial}{\partial y} y = 1$ (et on trouverait la même chose en écrivant $\frac{\partial}{\partial y} e^x = \frac{\partial}{\partial (e^x)} e^x = 1$)

exemple les lectures de $\sqrt{\frac{\sin x+\ln x}{x^3+3}}'$ (on ne voit qu'à la fin – et de manière très légère – qu'il s'agit d'une dérivée) et de $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{\sin x+\ln x}{x^3+3}}$ (on voit tout de suite qu'on dérive et on sait par rapport à quoi).

Aide-mémoire :

fonctions	réels
	x (objet source de f ou f')
f	$f(x)$ (image de x par f)
f' (dérivée de f)	$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \partial_x f(x)$ (image de x par f')

À proscrire : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = f(x)' = 0$ (dérivée d'une fonction constante)

1.4 Propriétés

La dérivation se comporte bien vis-à-vis de la somme et des homothéties mais PAS vis-à-vis du produit, du quotient, de la composée ni de la réciproque.

(Dans ce qui suit, f, g, h et i sont deux fonctions définies et dérivables sur une même partie de $\mathbf{R}$.)

Somme : on a $[f+g]' = f' + g'$.

Homothéties : on $[\lambda f]' = \lambda f'$ pour tout complexe λ.

Produit : pour dériver un produit de plusieurs fonctions, on dérive *un* facteur et on somme tous les produits que l'on peut ainsi obtenir (***formule de Leibniz***) :

$$\begin{array}{rcl} [fg]' & = & f'g + fg' \\ [fgh]' & = & f'hg + fg'h + fgh' \\ [fghi]' & = & f'hgi + fg'hi + fgh'i + fghi' \\ & \cdots & \end{array}$$

Quotient : si g ne s'annule pas, on a $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Composée : si $g \circ f$ est définie et dérivable, on a

$$[g \circ f]' = [g' \circ f] \times f' \qquad i.\ e. \qquad \frac{\partial}{\partial t} g(f(t)) = g'(f(t))\ f'(t)$$

(MNÉMO : en écrivant $y = f(x)$ et $z = g(y) = g(f(x))$, on pourra retenir cette dernière égalité sous la forme[9] $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$, appelée ***chain rule***) (sanity check : tester la formule selon $f \leftarrow \mathrm{Id}$ ou $g \leftarrow \mathrm{Id}$).

Réciproque : si f est injective et si f' ne s'annule pas, on a

$$\left[f^{-1}\right]' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \qquad i.\ e. \qquad \left[f^{-1}\right]'(t) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}$$

(MNÉMO : en écrivant $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$, on pourra retenir cette dernière égalité sous la forme[10] $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}$).

Remarque. Si en outre f et g sont strictement positives, la formule de Leibniz se réécrit plus joliment

$$\frac{[fg]'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g},$$

exprimant le fait que l'opérateur $f \mapsto f'$ (appelé ***dérivation logarithmique***) transforme produits en sommes.

Dérivées usuelles.

cste$' = 0$

$\mathrm{Id}' = 1$

$\partial_t t^2 = 2t$

---

[9] pour s'en convaincre, écrire

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial g(y)}{\partial y}\frac{\partial f(x)}{\partial x} = g'(y) f'(x) = g'(f(x)) f'(x) = \left[[g' \circ f] \times f'\right](x) = [g \circ f]'(x) = \frac{\partial [g \circ f](x)}{\partial x} = \frac{\partial g(f(x))}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

[10] pour s'en convaincre, substituer $g \leftarrow f^{-1}$ dans la formule précédente, ce qui revient à subsituer $z \leftarrow x$, et observer que $\mathrm{Id}' = 1$

$\partial_t \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}$
$\partial_t \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$
et plus généralement[11]

$$\partial_t t^\alpha = \alpha t^{\alpha - 1}$$

$\exp' = \exp$ (*i. e.* $\partial_\lambda e^\lambda = e^\lambda$)
$\ln' = \frac{1}{\mathrm{Id}}$ (*i. e.* $\partial_x \ln x = \frac{1}{x}$)
$\sin' = \cos$
$\cos' = -\sin$
$\tan' = 1 + \tan^2$

1.5 Utilisation des propriétés

1) Démontrer la formule donnant $\tan'$.

Il suffit de revenir à la définition de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ et d'utiliser la formule donnant la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} \tan' &= \left[\frac{\sin}{\cos}\right]' \\ &= \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos \times \cos + \sin \times \sin}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} \\ &= 1 + \tan^2 . \end{aligned}$$

Le calcul aurait également pu donner (quatrième égalité) $\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$.

2) Dériver $\cos \times \sin$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta \sin\theta) &\overset{\text{Leibniz}}{=} \cos'\theta \sin\theta + \cos\theta \sin'\theta \\ &= -\sin\theta \sin\theta + \cos\theta\cos\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

mais également

$$\begin{aligned} \cos\theta \sin\theta &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ &\overset{\partial_\theta}{\longmapsto} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ &\overset{\partial_\theta \text{ linéaire}}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin 2\theta) \\ &\overset{\textit{chain rule}}{=} \frac{1}{2}\sin'(2\theta) \times \frac{\partial}{\partial\theta}(2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\theta) \times 2 \\ &= \cos(2\theta) . \end{aligned}$$

On retiendra de cet exemple la formule générale

$$\partial_t f(\lambda t + \mu) = \lambda f'(\lambda t + \mu)$$

[11] la formule qui suit est valide pour (t, α) dans $\mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$, $\mathbf{R}^* \times \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{C}$

(sanity check : prendre $f = \mathrm{Id}$).

3) Dériver $\exp \circ \exp \circ \exp$.

On utilise proprement la *chain rule* :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} e^{e^{e^x}} &= \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(e^{e^x}\right) \\
&= \exp'\left(e^{e^x}\right) \frac{\partial}{\partial x} e^{e^x} \\
&= \exp\left(e^{e^x}\right) \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(e^x\right) \\
&= e^{e^{e^x}} \exp'\left(e^x\right) \frac{\partial}{\partial x} e^x \\
&= e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x \\
&= e^{e^{e^x} + e^x + x}.
\end{aligned}$$

On retiendra l'une ou l'autre des formules générales :

$$\left[e^f\right]' = f' e^f \qquad i.\ e. \qquad \partial_t e^{\varphi(t)} = \varphi'(t)\, e^{\varphi(t)}.$$

4) Dériver $\ln \circ \cos$.

On applique la *chain rule* :

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi \ln(\cos\varphi) &= \ln'(\cos\varphi) \times \partial_\varphi \cos\varphi \\
&= \left[\frac{1}{\mathrm{Id}}\right](\cos\varphi) \times (-\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{\cos\varphi}(-\sin\varphi) \\
&= -\tan\varphi.
\end{aligned}$$

On retiendra de cet exemple la formule générale

$$[\ln f]' = \frac{f'}{f}$$

(justifiant que le quotient $\frac{f'}{f}$ soit appelé ***dérivée logarithmique*** de f).

Remarque. On peut retrouver la formule de Leibniz pour plusieurs fonctions strictement positives f, g et h (ou plus) dérivables en dérivant l'égalité $\ln fgh = \ln f + \ln g + \ln h$, ce qui donne par linéarité $\frac{[fgh]'}{fgh} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}$, d'où la formule de Leibniz en multipliant par fgh.

5) *Retrouver les dérivées de* $\ln$ *et* $\sqrt{\cdot}$ *à l'aide de la formule de la composée. Calculer de même les dérivées de* atn, asn *et* acs.$\circ$

On spécialise la formule $\left[f^{-1}\right]' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (en omettant les restrictions nécessaires à la bonne définitions des réciproques) :

$$\begin{aligned}
\ln' &= \left[\exp^{-1}\right]' = \frac{1}{\exp' \circ \exp^{-1}} = \frac{1}{\exp \circ \exp^{-1}} = \frac{1}{\mathrm{Id}}, \\
\sqrt{\cdot}' &= \left(\left[\mathrm{Id}^{\times 2}\right]^{-1}\right)' = \frac{1}{\left[\mathrm{Id}^{\times 2}\right]' \circ \left[\mathrm{Id}^{\times 2}\right]^{-1}} = \frac{1}{2\,\mathrm{Id} \circ \sqrt{\cdot}} = \frac{1}{2\sqrt{\cdot}}, \\
\mathrm{atn}' &= \left(\tan^{-1}\right)' = \frac{1}{\tan' \circ \tan^{-1}} = \frac{1}{\left(1 + \tan^2\right) \circ \tan^{-1}} = \frac{1}{1 + \mathrm{Id}^{\times 2}}, \\
\mathrm{asn}' &= \left(\sin^{-1}\right)' = \frac{1}{\sin' \circ \sin^{-1}} = \frac{1}{\cos \circ \mathrm{asn}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{Id}^{\times 2}}} \text{ et} \\
\mathrm{acs}' &= \left(\cos^{-1}\right)' = \frac{1}{\cos' \circ \cos^{-1}} = \frac{1}{-\sin \circ \mathrm{acs}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \mathrm{Id}^{\times 2}}}
\end{aligned}$$

(la dernière dérivée pouvait s'obtenir plus facilement en dérivant $\operatorname{asn}+\operatorname{acs}=\frac{\pi}{2}$).

6) Simplifier $\frac{P'}{P}$ *où l'on a posé* $P:\xi\mapsto\xi^2(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}$.

Mauvaise méthode.
Calculer P' en utiliser la formule de Leibniz (sous la forme $[fgh]'=f'gh+fg'h+fgh'$) puis diviser par P :

$$\begin{aligned}P'(\xi) &= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\xi^2\right)(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}\\ &\quad+\xi^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi-1)^{18}\right)(3\xi+4)^{42}\\ &\quad+\xi^2(\xi-1)^{18}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(3\xi+4)^{42}\right)\\ &= 2\xi(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}\\ &\quad+\xi^2 18(\xi-1)^{17}(3\xi+4)^{42}\\ &\quad+\xi^2(\xi-1)^{18}42(3\xi+4)^{41}3,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left[\frac{P'}{P}\right](\xi) &= \frac{P'(\xi)}{P(\xi)}\\ &= \frac{2\xi(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}+\xi^2 18(\xi-1)^{17}(3\xi+4)^{42}+\xi^2(\xi-1)^{18}136(3\xi+4)^{41}}{\xi^2(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}}\\ &= 2\frac{\xi(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}}{\xi^2(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}}+18\frac{\xi^2(\xi-1)^{17}(3\xi+4)^{42}}{\xi^2(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}}+136\frac{\xi^2(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{41}}{\xi^2(\xi-1)^{18}(3\xi+4)^{42}}\\ &= \frac{2}{\xi}+\frac{18}{\xi-1}+\frac{136}{3\xi+4}.\end{aligned}$$

Bonne méthode.
Calculer $\frac{P'}{P}$ en utilisant la version logarithmique de la formule de Leibniz (sous la forme $\frac{[fgh]'}{fgh}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}+\frac{h'}{h}$) spécialisée selon $\left\{\begin{array}{l}f\longleftarrow\operatorname{Id}^{\times 2}\\ g\longleftarrow(\operatorname{Id}-1)^{\times 18}\\ h\longleftarrow(3\operatorname{Id}+4)^{\times 42}\end{array}\right.$ (de sorte à retrouver $P=fgh$).

Vu les spécialisations ci-dessus, il est naturel de calculer en toute généralité la dérivée logarithmique de $(\lambda\operatorname{Id}+\mu)^{\times\alpha}$ (où $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ et $\alpha\in\mathbf{N}^*$ sont fixés) :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}(\lambda t+\mu)^\alpha}{(\lambda t+\mu)^\alpha}=\frac{\alpha(\lambda t+\mu)^{\alpha-1}\lambda}{(\lambda t+\mu)^\alpha}=\frac{\lambda\alpha}{\lambda t+\mu}.$$

On spécialise alors la formule $\frac{[fgh]'}{fgh}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}+\frac{h'}{h}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{1\times 2}{1\operatorname{Id}}+\frac{1\times 18}{1\operatorname{Id}-1}+\frac{3\times 42}{3\operatorname{Id}+4}\\ &= \frac{2}{\operatorname{Id}}+\frac{18}{\operatorname{Id}-1}+\frac{136}{3\operatorname{Id}+4}\end{aligned}$$

(sanity check : on trouve la même chose en suivant l'une ou l'autre des deux méthodes).

2 Équations différentielles

2.1 Rappels

• Si f est une application continue sur un segment $[a,b]$, il existe une application F dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'=f$ (une telle application F est appelée une ***primitive*** de f). On a alors

$$\int_a^b f=F(b)-F(a).$$

Cette égalité est à prendre ou bien comme une propriété (si l'on définit l'intégrale comme une "aire", ce que l'on fera plus tard dans le cours) ou bien comme une définition (point de vue souvent adopté au lycée). Cette identité ne dépend pas de la primitive F de f considérée.

• En particulier, si f est une application dérivable sur $[a,b]$, on a

$$\forall t\in[a,b]\,,\ \frac{\partial}{\partial t}\int_a^t f=f(t)\qquad\text{et}\qquad\int_a^b f'=f(b)-f(a)\,.$$

• L'exponentielle est l'unique application dérivable $\exp:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$ telle que $\left\{\begin{array}{l}\exp'=\exp\\ \exp(0)=1\end{array}\right.$.

• Lorsqu'une fonction est plusieurs fois dérivable, on note ses dérivées successives ou bien avec le nombre correspondant de symboles prime $'$ ou bien avec l'exposant correspondant *entre parenthèses*. Par exemple :

$$\cos^{(3)}=\cos'''=\sin\qquad\qquad\sin^{(4)}=\sin''''=\sin\qquad\qquad\exp^{(42)}=\exp\,.$$

Si f est une fonction (suffisamment de fois dérivable), on a plus généralement

$$\forall n\in\mathbf{N},\ f^{(n)}:=\left[\varphi\mapsto\varphi'\right]^{\circ n}(f)$$

(on itère n fois l'opérateur dérivation), d'où en particulier

$$f^{(0)}=f$$

(on rappelle que l'itéré 0-ième d'une fonction agit comme l'identité[12]).

2.2 Vocabulaire

Une ***équation*** est une relation (non nécessairement vérifiée) entre plusieurs termes dont certains sont appelés les ***inconnues***. ***Résoudre*** une équation, c'est trouver les valeurs des inconnues qui satisfassent la relation ; ces valeurs sont les ***solutions*** de l'équation.

Exemples.

L'équation $\left\{\begin{array}{c}n\in\mathbf{N}\\ n-2=18\end{array}\right.$ d'inconnue n a pour unique solution 20.

L'équation $\left\{\begin{array}{c}q\in\mathbf{N}\\ q+1=0\end{array}\right.$ d'inconnue q n'a pas de solution.

L'équation $\left\{\begin{array}{c}\Gamma\in\mathbf{Z}\\ \Gamma+1=0\end{array}\right.$ d'inconnue Γ a pour unique solution -1.

L'équation $\left\{\begin{array}{l}\xi\in\mathbf{Z}\\ 2\xi=1\end{array}\right.$ d'inconnue ξ n'a pas de solution.

L'équation $\left\{\begin{array}{l}W\in\mathbf{Q}\\ 2W=1\end{array}\right.$ d'inconnue W a pour unique solution $\frac{1}{2}$.

L'équation $\left\{\begin{array}{c}\rho\in\mathbf{R}\\ \rho^2=f^2\end{array}\right.$ d'inconnue ρ a deux solutions $\pm f$ (éventuellement confondues).

Remarque. Lorsque l'on change le domaine d'appartenance de l'inconnue, cela peut affecter l'ensemble des solutions.

Une ***équation fonctionnelle*** est une équation dont les inconnues sont des fonctions.

Exemple. $\left\{\begin{array}{c}f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\\ \forall a,b\in\mathbf{R},\ f(a+b)=f(a)+f(b)\end{array}\right.$. Des candidats solutions sont l'identité (de $\mathbf{R}$) ainsi que tous ses multiples scalaires[13] réels. Peut-on trouver d'autres solutions que les homothéties ?

On montre aisément (exercice !) qu'une application f solution coïncide sur $\mathbf{Q}$ avec une homothétie (de rapport $f(1)$) ; peut-on prolonger l'identité $f_{|\mathbf{Q}}=f(1)\,\mathrm{Id}_{\mathbf{Q}}$ sur tout $\mathbf{R}$? NON en général, cela dépend des

[12] écrire $f^{(0)}=\underbrace{\left[\varphi\mapsto\varphi'\right]^{\circ 0}}_{=\mathrm{Id}}(f)=\mathrm{Id}(f)=f$

[13] c'est une conséquence de ce que la relation $f(a+b)=f(a)+f(b)$ est homogène en f

axiomes choisis pour faire de la mathématique. Mais OUI si l'on impose une hypothèse supplémentaire, comme la continuité de f ou sa monotonie (exercice !).

Exemple. $\left\{\begin{array}{c} f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},\qquad g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},\\ \forall a,b\in\mathbf{R},\quad \begin{array}{c} f(a+b)=f(a)f(b)-g(a)g(b)\\ g(a+b)=g(a)f(b)+f(a)g(b)\end{array}\end{array}\right.$. Un candidat solution est le couple $(\cos,\sin)$.
Peut-on en trouver d'autres ? NON si l'on impose la continuité de f et g —> exercice ! (hint : considérer $f+ig$)

Une ***équation différentielle*** est une équation fonctionnelle où apparaissent les *dérivées* (successives) des inconnues.

Exemples. $\left\{\begin{array}{c} f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\text{ dérivable}\\ g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\text{ dérivable}\\ f'=g,\quad g'=-f\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c} f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C}\text{ dérivable}\\ f''+\omega^2 f=0\\ (\text{où }\omega\in\mathbf{C}\text{ fixé})\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c} f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\text{ dérivable}\\ \mathrm{Id}\times f=|f-1|\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{c} f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\text{ deux fois dérivable}\\ f''-3f'+f=\exp(2\cdot)\end{array}\right.$.

Un ***problème de Cauchy*** revient à chercher les solutions d'une équation différentielle dont on a imposé les valeurs des dérivées en un point donné (la donnée de telles valeurs s'appelle une ***condition initiale***). Par exemple, un problème de Cauchy en mécanique est la détermination de la position d'un mobile soumis à un système de forces dont on impose la position et la vitesse initiales.

On ne parlera dans ce cours que des équations différentielles suivantes :

- à *une* inconnue ;
- ***affines***, *i. e.* de la forme
$$a_n f^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_1 f'+a_0 f=s$$
où les symboles $a_0,a_1,...,a_n,s$ dénotent des fonctions (s est appelée le ***second***[14] ***membre***) ; lorsque $a_n\neq 0$, l'entier n est appelé ***ordre*** de l'équation ; lorsque $s=0$, on dit que l'équation est ***sans second membre*** et on parle alors d'équation ***linéaire*** ; l'***équation linéaire associée*** à une équation affine est la même équation où l'on a substitué 0 au second membre ;
- ***normalisées***, *i. e.* telles que le coefficient devant la dérivée d'ordre maximal vaut constamment 1 (avec les notations précédentes, cela revient à dire $a_n=1$) ;
- d'ordre 1 ou 2.

Dans le cas de l'ordre 2, on se restreindra aux équations ***à coefficients constants*** (*i. e.* de la forme
$$f''+af'+bf=s$$
où a et b sont des *scalaires* (fonctions constantes)) et dont le second membre est une somme de fonctions du type $e^{\alpha\,\mathrm{Id}}P$ où α est un scalaire et P un polynôme.

2.3 Principe de superposition pour les équations affines

Exemple. Posons $G(\varphi):=\varphi''''+\varphi''\cos-\varphi'\sqrt{\cdot}+\varphi\frac{1}{\mathrm{Id}}$ pour toute fonction φ quatre fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. On s'intéresse à l'équation différentielle
$$G(\varphi)=\exp+\operatorname{atn}+\ln\ \text{ (d'inconnue }\varphi).$$
Si l'on parvient à trouver des fonctions f,g,h (quatre fois dérivables) telles que $\left\{\begin{array}{c} G(f)=\exp\\ G(g)=\operatorname{atn}\\ G(h)=\ln\end{array}\right.$, on en déduira
$$\begin{aligned} G(f+g+h) &= [f+g+h]''''+[f+g+h]''\cos-[f+g+h]'\sqrt{\cdot}+[f+g+h]\frac{1}{\mathrm{Id}}\\ &= (f''''+g''''+h'''')+(f''+g''+h'')\cos-(f'+g'+h')\sqrt{\cdot}+(f+g+h)\frac{1}{\mathrm{Id}}\\ &= \left(f''''+f''\cos-f'\sqrt{\cdot}+f\frac{1}{\mathrm{Id}}\right)+\left(g''''+g''\cos-g'\sqrt{\cdot}+g\frac{1}{\mathrm{Id}}\right)+\left(h''''+h''\cos-h'\sqrt{\cdot}+h\frac{1}{\mathrm{Id}}\right)\\ &= \exp+\operatorname{atn}+\ln,\qquad\text{de sorte que } f+g+h \text{ sera solution de l'équation affine étudiée.}\end{aligned}$$

[14] on ordonne selon le sens de lecture en français : membre de gauche (premier) = membre de droite (second)

Ce exemple suggère que la résolution d'un équation affine dont le second membre est une *somme* se ramène à la résolution des mêmes équations affines où l'on a remplacé le second membre par chacun de ses termes. La résolution en sera par conséquent simplifiée si nos nouveaux seconds membres sont plus simples.

Formulons le cas général.

Proposition (principe de superposition). *Considérons une équation affine de second membre s. Soit $p \geq 1$ un entier et $s_1, s_2, ..., s_p$ des fonctions de somme s.*

Si pour tout $i \in \{1, ..., p\}$ on dispose d'une solution f_i à l'équation donnée dont le second membre s a été remplacé par s_i, alors la somme $\sum_{i=1}^{p} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_p$ est solution de l'équation de départ.

Remarque. Si l'on entend "additionner" en lieu de "superposer", ce principe s'énonce alors : *la superposition des solutions f_i donne une solution à l'équation de second membre superposé.*

Démonstration. On reprend les notations de la liste précédente et on s'assure que l'application $\sum_{i=1}^{p} f_i$ est solution de l'équation de départ en calculant

$$\begin{aligned}
& a_n \left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right)^{(n-1)} + \cdots + a_1 \left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right)' + a_0 \left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right) \\
\underset{\text{est additive}}{\overset{\text{la dérivation}}{=}} & \left(a_n \sum_{i=1}^{p} f_i^{(n)}\right) + \left(a_{n-1}\sum_{i=1}^{p} f_i^{(n-1)}\right) + \cdots + \left(a_1 \sum_{i=1}^{p} f_i'\right) + \left(a_0 \sum_{i=1}^{p} f_i\right) \\
\underset{a_k \text{ pour tout } k}{\overset{\text{développer}}{=}} & \left(\sum_{i=1}^{p} a_n f_i^{(n)}\right) + \left(\sum_{i=1}^{p} a_{n-1} f_i^{(n-1)}\right) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{p} a_1 f_i'\right) + \left(\sum_{i=1}^{p} a_0 f_i\right) \\
\underset{\text{des termes}}{\overset{\text{regroupement}}{=}} & \sum_{i=1}^{p} \left(a_n f_i^{(n)} + a_{n-1} f_i^{(n-1)} + \cdots + a_1 f_i' + a_0 f_i\right) \\
\underset{\text{sur chaque } s_i}{\overset{\text{hypothèse}}{=}} & \sum_{i=1}^{p} s_i \\
\underset{\text{sur les } s_i}{\overset{\text{hypothèse}}{=}} & s, \ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

En corollaire du principe de superposition spécialisé selon $p \leftarrow 2$ et $\binom{s_1}{s_2} \leftarrow \binom{0}{s}$, on obtient une solution d'une équation affine en additionnant une ***solution linéaire*** (*i. e.* une solution de l'équation linéaire associée) avec une solution fixée. A-t-on la réciproque ?

Fixons une solution f_0 et considérons f une application n fois dérivable. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} \underset{\text{d'une solution}}{\overset{\text{définition}}{\iff}} & \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} = s \\
\underset{\text{solution}}{\overset{f_0 \text{ est}}{\iff}} & \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k f_0^{(k)} \\
\iff & \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k f_0^{(k)} = 0 \\
\underset{\text{des termes}}{\overset{\text{regroupement}}{\iff}} & \sum_{k=0}^{n} \left(a_k f^{(k)} - a_k f_0^{(k)}\right) = 0 \\
\underset{a_k \text{ pour tout } k}{\overset{\text{factoriser}}{\iff}} & \sum_{k=0}^{n} a_k \left(f^{(k)} - f_0^{(k)}\right) = 0 \\
\underset{\text{est additive}}{\overset{\text{la dérivation}}{=}} & \sum_{k=0}^{n} a_k \left[f - f_0\right]^{(k)} = 0 \\
\underset{\text{solution linéaire}}{\overset{\text{définition d'une}}{\iff}} & f - f_0 \text{ est une solution linéaire} \\
\iff & \exists f_l \text{ solution linéaire}, \ f - f_0 = f_l \\
\iff & \exists f_l \in \{\text{solutions linéaires}\}, \ f = f_0 + f_l \\
\iff & f \in f_0 + \{\text{solutions linéaires}\}.
\end{aligned}$$

Ceci tenant pour tout f, on en déduit l'égalités des ensembles

$$\{\text{solutions affines}\} = f_0 + \{\text{solutions linéaires}\}.$$

Remarque. On a montré une égalité ensembliste $S = S'$ en établissant l'équivalence $f \in S \iff f \in S'$ pour tout objet f. Cette démarche constitue en fait la *définition* de l'égalité entre deux ensembles, il convient de penser à l'utiliser pour montrer une égalité ensembliste.

Conclusion. Ce qui précède mène à l'adage suivant :

solution AFFINE = solution LINÉAIRE + solution FIXÉE.

On dit que l'ensemble des solutions forme un ***espace affine***, d'où la terminologie d'équation *affine*.

On fera le parallèle avec la maxime géométrique "*point affine = vecteur + point fixé*" (le point fixé est souvent appelé *origine*) ; en associant dorénavant

"*linéaire := vectoriel*",

on retiendra plus généralement l'aphorisme

"*affine = linéaire & translation*".

★ La terminologie du programme diffère ! ★

Sans doute parce que le premier membre d'une équation affine est *linéaire* en l'inconnue, le programme appelle "***équation linéaire***" ce que nous appelons "équation affine" (c'est cependant *un membre de* l'équation qui est linéaire, pas l'équation toute entière).

De même, le programme appelle "***équation linéaire homogène***" (ou "***équation linéaire sans second membre***") ce que nous appelons "équation linéaire" ou "équation affine sans second membre (ce qui va à l'encontre de la définition "*linéaire = homogène & additif*"). Par cohérence, le programme dira "***équation homogène associée*** à une équation linéaire" là où nous dirons "équation linéaire associée à une équation affine" et "***solution homogène***" là où nous dirons "solution linéaire".

Enfin, on trouvera également la terminologie "***équation résolue***" au lieu d'"équation normalisée" (sans doute pour dire que l'on peut *résoudre* une telle équation en prenant comme inconnue uniquement *la dérivée d'ordre maximal* (de l'ancienne inconnue), ce qui revient à pouvoir isoler cette dérivée d'ordre maximal et à l'exprimer en fonction des dérivées d'ordres inférieurs (par exemple, l'équation $f'' - 2f' + f = \exp$ peut se "résoudre" en l'inconnue f'' en disant qu'elle équivaut à $f'' = 2f' - f + \exp$)).

Résumé des différences terminologiques :

dans ce cours	le programme
équation affine	équation linéaire
équation affine sans second membre	équation linéaire sans second memebre
équation linéaire	équation homogène
solution linéaire	solution homogène
équation normalisée	équation résolue

.

2.4 Premier ordre affine

On considère pour tout ce paragraphe un intervalle I infini, trois fonctions continues $f, a, s : I \longrightarrow \mathbf{C}$ où f est supposée dérivable et l'on note E l'équation $f' + af = s$ (dont l'inconnue est f).

2.4.1 Résolution par le facteur intégrant

Pour résoudre E, une idée est de reconnaître dans $f' + af$ la dérivée d'un produit $[\alpha f]' = \alpha f' + \alpha' f$ pour une certaine fonction α à déterminer. Pour cela,

on multiplie les deux membres de E par l'exponentielle d'une primitive de a.

Un tel facteur e^A (avec $A' = a$) sera appelé un ***facteur intégrant*** (car il permet d'intégrer l'équation).

Mise en oeuvre : à $t_0 \in I$ fixé, on a les équivalences

$$
\begin{aligned}
f \text{ solution de } E &\iff f' + af = s \\
&\iff e^A f' + \underbrace{e^A a}_{=[e^A]'} f = e^A s \qquad \text{(on multiplie/divise par } e^A \text{ qui ne s'annule jamais)} \\
&\iff \left[e^A f\right]' = \left[\int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s\right]' \qquad \begin{array}{c}\text{(on utilise l'égalité } \varphi = \left[\int_{t_0}^{\mathrm{Id}} \varphi\right]' \text{ valide} \\ \text{pour toute fonction continue } \varphi : I \longrightarrow \mathbf{C}\text{)}\end{array} \\
&\iff \left[e^A f - \int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s\right]' = 0 \\
&\iff e^A f - \int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s \text{ constante} \qquad \begin{array}{c}\text{(une fonction dérivable sur un intervalle} \\ \text{est de dérivée nulle ssi elle est constante)}\end{array} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ e^A f - \int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s = C \qquad \text{(définition d'une fonction constante)} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = Ce^{-A} + e^{-A} \int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s \qquad \text{(on isole } f\text{)} \\
&\iff f \in \underbrace{\overbrace{\mathbf{C}e^{-A}}^{\substack{\text{espace des} \\ \text{solutions linéaires}}} + \overbrace{e^{-A} \int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s}^{\text{solution fixée}}}_{\text{espace affine des solutions}} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{faire le parallèle avec l'équivalence géométrique} \\ (\exists \lambda \in \mathbf{R},\ P = \lambda u + Q) \iff (P \in \mathbf{R}u + Q) \\ \text{où } P \text{ et } Q \text{ sont des points et } u \text{ un vecteur}\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

L'espace affine des solutions est donc une ***droite linéaire*** (on dit aussi une ***droite vectorielle***) translatée selon une solution fixée : on dit que l'espace des solutions est une ***droite affine*** (dirigée par le "vecteur" e^{-A} et passant par le "point" $e^{-A} \int_{t_0}^{\mathrm{Id}} e^A s$).

Remarque. Comme à la section précédente, on a montré une égalité ensembliste $S = S'$ en établissant l'équivalence $f \in S \iff f \in S'$ pour tout objet f.

Sanity check. Soit λ un complexe. L'équation $f' = \lambda f$ se réécrit $f' - \lambda f = 0$, on reconnaît $s := 0$ et $a := -\lambda$, d'où $A := -\lambda \,\mathrm{Id}$ (pour garder les mêmes notations). Ce qui précède permet alors d'écrire

$$
\begin{aligned}
f' = \lambda f &\iff f \text{ solution de } f' - \lambda f = 0 \\
&\iff f \in \mathbf{C}e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + 0 \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \forall t \in I,\ f(t) = Ce^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

RETENIR LA MÉTHODE, *PAS LA FORMULE!*

Remarque (intervalle). La preuve générale ci-dessus utilise le fait qu'une fonction dérivable de dérivée nulle sur un *intervalle* y est constante. Cette affirmation est fausse si l'on ne se place pas sur un *intervalle* : pour un contre-exemple, la fonction définie par -1 sur $\mathbf{R}_-^*$ et 1 sur $\mathbf{R}_+^*$ est dérivable sur tout $\mathbf{R}^*$ de dérivée nulle mais n'est pas constante (on peut aussi considérer la restriction de la partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ à $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$).

★ Il est donc VITAL que l'ensemble source de l'inconnue f soit un INTERVALLE si l'on veut suivre cette méthode. ★

Exemple. *Trouver les fonctions* $q : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R}$ *dérivables telles que* $q' + \tan \times q = \frac{1}{\cos}$.

On commence par primitiver $\tan = \frac{\sin}{\cos} = \frac{-\cos'}{\cos} = [-\ln \circ \cos]'$, ce qui permet d'écrire le facteur intégrant sous la forme $e^{-\ln \circ \cos} = \frac{1}{\cos}$. L'équation équivaut donc successivement à (bien noter que cos ne n'annule jamais sur l'intervalle considéré)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos} q' + \frac{\sin}{\cos^2} \times q = \frac{1}{\cos^2} \\ \iff & \left[\frac{q}{\cos}\right]' = \tan' \\ \iff & \left[\frac{q}{\cos} - \tan\right]' = 0 \\ \iff & \exists C \in \mathbf{R},\ \frac{q}{\cos} - \tan = C \\ \iff & \exists C \in \mathbf{R},\ q = \sin + C \cos . \end{aligned}$$

Remarque (scalaire). La fonction $\frac{q}{\cos} - \tan$ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}$ (vu l'hypothèse sur f), donc dire qu'elle est constante revient à dire qu'elle vaut constamment un réel (d'où le "$\exists C \in \mathbf{R}$" au lieu de "$\exists C \in \mathbf{C}$").

2.4.2 Caractérisation de l'exponentielle

Exercice. *Quelles fonctions* ε *continues non nulles vérifient* $\forall a, b \in \mathbf{R},\ \varepsilon(a+b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$ *?*

L'exponentielle est bien sûr candidate, montrons qu'elle est la seule "à un scalaire près".

Soit un tel ε supposé dans un premier temps dérivable. Fixons un réel a. On a $\varepsilon(a + \mathrm{Id}) = \varepsilon(a)\varepsilon$, d'où (en dérivant) $\varepsilon'(a + \mathrm{Id}) = \varepsilon(a)\varepsilon'$ puis (évaluer en un réel b) $\varepsilon'(a+b) = \varepsilon(a)\varepsilon'(b)$. Par symétrie de a et b, on obtient $\varepsilon(a)\varepsilon'(b) = \varepsilon(b)\varepsilon'(a)$; en choisissant b tel que $\varepsilon(b) \neq 0$ (on peut car ε est non nul), on trouve $\forall a \in \mathbf{R},\ \varepsilon'(a) = \overbrace{\frac{\varepsilon'(b)}{\varepsilon(b)}}^{=:\lambda}\varepsilon(a)$, *i. e.* $\varepsilon' = \lambda\varepsilon$, d'où un réel C tel que $\varepsilon = Ce^{\lambda \mathrm{Id}}$. Réinjecter dans l'équation de départ donne $Ce^{\lambda \mathrm{Id}} = Ce^{\lambda \mathrm{Id}}Ce^{\lambda \mathrm{Id}}$, d'où $C^2 = C$, *i. e.* $C = 0$ (exclu car $\varepsilon \neq 0$) ou $C = 1$. Finalement, ε est de la forme $e^{\lambda \mathrm{Id}}$ (qui réciproquement est bien solution).

Montrons à présent qu'une solution ε est dérivable. Soit $a \in \mathbf{R}$. On intègre l'égalité $\varepsilon(a)\varepsilon = \varepsilon(a + \mathrm{Id})$ de 0 à un réel b fixé, ce qui donne $\varepsilon(a)\int_0^b \varepsilon = \int_0^b \varepsilon(a + \mathrm{Id}) = \int_0^b \varepsilon(a+t)\,dt \underset{i.\ e.\ u:=a+t}{\overset{t\leftarrow u-a}{=}} \int_{0+a}^{b+a} \varepsilon(u)\,du = \int_a^{a+b} \varepsilon$. Si on peut trouver un b tel que $I := \int_0^b \varepsilon \neq 0$, alors on pourra écrire $\varepsilon(a) = \frac{\int_a^{a+b}\varepsilon}{I} = \frac{F(a+b)-F(a)}{I}$ où $F' = \varepsilon$, d'où $\varepsilon = \frac{F(\mathrm{Id}+b)}{I} - \frac{F}{I}$ qui est dérivable ; sinon, l'application $\int_0^{\mathrm{Id}} \varepsilon$ est constante (égale à 0), donc de dérivée ε nulle, ce qui est exclu.

Conclusion : les fonctions cherchées sont les exponentielles $e^{\lambda \mathrm{Id}}$ pour λ décrivant[15] $\mathbf{R}$.

2.4.3 Problème de Cauchy

Proposition. *(admise)* *L'équation* $f' + af = s$ *admet une unique solution si l'on impose la valeur de* f *en un point.*

Interprétation. La population d'une espèce (dont le taux de reproduction est fonction de la population) est entièrement déterminée par la population initiale et son taux de reproduction.

En pratique. Une fois résolue l'équation E, évaluer la solution trouvée au point donné fournit une équation en la constante C que l'on résoud aisément.

Exemple. *Trouver la fonction* $\Delta : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{C}$ *dérivable telle que* $\Delta\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et* $\Delta' + \tan \times \Delta = \frac{1}{\cos}$

On a déjà vu que les solutions complexes sont les fonctions $\sin + C \cos$ pour C parcourant $\mathbf{C}$. La valeur en $\frac{\pi}{4}$ d'une telle solution est $\frac{\sqrt{2}}{2} + C\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C+1}{\sqrt{2}}$, qui coïncide avec $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ si et seulement si $C = i$. Finalement, la solution cherchée est $\sin + i \cos = i(\cos - i \sin) = ie^{-i \mathrm{Id}}$.

[15] On pourrait donc noter l'ensemble des solutions sous la forme $e^{\mathbf{R}\,\mathrm{Id}}$ mais attention à ne pas se leurrer : puisqu'il ne contient pas le "vecteur" nul, l'ensemble $e^{\mathbf{R}\,\mathrm{Id}}$ n'est pas une droite vectorielle !

2.5 Second ordre affine à coefficients constants

Comme pour le premier ordre, il convient de prendre les scalaires dans le même corps ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) que celui où tombent les valeurs des fonctions de l'équation étudiée. Afin d'unifier les énoncés à venir, on notera $\mathbf{K}$ l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

On considère pour tout ce paragraphe un intervalle I infini, quatre fonctions continues $f, a, b, s : I \longrightarrow \mathbf{K}$ où f est supposée deux fois dérivable et l'on note E l'équation $f'' + af' + b = s$ (dont l'inconnue est f).

Définitions.
On appelle ***polynôme caractéristique*** *de E le polynôme $X^2 + aX + b$. On le notera*[16] χ_E *ou* χ.
Une ***racine*** *de χ est un scalaire (de K) tel que $\chi(\lambda) = 0$.*
Une ***racine double*** *de χ est une racine de χ qui est aussi une racine de χ'. Cela équivaut à ce que χ soit un multiple scalaire de $(X - \lambda)^2$.*
Une ***racine simple*** *de χ est une racine de χ qui n'est pas une racine double.*
*L'****ordre*** *d'un scalaire λ comme racine de χ vaut* $\begin{cases} 0 \text{ si } \lambda \text{ n'est pas racine de } \chi \\ 1 \text{ si } \lambda \text{ est racine simple de } \chi \\ 2 \text{ si } \lambda \text{ est racine double de } \chi \end{cases}$.

D'après la sentence "*solution affine = solution linéaire + solution fixée*", on va décrire

1. d'une part les solutions linéaires de E ;
2. d'autre part comment trouver *une* solution.

2.5.1 Solutions linéaires

La forme des solutions linéaires dépend de ce que χ admette ou non des racines.

Proposition. *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.*
• *Si λ est racine de χ, alors $\mathrm{e}^{\lambda \,\mathrm{Id}}$ est une solution linéaire de E.*
• *Si de plus λ est racine double de χ, alors $\mathrm{Id}\, \mathrm{e}^{\lambda \,\mathrm{Id}}$ est aussi solution linéaire de E.*

Démonstration.
• On a $\left[e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' = [\lambda \,\mathrm{Id}]' \, e^{\lambda \,\mathrm{Id}} = \lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}}$, d'où $\left[e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]'' = \left[\lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' = \lambda^2 e^{\lambda \,\mathrm{Id}}$ et il vient (lorsque λ est racine de χ)

$$\begin{aligned} \left[e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]'' + a\left[e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' + e^{\lambda \,\mathrm{Id}} &= \lambda^2 e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + a\lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + b e^{\lambda \,\mathrm{Id}} \\ &= \underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{=\chi(\lambda)=0} e^{\lambda \,\mathrm{Id}} \\ &= 0, \text{ d'où la première assertion.} \end{aligned}$$

• On a $\left[\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' = e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \mathrm{Id}\, \lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}}$, d'où

$$\begin{aligned} \left[\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]'' &= \left[e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \mathrm{Id}\, \lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' \\ &= \left[e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' + \lambda \left[\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' \\ &= \lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \lambda \left(e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \mathrm{Id}\, \lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right) \\ &= 2\lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \lambda^2 \,\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}} ; \end{aligned}$$

il en résulte (lorsque λ est racine double)

$$\begin{aligned} \left[\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]'' + a\left[\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right]' + \left[\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right] &= \left(2\lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \lambda^2 \,\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right) + a\left(e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \mathrm{Id}\, \lambda e^{\lambda \,\mathrm{Id}}\right) + b \,\mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}} \\ &= \underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{=\chi(\lambda)=0} \mathrm{Id}\, e^{\lambda \,\mathrm{Id}} + \underbrace{(2\lambda + a)}_{=\chi'(\lambda)=0} e^{\lambda \,\mathrm{Id}} \\ &= 0, \text{ d'où la seconde assertion.} \end{aligned}$$

[16] notation non standard, à redéfinir au besoin

Corollaire (solutions linéaires de E lorsque χ a une racine).

• *Si χ possède deux racines distinctes $\alpha \neq \beta$, alors f est solution linéaire de E ssi il y a deux scalaires A et B (dans $\mathbf{K}$) tels que $f = Ae^{\alpha \operatorname{Id}} + Be^{\beta \operatorname{Id}}$.*

• *Si χ possède une racine double λ, alors f est solution linéaire de E ssi il y a deux scalaires A et B (dans $\mathbf{K}$) tels que $f = Ae^{\lambda \operatorname{Id}} + B \operatorname{Id} e^{\lambda \operatorname{Id}}$.*

Démonstration (très partielle). Par la proposition précédente, on sait (dans le premier cas) que $e^{\alpha \operatorname{Id}}$ et $e^{\beta \operatorname{Id}}$ sont solutions linéaires et que (dans le second cas) $e^{\lambda \operatorname{Id}}$ et $\operatorname{Id} e^{\lambda \operatorname{Id}}$ sont solutions linéaires, donc (par superposition) toute combinaison linéaire aussi. On admettra la réciproque[17].

Remarque. On dit que l'espace des solutions linéaires est un ***plan vectoriel***, engendré respectivement par les "vecteurs" $e^{\alpha \operatorname{Id}}$ et $e^{\beta \operatorname{Id}}$ (premier cas) et par les "vecteurs" $e^{\lambda \operatorname{Id}}$ et $\operatorname{Id} e^{\lambda \operatorname{Id}}$ (second cas).

Exemple 1. *Résoudre $f'' = \omega^2 f$ en l'inconnue f où ω est un complexe non nul fixé.*

(On prend ici $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Cette équation se réécrit $f'' - \omega f = 0$ dont le polynôme caractéristique vaut $X^2 - \omega^2 = (X - \omega)(X + \omega)$, d'où le plan des solutions (χ possède deux racines distinctes $\pm\omega$ puisque $\omega \neq 0$)

$$\mathbf{C}e^{\omega \operatorname{Id}} + \mathbf{C}e^{-\omega \operatorname{Id}}.$$

Exemple 2. *Résoudre $f'' + 4f' + 4f = 0$ en l'inconnue f.*

Le polynôme caractéristique vaut $X^2 + 4X + 4 = (X+2)^2$, donc a une racine double -2, d'où le plan des solutions

$$\mathbf{K}e^{-2 \operatorname{Id}} + \mathbf{K} \operatorname{Id} e^{-2 \operatorname{Id}}.$$

Proposition (solutions linéaires de E lorsque χ n'a pas de racines). *(admise)*

On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que χ a deux racines complexes non réelles. Alors ces racines sont conjuguées, mettons $\lambda \pm i\omega$ (où λ et ω sont des réels), et les solutions linéaires de E sont les

$$e^{\lambda \operatorname{Id}} (A \cos(\omega \operatorname{Id}) + B \sin(\omega \operatorname{Id})) \qquad \textit{pour } A \textit{ et } B \textit{ décrivant } \mathbf{R}$$

ou les

$$Ce^{\lambda \operatorname{Id}} \cos(\omega \operatorname{Id} - \varphi) \qquad \textit{pour } C \textit{ et } \varphi \textit{ décrivant } \mathbf{R}.$$

Remarque. L'espace des solutions linéaires est encore un plan vectoriel, engendré par les "vecteurs" $e^{\lambda \operatorname{Id}} \cos(\omega \operatorname{Id})$ et $e^{\lambda \operatorname{Id}} \sin(\omega \operatorname{Id})$.

Exemple. *Résoudre $f'' + f' + f = 0$ en l'inconnue f à valeurs réelles.*

Le polynôme caractéristique vaut $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, donc f est solution si et seulement s'il y a des réels A et B tels que

$$f = e^{-\frac{1}{2} \operatorname{Id}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Id} \right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Id} \right) \right).$$

2.5.2 Comment trouver (juste) *une* solution

Comme annoncé, on suppose dorénavant que le second membre s est de la forme $e^{\lambda \operatorname{Id}} P$ pour un scalaire λ et un polynôme P. (Le principe de superposition permettra ensuite d'obtenir une solution lorsque s est une somme de tels termes.)

On pourra observer le calcul (très utile)

$$[\exp \times f]' = \exp \times (f + f') \qquad i.\ e. \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(e^t f(t)\right) = e^t (f(t) + f'(t)).$$

[17] qui nécessite des outils d'algèbre linéaire pour ne pas ressembler à du grossier bricolage calculatoire

On utilisera par ailleurs la notation
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} := \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{(penser au carré de } \frac{\partial}{\partial t}\text{)}.$$
Ainsi, on pourra écrire $f''(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t)$ pour toute fonction deux fois dérivable autour d'un réel t donné.

Proposition. *(admise)*
L'équation $f'' + af' + bf = e^{\lambda \operatorname{Id}} P$ admet une solution de la forme $e^{\lambda \operatorname{Id}} Q \operatorname{Id}^{\omega}$ où Q est un polynôme de degré au plus égal à celui de P et où ω désigne l'ordre de λ comme racine de χ.

Exemple 1. *Résoudre $f'' - 3f' + 2f = \exp$ en l'inconnue f (à valeurs réelles).*
Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, donc l'exposant 1 dans le second membre est racine simple de χ. On peut donc chercher une solution sous la forme $t \mapsto e^t t Q(t)$ où Q est un polynôme constant (ici $\deg P = 0$).
Soit $a \in \mathbf{R}$; posons $f : t \mapsto a e^t t$. On a (pour tout réel t) $\frac{\partial}{\partial t}(te^t) = e^t(t+1)$ puis $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(te^t) = e^t(t+2)$, d'où
$$\begin{aligned}[f'' - 3f' + 2f](t) &= ae^t(t(1-3+2) + (2 - 3\cdot 1 + 2\cdot 0)) \\ &= -ae^t.\end{aligned}$$
Puisque l'on veut obtenir $[f'' - 3f' + 2f](t) = e^t$, il suffit de prendre $a = -1$, d'où une solution affine $-\operatorname{Id} \times \exp$.
Vu que les solutions linéaires sont les combinaisons linéaires de $e^{1 \operatorname{Id}}$ et $e^{2 \operatorname{Id}}$, le plan affine des solutions s'écrit $\mathbf{R}\exp + \mathbf{R}e^{2\operatorname{Id}} - \operatorname{Id}\exp$; en d'autres termes, on a l'équivalence (rappelons que $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est donnée et deux fois dérivable)
$$f \text{ solution de } E \iff \exists A, B \in \mathbf{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = (A-t)e^t + Be^{2t}.$$

Exemple 2. *Résoudre $f'' - 4if' - 4f = \operatorname{Id} e^{2i\operatorname{Id}}$ en l'inconnue f (à valeurs complexes).*
Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 4iX - 4 = (X - 2i)^2$, donc l'exposant $2i$ dans le second membre est racine double de χ. On peut donc chercher une solution sous la forme $t \mapsto e^{2it} t^2 Q(t)$ où Q est un polynôme de degré ≤ 1.
Soit $a, b \in \mathbf{R}$; posons $u : t \mapsto e^{2ti} t^2 (at+b) = e^{2ti}\left(at^3 + bt^2\right)$. On a $u'(t) = e^{2it}\left(2iat^3 + (2ib + 3a)t^2 + 2bt\right)$, puis $u''(t) = e^{2it}\left(-4at^3 + (-4b + 6ib + 6ia)t^2 + (4ib + 4ib + 6a)t + 2b\right)$, d'où
$$\begin{aligned}[u'' - 4iu' - 4u](t) &= e^{2it}\begin{pmatrix} t^3(-4a + 8a - 4a) \\ +t^2(-4b + 6ib + 6ia + 8b - 12ia - 4b) \\ +t(4ib + 4ib + 6a - 8ib) \\ +2b \end{pmatrix} \\ &= e^{2it}(6at + 2b).\end{aligned}$$
Puisque l'on veut obtenir $[u'' - 4iu' - 4u](t) = te^{2it}$, il suffit de prendre $(a,b) = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$, d'où une solution affine $\frac{1}{6}\operatorname{Id}^3 \exp^{2i\operatorname{Id}}$.
Vu que les solutions linéaires sont les combinaisons linéaires de $e^{2i\operatorname{Id}}$ et $\operatorname{Id} e^{2i\operatorname{Id}}$, le plan affine des solutions s'écrit $\mathbf{C}e^{2i\operatorname{Id}} + \mathbf{C}\operatorname{Id} e^{2i\operatorname{Id}} + \frac{1}{6}\operatorname{Id}^3 \exp^{2i\operatorname{Id}}$. En d'autres termes, on a l'équivalence (rappelons que $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ est donnée et deux fois dérivable)
$$f \text{ solution de } E \iff \exists A, B \in \mathbf{C},\ \forall t \in I,\ f(t) = \left(A + Bt + \frac{t^3}{6}\right)e^{2it}.$$

Exemple 3. *Résoudre $f'' + f' + f = \exp \times \left(2\operatorname{Id}^2 + \operatorname{Id} - 3\right)$ en l'inconnue f (à valeurs réelles).*
On a déjà résolu l'équation linéaire associée, on se concentre donc sur la recherche d'*une* solution.
L'exposant 1 dans le second memebre n'est pas racine de $\chi = X^2 + X + 1$, donc on peut chercher une solution sous la forme $t \mapsto \left(at^2 + bt + c\right)e^t$ où les réels a, b, c sont à déterminer.
Soient a, b, c, t des réels; posons $u := \exp \times \left(a\operatorname{Id}^2 + b\operatorname{Id} + c\right)$. On a
$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[e^t\left(at^2 + bt + c\right)\right] = e^t\left(at^2 + (2a+b)t + (b+c)\right) \text{ puis} \\ u''(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[e^t\left(at^2 + (2a+b) + (b+c)\right)\right] = e^t\left(at^2 + (4a+b)t + (2a+2b+c)\right), \\ \text{d'où } [u'' + u' + u](t) &= e^t\left(3at^2 + (6a+3b)t + (2a+3b+3c)\right).\end{aligned}$$

Puisque l'on veut $[u''+u'+u](t)=e^t\left(2t^2+t-3\right)$, il suffit d'avoir $(3a, 6a+3b, 2a+3b+3c)=(2,1,-3)$, *i. e.* $(a,b,c)=\left(\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{9}\right)$.

Finalement, les solutions sont de la forme $t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)+e^t\left(\frac{2}{3}t^2-t-\frac{4}{9}\right)$ où A et B décrivent $\mathbf{R}$. En d'autres termes, l'espace des solution est le plan affine passant par le "point" $\exp\left(\frac{2}{3}\operatorname{Id}^2-\operatorname{Id}-\frac{4}{9}\right)$ et dirigé par les "vecteurs" $e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Id}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Id}\right)$ et $e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Id}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Id}\right)$.

2.5.3 Problème de Cauchy

Proposition. *(admise)* *L'équation $f''+af'+bf=s$ admet une unique solution si l'on impose les valeurs de f et de f' en un point donné de l'intervalle I.*

Interprétation. La position d'un mobile soumis à un système de forces (modélisé par une équation du second ordre) est entièrement déterminé par sa position et sa vitesse initiales

En pratique. Une fois résolue l'équation E, évaluer la solution trouvée et sa dérivée au point donné fournit une équation en les constantes A et B que l'on résoud aisément.

Exemple. *Trouver la fonction $\Sigma: I\longrightarrow\mathbf{R}$ telle que $\Sigma''+\Sigma'+\Sigma=0$ et $\Sigma(0)=0$ et $\Sigma'(0)=1$.*

On sait que Σ est de la forme $e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Id}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Id}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Id}\right)\right)$ pour deux réels A et B. Les conditions initiales s'écrivent $A=0$ et $B\frac{\sqrt{3}}{2}=1$, d'où l'on tire $\Sigma=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Id}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Id}\right)$.