Rappels sur le langage fonctionnel

lundi 17, mardi 18, mercredi 19, lundi 24, mardi 26 & mercredi 27 septembre 2012

Table des matières

1 Fonctions, images, flèches $\longrightarrow$ et $\longmapsto$, applications

Une ***fonction*** est une correspondance entre deux ensembles d'objets, le premier dit $\left\{\begin{array}{ll} & \textbf{\textit{de départ}} \\ \text{ou} & \textbf{\textit{source}} \\ \text{ou} & \textbf{\textit{initial}} \end{array}\right.$, le second dit $\left\{\begin{array}{ll} & \textbf{\textit{d'arrivée}} \\ \text{ou} & \textbf{\textit{but}} \\ \text{ou} & \textbf{\textit{terminal}} \end{array}\right.$, telle qu'à tout objet de départ corresponde *AU PLUS* un objet d'arrivée.

Considérons un objet o de départ.

S'il lui correspond *via* une fonction un objet o' d'arrivée, on dit que f est ***définie*** en o, que o' est l'***image*** de o (par cette fonction) et que o est un ***antécédent*** de o'. On note alors $o \mapsto o'$ (la flèche $\mapsto$ se lit "donne", "a pour image" ou "est envoyé sur").

Dans le cas contraire, l'objet n'a pas d'image et la fonction n'y est pas définie.

Remarque (grammaticale)

le / la / l'	article *défini*	on sait de qui on parle	UNICITÉ
un / une	article *in*défini	on pourrait parler d'un / d'une autre	PLURALITÉ POSSIBLE

Exemples (de fonctions)

1. même ensemble de départ et d'arrivée, correspondance $o \mapsto o$. L'image d'un objet lui est *identique*, c'est pourquoi cette fonction s'appelle l'***identité*** (de l'ensemble source considéré).
2. source = but = $\mathbf{C}$, correspondance $c \mapsto 2c$. C'est la fonction "doubler". Par exemple, $e^{i\frac{\pi}{3}} \mapsto 1 + i\sqrt{3}$.
3. départ = $\mathbf{R}$, arrivée = $\mathbf{R}_+$, $\sigma \mapsto$ l'unique racine carrée positive de σ. Tout réel positif a une image, *e. g.* $4 \mapsto 2$, mais cette fonction n'est définie en aucun réel strictement négatif.
4. source = but = $\mathbf{C}$, $p \mapsto$ projeté de p sur $\mathbf{R}$ parallèlement à $i\mathbf{R}$. [DESSIN] C'est la fonction "partie réelle".

5. départ = plan $\mathbf{C}$ privé du disque unité, arrivée = cercle unité, fonction = projection sur le cercle unité parallèlement à $i\mathbf{R}$ (si deux points possibles, choisir l'image la plus proche de l'antécédent). Exemples [DESSIN] : $18i \mapsto i$, $1 \pm 42i \mapsto 1$, $\frac{1}{2} - 7i \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}$. Cette fonction n'est pas définie en c lorsque $|\mathrm{Re}\, c| > 1$.

Lorsqu'une fonction f est définie en un objet o, l'image de o par f est notée[1]

$$f(o) \qquad \text{(lire "}f\text{ de }o\text{")}$$

(parfois fo ou of). On l'appelle aussi la ***valeur*** de f en o.

Les symboles $f(o)$ dénotant l'image (qui est un objet à l'arrivée) se divisent, outre les parenthèses, en

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{un symbole dit de fonction } (f) \text{ qui dénote la correspondance ;} \\ \text{un symbole dit d'}\textbf{\textit{argument}}\ (o) \text{ qui dénote un objet au départ} \end{array} \right. .$$

Il n'y a donc pas lieu de confondre les trois symboles o, f et $f(o)$, EN PARTICULIER

des symboles d'image $f(o)$ NE peuvent PAS désigner la fonction f !!!

(On pourra par ailleurs retenir que l'*argument* d'une fonction f dans une suite de symboles du type $f(\partial\mathcal{L}\cdots\blacksquare✠)$ est ce qu'il y a entre les parenthèses.)

Comment il NE FAUT PAS définir une fonction

★ C'est un non-sens de définir une fonction en posant (par exemple) "$f(\beta) = 5\beta^2 + 18$" car :

1. (ensemble source ?) on ne sait pas où β *pourrait* être ;
2. (quel objet au départ ?) on ne sait pas *qui* est β dans l'ensemble source (fût-il précisé) ;
3. (homogénéité ?) les symboles $f(\beta)$ dénotent un *objet* (d'arrivée) ET NON la *fonction* f.

Comment on PEUT définir une fonction.

On pourrait dire "*Posons pour tout δ réel* $f(\delta) := 5\delta^2 + 18$". Cela définira implicitement une fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ q & \longmapsto & f(q) \end{array} \right.$ que l'on fortement envie d'appeler f (et on le fait).

★Remarque ($\longrightarrow$ et $\longmapsto$). La flèche $\longrightarrow$ précise les ensembles source et but. Elle ne dit absolument rien de la correspondance, désignée par la flèche $\longmapsto$. On prendra donc garde à ne pas confondre les flèches $\longrightarrow$ et $\longmapsto$. Il serait par exemple complètement insensé d'écrire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longmapsto & \mathbf{R} \\ \mu & \longrightarrow & f(\mu) \end{array} \right.$ car cela dénoterait la "fonction" qui part de l'ensemble μ (qui est-il, d'ailleurs ?) pour arriver dans l'ensemble $f(\mu)$ (même si on savait qui était μ, de quel ensemble peut-on bien parler lorsqu'on écrit $5\mu^2 + 18$?) et qui associe à tout élément $\mathbf{R}$ de μ l'élément $\mathbf{R}$ de $5\mu^2 + 18$ (ce serait donc la fonction identité $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$?) : difficile de trouver un sens raisonnable dans tout cet *imbroglio* !

Comment définir une fonction de manière CONCISE.

On pose/définit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \nu & \longmapsto & 5\nu^2 + 18 \end{array} \right.$ (lire "*On définit une fonction, que l'on appellera/notera f, qui à un réel ν associe le réel* $5\nu^2 + 18$").

Trois variantes : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 5x^2 + 18 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \underset{f}{\longrightarrow} & \mathbf{R} \\ \zeta & \longmapsto & 5\zeta^2 + 18 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ e & \overset{f}{\longmapsto} & 5e^2 + 18 \end{array} \right.$.

Remarque (symboles muets) Dans toutes les définitions ci-dessus, le symbole situé avant $\mapsto$ (ainsi que toutes ses autres occurrences[2]) NE dénote absolument RIEN, il sert uniquement à DÉCRIRE la correspondance (ci-dessus, on a utilisé à cette fin les lettres q, μ, ν, x, ζ, e). On dit que c'est un ***symbole muet*** (comme dans les énoncés existentiels, *cf.* digression du cours précédent).

La même règle d'or s'applique à l'introduction de symboles muets pour définir des fonctions :

on ne peut pas utiliser pour symbole muet
un symbole qui dénote déjà un objet singulier.

[1] la lecture "f de o" est sans doute une abréviation de "f est fonction de o"

[2] Une ***occurrence*** d'un symbole est un lieu où apparaît ce symbole (a place where its appearing *occurs*). Par exemple, le nombre mille onze écrit en chiffres possède trois occurrences du chiffre 1 et une occurrence du chiffre 0.

Si l'on viole cette règle, par exemple en définissant une "fonction" $\begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ 2 & \longmapsto & 2^2+2\times 2 \end{cases}$, on ne sait pas quelle correspondance choisir entre $x \mapsto x^2+2x, \quad x \mapsto 2^x+2\times 2, \quad x \mapsto x^x+x\times x, \quad x \mapsto x^x+2\times 2$...

Comment il NE FAUT PAS définir une fonction

★ C'est un non-sens de définir une fonction en "posant $f : t \mapsto f(t)$" car le "$f(t)$" dénote une image par la fonction f qui n'est pas encore définie ! Cette définition qui se mord la queue est à rejeter.

★ Même une fois définie une fonction f, écrire "$f : \xi \mapsto f(\xi)$" n'a AUCUN INTÉRÊT. En effet, ce serait dire "f envoie un objet ξ sur son image par f", ce qui est précisément la définition de l'image !

L'acte d'application, fonction & application.

Quand on transforme un objet o, où une fonction f est définie, en son image par cette fonction, on dit que l'on ***applique*** la fonction f sur/en l'objet o.

*Cet acte, l'**application**, est le mode d'interaction fondamental en mathématique*
– et c'est nous *qui en sommes l'agent, en toute liberté et en toute responsabilité.*

On pourrait donc parler, au lieu de fonction, d'"applicable" (ce qui peut être appliqué). De fait, on appelle ***application***[3] toute fonction définie *en tout point de* son ensemble source.

★ Une application n'applique rien du tout car elle n'agit pas d'elle-même : c'est *nous* qui décidons de l'appliquer (ou non) sur tel ou tel objet[4].

Remarque. Toute fonction peut être vue comme une application si l'on retire de son ensemble source les objets où elle n'est pas définie.

2 Graphes

Une application est caractérisée par

1. deux ensembles (sa ***source*** et son ***but***) :
2. la donnée conjointe de couples $\binom{o}{o'}$ où o décrit / parcourt / varie dans l'ensemble source et où o' tombe toujours dans l'ensemble but ; cette donnée de couples constitue le ***graphe*** de l'application.

Lorsque source et but sont des parties de $\mathbf{R}$, on représente le graphe dans le plan en mettant

$$\begin{cases} \text{les objets source en abscisse} \\ \text{les objets but en ordonnée} \end{cases}.$$

[dessin : trois points avec abscisses/ordonnées, un bout de courbe discontinue, les notations points plein/vide pour la discontinuité]

MOTIVATION : beaucoup de choses se *lisent* sur le graphe grâce à notre *vision*, des choses dont on aura besoin plus tard (dérivées, intégrales, convexité, développement limités) et dont on appréciera la place qu'elles libèreront dans notre mémoire.

Remarque fondamentale (unicité de l'image)

À la verticale de tout point de l'axe des abscisses,
il n'y a AU PLUS *qu'*UN SEUL *point du graphe.*

En d'autres termes :

toute droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées)
ne peut couper le graphe en plus d'un point.

[3] en anglais ***map*** ou ***mapping***

[4] Une application est donc plus bien *applicable* (possibilité) qu'*application* (le fait, l'acte).

Contre-exemple. Le cercle unité n'est pas le graphe d'une fonction car le réel $-\frac{1}{2}$ a deux "images" $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$

Exemple. [dessin : un graphe avec plein de droites verticales]

Convention. Lorsqu'une fonction semble tendre vers deux valeurs différentes autour d'un point, on indique l'image de ce point par un point plein $\bullet$ et on indique l'autre valeur limite par un point vide $\circ$.

Exemples usuels. [un dessin pour chaque avec le nom de la fonction]

1. application ***constante***[5] : droite horizontale (*i. e.* parallèle à l'axe des abscisses), *e. g.* $4 : t \mapsto 4$.
2. application identité $\mathrm{Id} : \square \mapsto \square$: première bissectrice.
3. ***homothétie*** $u \mapsto \lambda u$ (où λ est un scalaire donné) : droite passant par l'origine et de pente λ, *e. g.* $3\,\mathrm{Id}$.
   Remarque Le graphe d'une homothétie étant une ligne (droite) on parlera d'applications ***linéaires*** pour désigner les homothéties de $\mathbf{R}$.
4. application ***affine*** $\omega \mapsto \lambda\omega + \mu$ (où λ et μ sont des scalaires fixés) : droite de pente λ et d'ordonnée à l'origine μ, *e. g.* $\frac{1}{2}\,\mathrm{Id} - 3$.
   Remarque. Une telle application transforme une droite en une autre droite, donc en une figure semblable, similaire, qui possède des *affinités* avec la figure de départ. C'est de là que vient la terminologie d'*affine*.
   MNÉMO :
   $$\text{linéaire} = \text{affine qui passe par } 0.$$
5. ***valeur absolue*** $|\cdot| : r \mapsto \begin{cases} r \text{ si } r \geq 0 \\ -r \text{ si } r \leq 0 \end{cases}$, le graphe possède un ***point anguleux*** en l'origine.
6. ***partie entière*** $\lfloor \cdot \rfloor : a \mapsto \begin{array}{c}\text{le plus grand} \\ \text{entier} \leq a\end{array}$, graphe en escalier, $\lfloor k \rfloor = k$ pour tout entier relatif k.
7. élever au carré $\mathrm{Id}^{\times 2} : \gamma \mapsto \gamma^2$: ***parabole***.
8. racine carrée $\sqrt{\cdot}$: demi-parabole.
9. inverser ($\frac{1}{\mathrm{Id}}$ ou $\frac{1}{\cdot}$) : ***hyperbole***. On a une ***asymptote*** verticale en 0 et uns asymptote horizontale (d'ordonnée 0).
10. exponentielle $\exp : t \mapsto e^t$: croît très très très vite (

x	0	1	2	3	5	10
$e^x \simeq$	1	3	7	20	148	22026

) (asymptote horizontale d'ordonnée 0).
11. logarithme népérien ou naturel : ln (asymptote verticale en 0).
12. sinus et cosinus : les graphes sont des ***sinusoïdes***.
13. ***sinus cardinal***[6] $\mathrm{sinC} : \begin{cases} g \neq 0 \mapsto \frac{\sin g}{g} \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$: sinusoïde coincée entre les graphes de $t \mapsto \pm\frac{1}{t}$ (dits ***enveloppes*** du graphe de sinC).
14. tangente : asymptotes verticales en $\frac{\pi}{2}$ *modulo* π.

Remarque (nominale). On observera les *noms* des fonctions utilisés plutôt que la lourde notation $x \mapsto f(x)$ (qui impose d'écrire une flèche et deux fois l'argument) :

4 (dénote à la fois le réel 4 et la fonction partout égale à 4), Id, $3\,\mathrm{Id}$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Id} - 3$, $|\cdot|$, $\lfloor \cdot \rfloor$, $\mathrm{Id}^{\times 2} := \mathrm{Id} \times \mathrm{Id}$, $\sqrt{\cdot}$, $\frac{1}{\mathrm{Id}} = \frac{1}{\cdot}$, exp, ln, sin, cos, sinC, tan.

Le point $\cdot$ est une abréviation de Id : on lui substituera donc l'argument.

Exemples (d'écritures avec des noms de fonctions)

$f(\cdot) = f$ pour toute fonction f

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\cos = \frac{e^{i\cdot} + e^{-i\cdot}}{2}$

$\ln \frac{1-\cdot}{1+\cdot} : t \mapsto \ln \frac{1-t}{1+t}$

$\frac{\cos(2\cdot)}{\sqrt{\cdot}} : \theta \mapsto \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\theta}}$

(extrême) la fonction $\exp^{\times 3}\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{Id}} - \ln|\cdot|}{5\,\mathrm{Id} + 42} + \tan^{\lfloor \cdot \rfloor}\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right)$ agit sur un réel β en l'envoyant sur $\left[e^{\frac{\sqrt{1+\beta} - \ln|\beta|}{5\beta + 42} + \tan^{\lfloor \beta \rfloor}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right]^3$.

[5] la seconde acception de *constant* dans le TLF lit "*Qui présente un caractère de permanence, de continuité ou de stabilité*".

[6] servira en physique lorsqu'on observera des ondes interférer

Remarque. On précise dans l'exposant de $\mathrm{Id}^{\times 2}$ qu'on itère la *multiplication* $\times$ (car on pourrait itérer d'autres produits, comme la composition que l'on va voir).

Question. Étant donnée une fonction f et deux scalaires λ et μ, comment construire les graphes des fonctions

$$\begin{array}{cc} f(\lambda - \mathrm{Id}) & f+\mu \\ f(\mathrm{Id}+\lambda) & \mu f \\ f(\lambda\cdot) & \mu - f \end{array} \quad ?$$

[dessin : le graphe de f est $|\cdot|$ sur $\mathbf{R}_-$ et $\mathrm{Id}^{\times 2}$ sur $\mathbf{R}_+$, puis pour chacune des six cas le graphe de la fonction modifié superposé à celui de f]

$f+\mu$: translation verticale de μ

$\mu - f$: réflexion d'axe horizontal $\frac{\mu}{2}$ (MNÉMO : le "milieu" de f et $\mu - f$ vaut $\frac{f+(\mu-f)}{2} = \frac{\mu}{2}$)

μf : ***affinité***[7] par rapport à l'axe des abscisses (pour tout abscisse a, appliquer une homothétie de centre $\binom{a}{0}$ et de rapport μ sur le point $\binom{f}{f(a)}$) ★ le graphe n'est pas translaté ! (en effet, les angles ne sont pas toujours conservés)

$f(\mathrm{Id}-\lambda)$: translation horizontale de vecteur $+\lambda$ ★ gaffe aux signes $\pm\lambda$!

$f(\lambda - \mathrm{Id})$: réflexion d'axe vertical $\frac{\lambda}{2}$ (MNÉMO : le "milieu" des arguments Id et $\lambda - \mathrm{Id}$ vaut $\frac{\mathrm{Id}+(\lambda-\mathrm{Id})}{2} = \frac{\lambda}{2}$)

$f(\lambda\cdot)$ affinité par rapport à l'axe des ordonnées de rapport $\frac{1}{\lambda}$ ★ gaffe à l'inversion $\lambda^{\pm 1}$!

Sanity checks : repérer des éléments *distingués* du graphe.

Exemple. La fonction $|\mathrm{Id}-1|$ possède un *pic* lorsque le truc dans la valeur absolue s'annule, *i. e.* en 1. On va donc translater le graphe de $|\cdot|$ de $+1$ horizontalement (et non de -1).

Exemple. La fonction $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}-3}$ a un *pôle* lorsque le dénominateur s'annule, *i. e.* en $\frac{3}{2}$. De même, la fonction $\frac{1}{\mathrm{Id}-3}$ a un pôle en 3. On part donc du graphe de $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ (une hyperbole), on le translate de $+3$ horizontalement (et non de -3) pour obtenir le graphe de $\frac{1}{\mathrm{Id}-3}$, puis on applique une affinité par rapport à l'axe des ordonnées de rapport $\frac{1}{2}$ (et non de rapport 2) pour obtenir le graphe de $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}-3}$.

Remarque. Le graphe de $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}-3}$ est plus "contracté" que celui de $\frac{1}{\mathrm{Id}-3}$, c'est une conséquence de ce que le rapport de l'affinité est strictement plus petit que 1 en valeur absolue.

3 Composition

On note $A \xrightarrow{f} B$ ou $f : A \longrightarrow B$ pour signifier que f est une application de A $\begin{array}{c}\text{dans}\\ \text{vers}\\ \cancel{\text{sur}}\end{array}$ B (le mot "sur" sera réservé *exclusivement* aux surjections).

Donnons-nous deux applications $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$: d'une part les images par f tombent dans B, d'autre part g est définie sur tout B, donc g est définie sur toute image par f. Il fait donc sens de considérer, pour tout objet a de A, l'image $g(f(a))$ (qui tombe dans C). L'application ainsi définie $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ a & \longmapsto & g(f(a)) \end{array}\right.$ s'appelle la ***composée*** de f par g et est notée $g \circ f$ (lire "g rond f"). On retiendra l'action d'une composée sur un objet a de départ :

$$[g \circ f](a) := g(f(a)).$$

Remarque (parenthèses & crochets) Lorsque de nombreuses parenthèses viendront obscurcir le discours, on gagnera à distinguer celles qui associent les *arguments* de celles qui associent les *fonctions*. Comme l'illustre la formule précédente, nous conviendrons d'associer les fonctions avec des *crochets*.

★ On applique d'abord f puis g : pour s'en souvenir, regarder les flèches $\left\{\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a & \longmapsto & f(a) & \longmapsto & g(f(a)) \end{array}\right.$. Dans le doute, on pourra dire "composée de f par-g-à-gauche" ou "composée de g par-f-à-droite".

★ La composition $\circ$ n'est pas commutative :

$$g \circ f \neq f \circ g \qquad \text{en général.}$$

Deux raisons :

[7] Le terme est introduit par Léonard Euler en 1748, qui remarque (en français dans le texte) que deux courbes obtenues l'une de l'autre en changeant l'échelle des abscisses ne sont pas semblables mais qu'elles ont quand même une certaine « affinité ».

1. **PAS DE SENS**. Supposant $g \circ f$ bien définie (par exemple si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$), il n'y a aucune raison *a priori* pour que $f \circ g$ le soit : des images de g peuvent tomber en-dehors du domaine A de définition de f, voire *toutes* les images.
   Exemple : la composée $\frac{\pi}{2} \circ \tan$ est définie sur tout $\mathbf{R}$ privé de $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ (elle y vaut partout $\frac{\pi}{2}$) mais la composée $\tan \circ \frac{\pi}{2}$ n'est définie nulle part.
   Exemple : si l'on pose $E : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ et $\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ k & \longmapsto & (-1)^k \end{array} \right.$, alors la composée $\varepsilon \circ E$ est définie sur tout $\mathbf{R}$ [dessiner son graphe] mais la composée $E \circ \varepsilon$ ne l'est que sur $\mathbf{Z}$.
   On retiendra donc :

   avant de se demander si une proposition est vraie,
   on vérifiera en premier lieu si la question a du sens.

2. **FAUX** Une fois le problème du sens levé, il reste plein de contre-exemples. Exhibons-en un.
   On considère les deux applications $\left\{ \begin{array}{ccc} t & \longmapsto & t^2 \\ \mathbf{R} & \xrightarrow{c} & \mathbf{R} \\ a & \overset{s}{\longmapsto} & a+1 \end{array} \right.$ et on regarde les deux composées $\mathbf{R} \underset{soc}{\overset{cos}{\longrightarrow}} \mathbf{R}$ (qui n'ont rien à voir avec *cosinus*) Fixons un réel χ et cherchons à quelle condition les applications $c \circ s$ et $s \circ c$ ***coïncident*** (*i. e.* ont même image) en χ. On a les équivalences

$$\begin{array}{ll} & [c \circ s](\chi) = [s \circ c](\chi) \\ \iff & c(s(\chi)) = s(c(\chi)) \quad \text{(définition de } \circ \text{)} \\ \iff & (\chi+1)^2 = \chi^2 + 1 \quad \text{(définitions de } c \text{ et } s\text{)} \\ \iff & \chi^2 + 2\chi + 1 = \chi^2 + 1 \quad \text{(développer le carré)} \\ \iff & 2\chi = 0 \quad \text{(simplifier par } \chi^2+1\text{)} \\ \iff & \chi = 0 \quad \text{(simplifier par 2).} \end{array}$$

   Ainsi, les composées $c \circ s$ et $s \circ c$ ne coïncident *jamais* (sauf en 0).

Remarque (associativité de $\circ$) La composition est *associative* : lorsque $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, on a toujours l'égalité des deux applications

$$\begin{array}{r} h \circ [g \circ f] \\ = [h \circ g] \circ f \end{array} : a \mapsto h\left(g\boldsymbol{(}f(a)\boldsymbol{)}\right)$$

(**remarque** : lorsque beaucoup de parenthèses s'empilent, on gagnera à les *colorier* par paires pour mieux visualiser la structure (ici on a représenté un coloriage par une police italique grasse)).

Remarque (neutres pour $\circ$) Les applications "identités" $\mathrm{Id}_S : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ s & \longmapsto & s \end{array} \right.$ (pour tout ensemble[8] S) forment autant de *neutres* pour la composition, au sens où l'on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} f \circ \mathrm{Id}_A = f & \text{pour toute application } f \text{ de source } A \\ \mathrm{Id}_B \circ f = f & \text{pour toute application } f \text{ de but } B \end{array} \right. .$$

Notation. Lorsque source et but coïncident, mettons $f : A \longrightarrow A$, il fait sens d'*itérer* l'action de f en considérant les composées successives (appelées ***itérées*** de f)

$$f^{\circ 1} := f, \quad f^{\circ 2} := f \circ f, \quad f^{\circ 3} := f \circ f \circ f, \quad \ldots \quad f^{\circ n} := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \text{ (pour tout entier } n \geq 1\text{).}$$

On observera l'identité $f^{\circ q} \circ f^{\circ p} = f^{\circ(p+q)}$ pour tous entiers $p, q \geq 1$.Afin de prolonger cette identité lorsque l'un des entiers p ou q est nul, on doit poser

$$f^{\circ 0} := \mathrm{Id}, \quad \text{ce qui permet d'écrire} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \mathbf{N} \\ \forall q \in \mathbf{N} \end{array} \right., f^{\circ q} \circ f^{\circ p} = f^{\circ(p+q)}$$

(analogie avec la définition de $0! := 1$ qui permet de prolonger l'identité $n! = (n-1)! \times n$ pour $n = 1$).

EN PRATIQUE Pour appliquer une composée $g \circ f$ sur un objet o :

[8] en anglais, *ensemble* se dit *set*

1. on applique g sur un argument $\square$;
2. on met l'image $f(a)$ à l'intérieur chaque carré $\square$;
3. on retire les contours des carrés $\square$ en gardant des parenthèses au besoin.

Exemple. On donne $f : \mho \mapsto \sqrt[3]{\mho} - e^{\mho}$ et $g : \aleph \mapsto \frac{1-\aleph^2}{\cos\aleph+\ln(\aleph-1)}$. Fixons un objet a : son image par f est $\boxed{\sqrt[3]{a} - e^a}$, donc son image par $g \circ f$ est

$$\frac{1 - \boxed{\sqrt[3]{a} - e^a}^2}{\cos \boxed{\sqrt[3]{a} - e^a} + \ln\left(\boxed{\sqrt[3]{a} - e^a} - 1\right)} = \frac{1 - \left(\sqrt[3]{a} - e^a\right)^2}{\cos\left(\sqrt[3]{a} - e^a\right) + \ln\left(\sqrt[3]{a} - e^a - 1\right)}$$

(il faut garder deux paires de parenthèses, celle dans le ln est inutile).

On retiendra

COMPOSER, c'est SUBSTITUER *(et ça ne commute pas en général).*

4 Injections (& quelques principes logiques)

Graphiquement, les abscisses et ordonnées possèdent une certaine *dualité* : elles sont échangées par la réflexion d'axe la première bissectrice.

Fixons une fonction f et posons la **question** suivante : le symétrique du graphe de f est-il encore le graphe d'une fonction ? L'affirmative serait dire que toute droite verticale coupe le symétrique du graphe de f en au plus un point, ce qui équivaut (en appliquant la réflexion d'axe la première bissectrice) à dire que toute droite *horizontale* ne coupe le graphe de f en au plus un point [dessin : exemple de graphe d'une injection].

Une telle fonction est dite ***injective***. Dans ce cas, la correspondance qui à une ordonnée y associe l'abscisse du point de rencontre entre le graphe de f et la droite horizontale d'ordonnée y est *fonctionnelle*. La fonction ainsi définie est appelée ***réciproque*** de f et est notée f^{-1} (★ rien à voir avec $\frac{1}{f}$). Elle est définie sur l'ensemble des images par f, appelé ***image*** de f et noté $\operatorname{Im} f$ (★ rien à voir avec une partie imaginaire).

Ainsi, toute application $f : A \longrightarrow B$ injective possède une réciproque $f^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}\right.$.

Remarque. Le graphe de f^{-1} s'obtient à en symétrisant celui de f par rapport à la première bissectrice [dessin : 3 exemples : une droite, une hyperbole, un graphe continu par morceaux].

Traduction symbolique. Dire qu'une droite rencontre un lieu géométrique en au plus un point, c'est dire que, quand elle en rencontre deux, ces deux points sont confondus. Or un point du graphe d'une application f a pour coordonnées $\binom{a}{f(a)}$ pour un certain élément source a. L'injectivité s'énonce donc : si des points $\binom{a}{f(a)}$ et $\binom{\alpha}{f(\alpha)}$ ont même ordonnée, alors ils sont égaux ; autrement dit, l'égalité $f(a) = f(\alpha)$ implique les égalités $\left\{\begin{array}{c} a = \alpha \\ f(a) = f(\alpha) \end{array}\right.$ (lesquelles équivalent à $a = \alpha$ puisque $f(a) = f(\alpha)$ en découle en appliquant f). Par conséquent :

une application f de source A est injective ssi

$$\begin{array}{l} \forall a \in A \\ \forall \alpha \in A \end{array}, \ \left(f(a) = f(\alpha) \Longrightarrow a = \alpha \right).$$

Remarque (implication) Le symbole $\Longrightarrow$ est appelé symbole d'***implication***[9], il se prononce "*implique*" ou "*entraîne*". Lorsque p et q sont des propositions données,

affirmer l'implication $p \Longrightarrow q$, c'est
affirmer que q est vraie <u>SI</u> p est vraie

(★ ce n'est donc *ni* affirmer p, *ni* affirmer quoi que ce soit lorsque p est faux).

[9]certains auteurs le notent plus légèrement $\longrightarrow$, ce que nous préférerons éviter

Remarque (négation, conjonction) Considérons une propositions p. On note $\neg p$ ou $^{\neg}p$ ou $\overline{p}$ (lire "*non p*") la ***négation*** de p, laquelle est déclarée vraie ssi p est fausse. Ainsi,

affirmer $\neg p$, c'est nier p.

Le ***principe de non-contradiction*** énonce qu'on ne peut jamais avoir à la fois une proposition et sa négation, ce qui s'écrit $\neg(p \wedge \neg p)$. Le symbole $\wedge$ se lit "*et*" et est appelé symbole de ***conjonction***.

Remarque (tiers-exclu, disjonction) En mathématique classique, parmi une proposition et sa négation, l'une ou l'autre est satisfaite, il n'y a pas de *tierce alternative*. Ce ***principe du tiers-exclu*** s'écrit

$$p \vee \neg p \qquad \text{(pour toute proposition } p\text{)}.$$

Le symbole $\vee$ se lit "*ou*" et est appelé symbole de ***disjonction***[10]. On pourrait déduire de ce principe l'équivalence

$$\neg\neg p \iff p \qquad \text{(pour toute proposition } p\text{)}$$

(la négation $\neg$ agit donc "comme un miroir").

Remarque (contraposée, équivalence). Affirmer une implication $p \Longrightarrow q$ permet d'affirmer l'implication $\neg q \Longrightarrow \neg p$ (appelée ***contraposée*** de $p \Longrightarrow q$) (très utile pour établir un alibi !). Cette dernière implication permet d'affirmer (toujours par ***contraposition***) l'implication $\neg\neg p \Longrightarrow \neg\neg q$. Or un autre principe logique est très couramment utilisé :

*lorsque deux assertions p et p' sont équivalentes (*i. e.* quand on a l'équivalence $p \iff p'$),*
on ne change pas la valeur de vérité d'un énoncé où p apparaît si l'on $\begin{array}{l} \textit{substitue } p' \textit{ à } p \\ \textit{remplace } p \textit{ par } p' \end{array}$.

(★ gaffe à l'ordre des compléments (in)directs des verbes remplacer/substituer !). D'après ce principe, de l'implication $\neg\neg p \Longrightarrow \neg\neg q$ on pourra déduire l'implication $p \Longrightarrow q$. La conclusion de cette remarque est le principe suivant :

affirmer $p \Longrightarrow q$ revient à affirmer $\neg q \Longrightarrow \neg p$ (principe de ***contraposition***).

Les remarques logiques ci-dessus permettent d'exprimer l'injectivité d'une autre façon :

une application f de source A est injective ssi

$$\begin{array}{l} \forall a \in A \\ \forall \alpha \in A \end{array}, \ (\ a \neq \alpha \Longrightarrow f(a) \neq f(\alpha)\ ),$$

i. e. ssi f préserve la relation $\neq$ (la différence, le fait d'être distinct).

[dessin : deux patatoïdes A plus petit que B, l'image $A' := \operatorname{Im} f$ dans B]

L'image $A' := \operatorname{Im} f$ constitue ainsi une "*copie*" de A à l'arrivée ; on a en quelque sorte "*injecté*" la source A dans le but B (d'où la terminologie "*injective*").

Il arrivera que l'on *identifie* carrément l'ensemble A à son ***image*** A' (ensemble des images des objets de A) dans B ; *modulo* cette identification, l'***inclusion***[11] $A' \subset B$ (signifiant que tout élément de A' est un élément de B) pourrait s'écrire $A \subset B$ (*non-sens a priori* car les éléments de A et ceux de B n'ont rien à voir). Afin de rappeler l'identification *via* l'application $A \xrightarrow{f} B$,

on écrira $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ (ou $f : A \hookrightarrow B$) pour signifier que $\begin{array}{l} f \textit{ est une injection de } A \textit{ dans } B \\ f \textit{ injecte } A \textit{ dans } B \\ f : A \longrightarrow B \textit{ est injective} \end{array}$

(le symbole $\hookrightarrow$ est une fusion des symboles d'inclusion $\subset$ et d'application $\longrightarrow$).

Exemple. Lorsque $A \subset B$, on a une ***injection canonique***[12] $\left\{ \begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \end{array} \right.$ (qui agit comme l'identité).

[10] Cette terminologie est confusante car laisse penser que, lorsqu'on affirme une disjonction $p \vee q$, les deux propositions p et q sont *disjointes*, n'ont rien à voir, comme si $\vee$ signifiait "ou bien", à savoir un "ou" *exclusif*. Il n'en est absolument rien : le "ou" que l'on lit dans $\vee$ est un "ou" *inclusif* : on peut ainsi tout à fait affirmer $(1 \geq 0) \vee (0 \geq -1)$.

[11] le symbole $\subset$ est appelé symbole d'***inclusion*** et se lit "*est inclus(e) dans*".

[12] en anglais ***inclusive mapping***

Exemple. L'injection $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \hookrightarrow & \mathbf{C}=\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ a & \longmapsto & a+0i=\binom{a}{0}\end{array}\right.$ est la manière usuelle de "voir" **R** dans **C**, de ***plonger*** la droite réelle dans le plan complexe.

Remarque (structurelle) Cette injection (appelons-la ι) *préserve la structure* de **R**, au sens où elle en respecte les lois (+ et $\times$) : on a pour tous réels a et b les égalités

$$\begin{array}{r}\underline{\iota(a)+\iota(b)=}(a+0i)+(b+0i)=((a+b)+0i)\underline{=\iota(a+b)} \\ \text{et } \underline{\iota(a)\times\iota(b)=}(a+0i)\times(b+0i)=ab+0i\underline{=\iota(a\times b)}\end{array}.$$

On parle d'***homomorphisme***[13] (ou de ***morphisme*** tout court). Un morphisme injectif (comme ι) est appelé ***monomorphisme***[14] ou ***plongement***.

Contre-exemple : l'injection $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \overset{i\cdot}{\hookrightarrow} & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & ia\end{array}\right.$ n'est pas un morphisme multiplicatif car, étant donnés deux réels a et b, les complexes $[i\cdot](a\times b)$ et $[i\cdot](a)\times[i\cdot](b)$ ne coïncident jamais (sauf si a ou b est nul) :

$$[i\cdot](a)\times[i\cdot](b)=ia\times ob=-ab\neq iab=[i\cdot](a\times b).$$

Exercice. Soit λ un complexe. Montrer que l'application $\mathbf{R}\xrightarrow{\lambda\cdot}\mathbf{C}$ (multiplication par λ) est un monomorphisme ssi $\lambda=1$ (hints : $\begin{array}{c}\text{morphisme}\iff\lambda^2=\lambda \\ \text{injectif}\iff\lambda\neq 0\end{array}$).

Contre-exemples (à l'injectivité).

[dessin : parabole] $\mathrm{Id}^{\times 2}$ n'est pas injective car 1 et -1 ont même image

[dessin : sinusoïde] cos n'est pas injective car $\pm\frac{\pi}{2}$ ont même image.

Plus généralement, une fonction *paire* n'est *jamais*[15] *injective* car a et $-a$ ont même image et sont distincts pour tout objet a (non nul).

Remarque (lois de De Morgan) ***Nier*** (*i. e.* établir la négation de) une conjonction $p\wedge q$ revient à nier l'une ou l'autre des propositions p ou q[16], ce qui s'écrit

$$\neg(p\wedge q)\iff(\neg p\vee\neg q)\qquad(\textit{\textbf{loi de De Morgan}}).$$

Or on peut toujours voir un énoncé ***universel*** (*i. e.* de la forme "$\forall a\in A,\ p(a)$") comme une conjonction généralisée (peut-être infinie) et un énoncé ***existentiel*** (*i. e.* de la forme "$\exists a\in A,\ p(a)$") comme une disjonction généralisée (peut-être infinie). La loi de De Morgan se généralise de fait à ces énoncés :

$$\neg(\forall a\in A,\ p(a))\iff(\exists a\in A,\ \neg p(a))\qquad(\textit{\textbf{loi de De Morgan généralisée}}).$$

Traduction en français :

pour nier *un énoncé universel, il suffit*
d'exhiber au moins un *contre-exemple.*

C'est ce que l'on a fait pour infirmer l'injectivité des fonctions paires ci-dessus.

Exemples (d'injections) L'identité Id, les homothéties $\lambda\,\mathrm{Id}$ de rapport non nul, toute application affine $\lambda\,\mathrm{Id}+\mu$ de pente non nulle. Toutes ces injectivités ont une interprétation graphique évidente : [dessin $\lambda\,\mathrm{Id}+\mu$ avec $\lambda\neq 0$ et plusieurs droites horizontales] une droite non horizontale n'est coupée au plus qu'une fois par toute droite horizontale.

Mais comment *prouver* proprement ces injectivités ?

Principe fondamental (invocation).

[13] homo↔même, morphe↔forme↔structure
[14] mono↔un↔injectif
[15] en toute rigueur, il y a une exception : le cas pathologique d'une fonction définie *uniquement* en 0
[16] Nier que toutes les fenêtres sont ouvertes, ce n'est pas affirmer que toutes les fenêtres sont fermées (suggestion insidieuse de la traduction usuelle "toutes les fenêtres ne sont pas ouvertes") mais c'est affirmer qu'il y existe *au moins une* fenêtre qui n'est pas ouverte, à savoir qu'il y a (au moins) une fenêtre fermée.

Pour montrer un énoncé universel, mettons "$\forall a \in A,\ p(a)$" :

1. *on* $\begin{array}{c}\textit{considère}\\ \textit{se donne}\\ \textit{invoque}\\ \boxed{\textit{fixe}}\end{array}$ *un objet a dans A grâce à l'abracadabra* $\boxed{\text{"Soit } a \in A\text{"}}$;
2. *on montre la proposition $p(a)$ pour* $\boxed{\text{ce}}$ *a* $\begin{array}{c}\textit{considéré}\\ \textit{donné}\\ \textit{invoqué}\\ \textit{fixé}\end{array}$

(le caractère "quelconque" du choix de a permettant alors d'en déduire la généralité).

Ces principes logiques étant rappelés, montrons proprement l'injectivité d'une fonction affine non constante.
On veut montrer que, étant donnés deux réels $\lambda \neq 0$ et μ, la fonction $\lambda \operatorname{Id} + \mu$ est injective (appelons-la f).
Pour montrer cela, on fixe deux réels a et α tels que $f(a) = f(\alpha)$. (Usuellement, on dirait "*Soient a et α deux réels tels que* $f(a) = f(\alpha)$".) Cela s'écrit $[\lambda \operatorname{Id} + \mu](a) = [\lambda \operatorname{Id} + \mu](\alpha)$ (par définition de f), *i. e.* $\lambda a + \mu = \lambda\alpha + \mu$ (définition de $\lambda \operatorname{Id} + \mu$), *i. e.* $\lambda a = \lambda \alpha$ (en simplifiant par μ), *i. e.* $\lambda(a - \alpha) = 0$ (en factorisant par λ), *i. e.* $\left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ a - \alpha \end{array}\right.$ (on invoque l'***intégrité*** de $\mathbf{R}$, à savoir qu'un produit de réels est nuls ssi l'un des facteurs est nul, ce qui s'écrit formellement $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbf{R}, \\ \forall y \in \mathbf{R}, \end{array}\right. \quad (xy = 0) \iff ((x = 0) \vee (y = 0))$; on dit aussi que $\mathbf{R}$ est ***intègre***[17]).Or le cas $\lambda = 0$ contredit l'hypothèse $\lambda \neq 0$; il reste donc $a - \alpha = 0$, *i. e.* $a = \alpha$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La légitimité du dernier "donc" repose sur la ***tautologie***[18] $p \vee q \Longrightarrow (\neg p \Longrightarrow q)$ que l'on a ***instanciée***[19] selon $\left\{\begin{array}{l} p \leftarrow \text{"}\lambda = 0\text{"} \\ q \leftarrow \text{"}a - \alpha = 0\text{"} \end{array}\right.$.

Remarque. On n'avait besoin dans la démonstration qui précède que d'*implications* $\Longrightarrow$, les équivalences (*i. e.*) sont ici superflues.

Exerçons-nous à montrer des énoncés universels.

Proposition. *Soit $f : A \hookrightarrow B$ injective. Sa réciproque f^{-1} vérifie* $\left\{\begin{array}{l} \forall a \in A,\ f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall b \in \operatorname{Im} f,\ f\left(f^{-1}(b)\right) = b \end{array}\right.$.

Démonstration.

Soit $a \in A$. L'objet a est toujours un antécédent de son image $f(a)$; il est ici le seul antécédent par injectivité de f. On en déduit que f^{-1} envoie $f(a)$ sur son unique antécédent a, ce qui s'écrit $f^{-1}(f(a)) = a$, d'où la première égalité.

Soit $b \in \operatorname{Im} f$. Par définition de $\operatorname{Im} f$, il y a un $\alpha \in A$ dont b est l'image $f(\alpha)$. Alors $f^{-1}(b) = f^{-1} f(\alpha) = \alpha$ d'après ce qui précède (***spécialiser***[20] l'énoncé universel "$\forall a \in A,\ f^{-1}(f(a)) = a$" selon $a \leftarrow \alpha$), d'où (en appliquant f) l'égalité $f\left(f^{-1}(b)\right) = f(\alpha) = b$, ce qui montre la seconde égalité.

[17] La seconde entrée du TLF pour *intègre* lit "*Qui est incorruptible ; qui est d'une probité sans faille, qui pratique la justice de manière rigoureuse*". Il faut donc comprendre, lorsqu'on dit que $\mathbf{R}$ est intègre, qu'il ne nous *trompe* pas quant à la nullité d'un produit. On verra plus tard des structures où un produit d'objets non nuls peut s'annuler, structures non intègres que l'on a envie de qualifier de *fourbes*.

[18] énoncé reliant des symboles de propositions qui est vrai pour tout choix de propositions instanciant ces symboles (*cf.* note suivante pour le sens d'*instancier*)

[19] Dans un groupement fini de symboles, remplacer certains de ces symboles chacun par un groupe de symboles est appelé ***instancier***, le résultat de cet acte (l'***instanciation***) est une ***instance*** (c'est la *forme **instant**anée* que prend le groupe de symboles à un moment du discours, c'est la forme locale qu'elle revêt dans le contexte considéré – moment ou contexte donné par les substitutions).

[20] La spécialisation – le fait de donner une valeur spéciale à – est un cas particulier d'instanciation où l'on instancie un (symbole d')objet *générique* (*e. g.* quantifié) en un (symbole d')objet *singulier* (*e. g.* une constante ou un objet précédemment invoqué).

5 Restrictions (& quelques principes logiques)

On peut rendre certaines fonctions injectives en restreignant leur ensemble de départ. On définit la ***restriction*** d'une application $f : A \longrightarrow B$ à une ***partie***[21] A' de A par l'application $f_{|A'} : \begin{cases} A' & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f(a) \end{cases}$ (qui agit *comme* f). Par exemple, restreindre à tout l'ensemble source ne change rien : $f_{|A} = f$.

Rappelons à cette occasion que

> *deux applications sont égales ssi elles sont mêmes ensembles source et but et si elles coïncident en tout point.*

En symboles, cela s'écrit (ayant fixé quatre ensembles A, A', B, B')

$$\begin{cases} \forall f : A \longrightarrow B \\ \forall f' : A' \longrightarrow B' \end{cases}, \ f = g \Longleftrightarrow \begin{cases} A = A' \text{ et } B = B' \text{ et} \\ \forall a \in A, \ f(a) = f'(a) \end{cases}.$$

Propriété (image d'une composée). *Étant données deux applications $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, on a l'égalité des images*

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im} f}\right).$$

Démonstration. On montre chacune des deux inclusions $\subset$ et $\supset$.

$\subset$ Soit $c \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Il s'écrit $c = [g \circ f](a)$ pour un $a \in A$. Puisque $f(a) \in \operatorname{Im} f$, l'objet $g_{|\operatorname{Im} f}(f(a))$ fait sens et vaut $g(f(a)) = c$, ce qui montre que c est une image par $g_{|\operatorname{Im} f}$.

$\supset$ Soit $c \in \operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im} f}\right)$. Il s'écrit $g_{|\operatorname{Im} f}(b)$ pour un $b \in \operatorname{Im} f$; on a un $a \in A$ tel que $b = f(a)$, d'où $c = g_{|\operatorname{Im} f}(f(a)) = g(f(a)) = [g \circ f](a)$, ce qui montre que c est une image par $g \circ f$.

Exemples (d'injections par restriction). Graphiquement, l'application $\operatorname{Id}^{\times 2}$ (qui n'est pas injective sur $\mathbf{R}$) devient une injection une fois restreinte à $\mathbf{R}_+$. Sa réciproque est par définition l'application ***racine carrée*** $\sqrt{\cdot}$, d'où le graphe de cette dernière [dessin : première bissectrice et graphes de $\operatorname{Id}^{\times 2}$ et $\sqrt{\cdot}$, deux demi-paraboles symétriques par rapport à la première bissectrice].

Démonstration (de l'injectivité de $\operatorname{Id}^{\times 2}_{|\mathbf{R}_+}$). Soient a et b dans $\mathbf{R}_+$ tels que $\operatorname{Id}^{\times 2}(a) = \operatorname{Id}^{\times 2}(b)$ (variante moins systématique : "*Soient a et b deux réels positifs de même carré*"). L'égalité $a^2 = b^2$ se réécrit $a^2 - b^2 = 0$, *i. e.* $(a-b)(a+b) = 0$, *i. e.* $\begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases}$. Dans le premier cas, on est arrivé à ce qu'il fallait démontrer. Dans le second cas, le réel $a = -b$ est d'une part positif (a a été invoqué dans $\mathbf{R}_+$), d'autre part négatif ($-b$ est du signe opposé à b qui a été invoqué dans $\mathbf{R}_+$), donc nul, d'où l'égalité $a = 0 = b$ et la conclusion $a = b$.

Remarque (logique). On a raisonné ici par ***disjonction des cas*** :

des trois affirmations / allégations / assertions / énoncés / propositions / thèses $\begin{cases} p \vee q \\ p \Longrightarrow \theta \\ q \Longrightarrow \theta \end{cases}$, on peut déduire la thèse θ.

Exemple (de disjonction des cas). Montrons qu'un entier a même parité que son carré.

Fixons un entier $a \in \mathbf{Z}$. On admet[22] la disjonction "(a pair) $\vee$ (a impair)". Si a est pair, il s'écrit $a = 2b$ pour un entier $b \in \mathbf{Z}$, donc son carré $a^2 = 2\left(2b^2\right)$ est pair. Si a est impair, il s'écrit $a = 2b+1$ pour un entier $b \in \mathbf{Z}$, donc son carré $a^2 = 2\left(2b^2 + 2a\right) + 1$ est impair. Finalement, on a montré dans chacun des cas de la disjonction "(a pair) $\vee$ (a impair)" que a avait même parité que son carré, *c. q. f. d.*.

Exemple (de disjonction des cas). Montrons qu'il existe un irrationnel α tel que[23] $\alpha^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

[21] Une partie est un sous-ensemble, *i. e.* un ensemble contenu dans. Dire que A' est une partie A revient donc à énoncer l'inclusion $A' \subset A$.

[22] on peut la prouver par *récurrence*, méthode de démonstration dont on parlera plus tard

[23] on rappelle la définition de $a^z := e^{z \ln a}$ pour tout réel $a > 0$ et pour tout complexe z

Considérons le réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. S'il est rationnel, alors l'irrationnel $\sqrt{2}$ convient (on montrera juste après que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$). Sinon, on observe que $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ est rationnel, donc l'irrationnel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ convient[24].

Démonstration (de l'irrationalité de $\sqrt{2}$). Supposons $\sqrt{2}$ rationnel. Il s'écrit donc sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers que l'on peut supposer sans facteur commun (on simplifierait sinon la fraction $\frac{p}{q}$ par un tel facteur). Élever au carré donne $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, d'où $p^2 = 2q^2$. L'entier p^2 est alors pair, donc sa racine p aussi, mettons $p = 2n$ (pour un entier n). Réinjecter dans $p^2 = 2q^2$ donne $(2n)^2 = 2q^2$, d'où la parité de $q^2 = 2n^2$ et celle de q. Mais alors p et q ont un facteur en commun (2), ce qui est contradictoire. On doit en déduire que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, *c. q. f. d.*.

Remarque (logique). La démonstration de $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ met en évident la *définition de la négation* comme ce qui conduit à une contradiction :

$$\neg p := (p \Longrightarrow \mathbb{F}) \qquad \text{où } \mathbb{F} \text{ dénote } \begin{array}{c}\text{le faux}\\ \text{l'absurde}\\ \text{le contradictoire}\end{array}.$$

Traduction en français :

asserter $\neg p$ *(*i. e. *nier* p *) revient à dire que*
l'on ne peut affirmer p *sans aboutir à une contradiction.*

6 Monotonie

Il est immédiat d'observer que le graphe d'une fonction donnée "monte ou "descend". [dessin : un graphe qui monte (avec des sauts et des plats) et un graphe qui descend, avec plusieurs cordes et leur signe indiqué] On formalise cette intuition en disant qu'un graphe $\left\{\text{resp.} \begin{array}{c}\textbf{\textit{monte}}\\ \textbf{\textit{descend}}\end{array}\right.$ si toutes les pentes de ses cordes[25] sont $\left\{\text{resp.} \begin{array}{c}\text{positives}\\ \text{négatives}\end{array}\right.$.

Ainsi, un graphe monte ssi, pour tous nombres $a \neq \alpha$, le réel $f(\alpha) - f(a)$ a même signe que $\alpha - a$ (traduit la positivité de la pente $\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}$). Une rapide disjonction des cas montrerait que cela équivaut à l'implication

$$a \leq \alpha \Longrightarrow f(a) \leq f(\alpha) \text{ pour tous nombres } a \text{ et } \alpha,$$

autrement dit à ce que f *préserve l'ordre*[26]. Une telle fonction est dite ***croissante***[27] (on dit aussi qu'elle ***croît***[28]).

Lorsque toutes les inégalités précédentes sont strictes, on dit que f $\begin{array}{c}\textbf{\textit{croît strictement}} \text{ ou}\\ \text{est } \textbf{\textit{strictement croissante}}\end{array}$.

Dans l'autre sens, une fonction ***décroissante*** (ou qui ***décroît***) est une fonction qui inverse l'ordre :

$$a \leq \alpha \Longrightarrow f(a) \geq f(\alpha) \text{ pour tous nombres } a \text{ et } \alpha \qquad \begin{array}{l}\text{(avec le même usage de}\\ \text{l'adverbe "strictement")}\end{array}.$$

On dit qu'un fonction est ***monotone*** lorsque toutes ses pentes ont même signe (appelé ***sens de variation*** de la fonction), *i. e.* si f croît ou si f décroît.

Exemples. [un graphe pour chaque] Id croît strictement $3 - \frac{\text{Id}}{2}$ décroît strictement $\lfloor\cdot\rfloor$ croît (mais pas strictement) $\sin - \text{Id}$ décroît strictement une fonction constante croît *et* décroît (mais pas

[24] En fait, un théorème de Gelfond-Scheider permet d'affirmer que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel (remarque culturelle complètement hors-programme).

[25] Rappelons qu'une ***corde*** d'une courbe est un segment joignant deux points de cette courbe et que la ***pente*** du segment joignant deux points $\binom{a}{b}$ et $\binom{\alpha}{\beta}$ vaut $\frac{\beta-b}{\alpha-a}$.

[26] on parle alors de ***morphisme*** pour l'ordre

[27] en anglais ***increasing***

[28] l'accent circonflexe sert à distinguer les verbes *croître* et *croire*

strictement) $\quad \mathrm{Id}^{\times 2}$ n'est pas monotone (mais elle décroît strictement sur $\mathbf{R}_-$ et croît strictement sur $\mathbf{R}_+$) $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ n'est pas décroissante (la pente entre les points $\binom{-1}{-1}$ et $\binom{1}{1}$ est positive) mais décroît sur chacun des ensembles $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$.

Proposition. *Une fonction strictement monotone est injective, sa réciproque est strictement monotone et a même sens de variation.*

Démonstration. Soit $f : A \longrightarrow B$ strictement monotone.

Soient $a \neq \alpha$ dans A. Alors $\left\{\begin{array}{l}\text{ou bien } a < \alpha \\ \text{ou bien } a > \alpha\end{array}\right.$. Chacun de ces deux cas implique (par stricte monotonie) $\left\{\text{ou}\begin{array}{l} f(a) < f(\alpha) \\ f(a) > f(\alpha)\end{array}\right.$ (selon le sens de variation), d'où la différence $f(a) \neq f(\alpha)$, ce qui conclut à montrer l'injectivité de f.

Supposons f croissante. Montrons que f^{-1} croît strictement (la démonstration est analogue dans le cas décroissant). Soient $b < \beta$ dans $\operatorname{Im} f$. Il y a des éléments a et α dans A tels que $\left\{\begin{array}{l} b = f(a) \\ \beta = f(\alpha)\end{array}\right.$. Puisque f croît, il est impossible que $a \geq \alpha$ (cela impliquerait $f(a) \geq f(\alpha)$, *i. e.* $\beta \geq b$, contredisant l'ordre des objets invoqués), d'où il résulte $a < \alpha$, *i. e.* $f^{-1}(b) < f^{-1}(\beta)$, ce qui conclut.

Remarque. On a utilisé à plusieurs reprises dans la démonstration ci-dessus le fait que l'ordre des réels est ***total***, à savoir que deux réels sont toujours ***comparables***, ce qui s'écrit symboliquement

$$\left\{\begin{array}{l}\forall a \in \mathbf{R} \\ \forall b \in \mathbf{R}\end{array}\right., (a < b) \vee (a = b) \wedge (a > b).$$

Exemples (de fonctions injectives par stricte monotonie) [un dessin pour chaque, la fonction et sa réciproque, avec la première bissectrice]

1. exp croît strictement, sa réciproque $\ln := \exp^{-1}$ est strictement croissante et est appelée ***logarithme*** $\left\{\text{ou}\begin{array}{l}\textbf{\textit{népérien}} \\ \textbf{\textit{naturel}}\end{array}\right.$.
2. $\mathrm{Id}_{|\mathbf{R}_+}^{\times 2}$ est strictement croissante, sa réciproque $\sqrt{\cdot} := \left[\mathrm{Id}_{|\mathbf{R}_+}^{\times 2}\right]^{-1}$ croît strictement.
3. $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ est strictement croissante, sa réciproque est appelée ***arc-sinus*** et croît strictement. On la note arcsin ou asn. Ainsi, l'arc-sinus d'un réel $s \in [-1, 1]$ est l'arc (du cercle unité) dont le sinus vaut s.
4. $\cos_{|[0,\pi]}$ est strictement décroissante, sa réciproque est appelée ***arc-cosinus*** et décroît strictement. On la note arccos ou acs. Ainsi, l'arc-cosinus d'un réel $c \in [-1, 1]$ est l'arc (du cercle unité) dont le cosinus vaut c.
5. $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$ croît strictement, sa réciproque est appelée ***arc-tangente*** et est strictement croissante. On la note arctanou atn. Ainsi, l'arc-tangente d'un réel t est l'arc (du cercle unité) dont la tangente vaut t.
   Montrons que tan croît strictement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: étant donnés deux réels $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$, on peut écrire $b = a + \varepsilon$ avec $\varepsilon := b - a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où
   $$\tan b = \tan(a + \varepsilon) = \frac{\tan a + \overbrace{\tan \varepsilon}^{>0}}{1 - \underbrace{\tan a \tan \varepsilon}_{>0}} > \tan a.$$
6. $\cot_{|]0,\pi[}$ décroît strictement, sa réciproque est appelée ***arc-cotangente*** et est strictement décroissante. On la note arccot ou act. Ainsi, l'arc-cotangente d'un réel c est l'arc (du cercle unité) dont la cotangente vaut c.

On retiendra les graphes de asn et acs dessinés ensembles [dessin] et le fait qu'il soient symétriques par rapport à la droite horizontale d'ordonnée $\frac{\pi}{4}$ (de même pour les graphes de atn et act [dessin]). Ces symétries s'écrivent

$$\operatorname{asn} + \operatorname{acs} = \frac{\pi}{2} = \operatorname{atn} + \operatorname{act}$$

et traduisent le fait que $\left\{\text{resp.}\begin{array}{c}\text{le cosinus} \\ \text{la cotangente}\end{array}\right.$ est $\left\{\text{resp.}\begin{array}{c}\text{le sinus} \\ \text{la tangente}\end{array}\right.$ du complémentaire (à $\frac{\pi}{2}$).

★ Ce serait un non-sens d'écrire $\operatorname{asn} = \sin^{-1}$ car la fonction sin n'est pas injective ; elle le devient toutefois par restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui permet d'écrire asn comme la réciproque de $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$. On retiendra par conséquent les définitions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{asn} := \left[\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right]^{-1} & \operatorname{atn} := \left[\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}\right]^{-1} \\ \operatorname{acs} := \left[\cos_{|[0,\pi]}\right]^{-1} & \operatorname{act} := \left[\cot_{|]0,\pi[}\right]^{-1} \end{array}.$$

Question (réciproque de la proposition précédente). Est-ce qu'une injection est toujours monotone ? L'application $\frac{1}{\operatorname{Id}}$ montre que non. Mais l'on pourrait construire plein de contre-exemples sur le mode suivant : [dessin : une diagonale de carrés, chacun rempli avec un graphe alternativement montant ou descendant]. On observera que tous ces contre-exemples possèdent (au moins) une *discontinuité*. On montrera de fait plus tard dans le cours qu'une application injective *continue* est toujours monotone.

7 Surjections

L'injectivité possède une notion duale : la *surjectivité*.
Une fonction est injective ssi tout élément but possède *au plus* un antécédent.
Une fonction est dite ***surjective*** si tout élément but possède *au moins* un antécédent.
Graphiquement, une fonction est surjective ssi toute droite horizontale rencontre son graphe.

Exemples. [graphe avec quelques droites horizontales] toute application affine non constante, tan
Contre-exemples. [graphe avec pour chacun une droite horizontale ne le rencontrant pas] $\operatorname{Id}^{\times 2}$ (-1 n'est pas atteint), $|\cdot|$ (-1 n'est pas atteint), $\frac{1}{\operatorname{Id}}$ (0 n'est pas atteint), $\lfloor\cdot\rfloor$ ($\frac{1}{2}$ n'est pas atteint), cos (2 n'est pas atteint), atn (π n'est pas atteint).

Remarque. L'injectivité et la surjectivité n'ont aucun lien général d'implication : exp est injective mais non surjective, tan est surjective mais non injective.

Remarque. On a les équivalences suivantes à $f : A \longrightarrow B$ fixée :

1. f est surjective ;
2. toute élément but est ***atteint*** par f, *i. e.* est une image par f ;
3. l'image de f vaut tout l'ensemble d'arrivée ;
4. $\operatorname{Im} f = B$.

[dessin : deux patatoïde avec pleins de flèches]

On note alors $f : A \twoheadrightarrow B$ (ou $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$) pour évoquer la multiplicité des extrémités des flèches arrivant sur une même image. On dira aussi que f applique A $\boxed{\textit{sur}}$[29] B (ou est une application de A sur B). Ainsi,

$$\textit{on écrira } A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B \textit{ (ou } f : A \twoheadrightarrow B\textit{) pour signifier que } \begin{array}{l} f \textit{ est une surjection de } A \textit{ dans } B \\ f \textit{ applique } A \textit{ sur } B \\ f : A \longrightarrow B \textit{ est surjective} \end{array}.$$

Exemple (surjectivisée d'une fonction)**.** On peut toujours dire qu'une application va (de sa source) *sur* son image, ce qui permet de la rendre surjective. Ainsi,

$$\textit{toute application } f : A \longrightarrow B \textit{ induit une surjection } \left\{ \begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & \operatorname{Im} f \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right. .$$

★ Même si les ensembles but ne sont *a priori* pas égaux (ils le sont ssi f est surjective), on notera abusivement ces deux applications *de la même manière*. Cet abus est justifié par l'identité de leurs graphes (contrairement à

[29] la préposition "*sur*" est exclusivement réservée aux *sur*jections

ce qui se passe lors d'une restriction où l'on perd des antécédents). L'induction précédente permet donc s'écrire (de manière très très abrégée)

$$\left(A \xrightarrow{f} B\right) \Longrightarrow \left(A \overset{f}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Im} f \subset B\right) \qquad \text{(où l'inclusion } \subset \text{ désigne l'injection canonique).}$$

Exemple (pour jouer avec les flèches) Fixons deux applications $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. En décomposant chacune des applications f, g, $g_{|\operatorname{Im} f}$ et $g \circ f$ comme ci-dessus, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & B & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{Im} g & \subset & C \\ & & \cup & & \cup & & \\ A & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{Im} f & \overset{g_{|\operatorname{Im} f}}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im} f}\right) & & \\ \| & & & & \| & & \\ A & & \overset{g \circ f}{\twoheadrightarrow} & & \operatorname{Im}(g \circ f) & & \end{array}$$

(les $\cup$ sont des inclusions et les $\|$ des égalités). On y retrouve l'égalité des images $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im} f}\right)$.

Remarque. Demander si une fonction est surjective est une *mauvaise* question. En effet, une réponse négative ne comporterait aucune des nuances que la connaissance de l'*image* de l'application permettrait d'apporter. (Analogie : demander "combien de..." est une mauvaise question, on peut y répondre une fois éclaircie la *combinatoire* des objets que l'on cherche à dénombrer, ce qui est beaucoup plus intéressant.)

Proposition. *Si elle fait sens, la composée de deux* $\left\{\text{resp.} \begin{array}{c} \textit{injections} \\ \textit{surjections} \end{array}\right.$ *reste* $\left\{\text{resp.} \begin{array}{c} \textit{injective} \\ \textit{surjective} \end{array}\right.$.

Démonstration.

Soient $A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\hookrightarrow} C$ deux injections. Montrons que $g \circ f$ est injective. Soient a et α dans A tels que $[g \circ f](a) = [g \circ f](\alpha)$, ce qui s'écrit $g(f(a)) = g(f(\alpha))$. Par injectivité de g, on en déduit $f(a) = f(\alpha)$ puis l'injectivité de f permet de conclure $a = \alpha$.

Soient $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$ deux surjections. Montrons que $g \circ f$ est surjective. Soit $c \in C$. Par surjectivité de g, il s'écrit $c = g(b)$ pour un $b \in B$, lequel s'écrit (par surjectivité de f) $b = f(a)$, d'où l'on tire $c = g(f(a))$, ce qui montre que c est atteint par $g \circ f$ en a.

La proposition précédente possède une réciproque partielle.

Proposition. *Soient deux applications* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.
Si $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective.*
Si $g \circ f$ *est surjective, alors* g *est surjective.*

Démonstration.

Supposons $g \circ f$ injective. Soient a et α dans A tels que $f(a) = f(\alpha)$. Appliquer g donne $g(f(a)) = g(f(\alpha))$, *i. e.* $[g \circ f](a) = [g \circ f](\alpha)$, d'où $a = \alpha$ par injectivité de $g \circ f$.

Supposons $g \circ f$ surjective. Soit $c \in C$: il s'écrit par surjectivité $c = [g \circ f](a)$ pour un $a \in A$, *i. e.* $c = g(f(a))$, d'où un antécédent $f(a)$ de c par g.

Il n'est pas possible de dire mieux (*e. g.* f surjective ou g injective), même en réunissant les deux hypothèses. En effet, si l'on définit deux "tapis-roulant" $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ (vers la droite) et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$ (vers la gauche), alors :

1. f est injective (une égalité $n+1 = n'+1$ impliquerait $n = n'$) et non surjective (0 n'est pas atteint) ;
2. g est surjective (tout entier $n \in \mathbf{N}$ donné a un antécédent $n+1$) et non injective (0 et 1 ont même image) :
3. la composée $g \circ f$ vaut $\operatorname{Id}_{\mathbf{N}}$ (elle est donc surjective et injective) puisqu'on a à $n \in \mathbf{N}$ fixé les égalités

$$[g \circ f](n) = g(f(n)) = g\left(\underbrace{n+1}_{\geq 1}\right) = (n+1) - 1 = n = \operatorname{Id}(n).$$

8 Bijections

Réunir injections et surjections mène au concept de *bijections*. Une bijection venant toujours avec une compagne, nous préférons la définir comme suit.

Une ***correspondance bijective*** est la donnée de deux applications $A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ telles que $\left\{ \begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ g = \mathrm{Id}_B \end{array} \right.$ (*i. e.* inverses l'une de l'autre pour la composition). Les fonctions f et g sont alors chacune appelée ***bijection*** ou dite ***bijective***.

[dessin : deux patatoïdes en correspondance bijective]

Comme pour les injections, il courant d'identifier abusivement deux ensembles en correspondance bijective : *modulo* cette identification, l'égalité $\operatorname{Im} f = B$ pourrait s'écrire $A = B$ (*non-sens a priori* car les éléments de A et ceux de B n'ont rien à voir). Afin de rappeler l'identification *via* l'application $A \xrightarrow{f} B$,

$$\textit{on écrira } A \overset{f}{\widetilde{\longrightarrow}} B \textit{ (ou } f : A \widetilde{\longrightarrow} B\textit{) pour signifier que } \begin{array}{l} f \textit{ est une bijection de } A \textit{ sur } B \\ f \textit{ bijecte } A \textit{ sur } B \\ f : A \longrightarrow B \textit{ est bijective} \end{array}$$

(le symbole $\widetilde{\longrightarrow}$ est une fusion des symboles d'égalité (vague) $\simeq$ et d'application $\longrightarrow$).

Remarque. Étant donnée une application $f : A \longrightarrow B$, on a les équivalences suivantes :

1. f est bijective ;
2. $\exists g : B \longrightarrow A,\ \left\{ \begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ g = \mathrm{Id}_B \end{array} \right.$;
3. f est inversible pour la composition ;
4. f injective et f^{-1} est définie sur tout B (se rappeler pour f injective les identités $\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A,\ f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall b \in \operatorname{Im} f,\ f\left(f^{-1}(b)\right) = b \end{array} \right.$)
5. f injective et $\operatorname{Im} f = B$;
6. f injective et f surjective ;
7. tout élément but a exactement un antécédent ;
8. pour tout $b \in B$, l'équation $f(a) = b$ en l'inconnue a admet exactement une solution ;
9. $\exists! g : B \longrightarrow A,\ \left\{ \longmapsto \begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ g = \mathrm{Id}_B \end{array} \right.$ (le symbole "!" dénote l'*unicité*, il se lit "*un(e) unique*" ou "*un(e) seul(e)*").

Remarque. Une application g comme ci-dessus vaut nécessairement la réciproque f^{-1} de f. On l'appelle également l'***inverse*** de f (pour la composition), ce qui éclairera *a posteriori* la notation f^{-1} abrégeant $f^{\circ -1}$.

Exemple (bijectivisée d'une injection) Une injection induit toujours une surjection sur son image (donc une bijection), ce que l'on pourra abréger en

$$(f : A \hookrightarrow B) \Longrightarrow \left(A \overset{f}{\widetilde{\longrightarrow}} \operatorname{Im} f \right).$$

Proposition. *Si l'on dispose de deux bijections $A \overset{f}{\widetilde{\longrightarrow}} B \overset{g}{\widetilde{\longrightarrow}} C$, alors la composée $g \circ f$ est bijective d'inverse*

$$[g \circ f]^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

★ Attention à l'ordre des facteurs ! Pour s'en souvenir, on pourra retenir que

l'inverse de l'opération "*mettre ses chaussettes puis ses chaussures*"
est l'opération "*retirer d'abord ses chaussures puis ses chaussettes*".

On pourra aussi simplement regarder le sens des flèches sur le diagramme récapitulatif suivant :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad g \circ f \quad} \\ A \underset{f^{-1}}{\overset{\widetilde{f}}{\rightleftarrows}} B \underset{g^{-1}}{\overset{\widetilde{g}}{\rightleftarrows}} C. \\ \xleftarrow[\quad f^{-1} \circ g^{-1} \quad]{} \end{array}$$

Démonstration. Montrons que $f^{-1}\circ g^{-1}$ est un inverse de $g\circ f$ pour la composition : on a

$$\begin{aligned}\text{d'une part } (g\circ f)\circ\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right) &= g\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1}=g\circ \underset{B}{\mathrm{Id}}\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=\underset{C}{\mathrm{Id}},\\ \text{d'autre part } \left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ(g\circ f) &= f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f=f^{-1}\circ \underset{B}{\mathrm{Id}}\circ f=f^{-1}\circ f=\underset{A}{\mathrm{Id}}.\end{aligned}$$

★ Il est nécessaire, pour montrer qu'une application α est l'inverse d'une application β, de vérifier que les *DEUX* composées $\alpha\circ\beta$ et $\beta\circ\alpha$ valent l'identité. En effet, si l'on reprend nos "tapis-roulant" $\left\{\begin{array}{ccc} n & \longmapsto & n+1 \\ \mathbf{N} & \overset{\alpha}{\longrightarrow} & \mathbf{N} \\ n & \overset{\beta}{\longmapsto} & \left\{\begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n\geq 1 \\ 0 & \text{si } n=0\end{array}\right.\end{array}\right.$, on a déjà vu que $\beta\circ\alpha=\mathrm{Id}_{\mathbf{N}}$ mais l'autre composée $\alpha\circ\beta$ n'est pas l'application identité puisqu'elle envoit 0 sur $\alpha(\beta(0))=\alpha(0)=1$. On pourra cependant dire, au vu de l'égalité $\beta\circ\alpha=\mathrm{Id}$, que $\left\{\begin{array}{c}\alpha \text{ est un } \textbf{\textit{inverse à droite}} \text{ de } \beta \text{ ou} \\ \text{que } \beta \text{ est un } \textbf{\textit{inverse à gauche}} \text{ de } \alpha\end{array}\right.$.

Remarques (affaiblissement des hypothèses).

Si g est supposée seulement injective, alors $g\circ f$ est (*a priori*) seulement injective et on a encore la formule $[g\circ f]^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$. Le diagramme récapitulatif devient alors

$$A\underset{f^{-1}}{\overset{\widetilde{f}}{\rightleftarrows}}B\underset{g^{-1}}{\overset{\widetilde{g}}{\rightleftarrows}}\operatorname{Im} g\subset C.$$

En revanche, si f et g sont seulement supposées injectives, on devra préciser $[g\circ f]^{-1}=f^{-1}\circ\left[g_{|\operatorname{Im} f}\right]^{-1}$, ce qui peut se voir sur le diagramme

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{\quad g\circ f\ =\ \left(g_{|\operatorname{Im} f}\right)\circ f\quad} \\ A\underset{f^{-1}}{\overset{\widetilde{f}}{\rightleftarrows}}\operatorname{Im} f \underset{\left[g_{|\operatorname{Im} f}\right]^{-1}}{\overset{\widetilde{g_{|\operatorname{Im} f}}}{\rightleftarrows}}\operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im} f}\right). \\ \xleftarrow[\quad f^{-1}\circ\left[g_{|\operatorname{Im} f}\right]^{-1}\quad]{}\end{array}$$

Plus généralement, les amateurs de flèches pourront s'exercer à voir le diagramme précédent dans le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & B & \underset{g^{-1}}{\overset{\widetilde{g}}{\rightleftarrows}} & \operatorname{Im} g & \subset & C \\ & & \cup & & \cup & & \\ A & \underset{f^{-1}}{\overset{\widetilde{f}}{\rightleftarrows}} & \operatorname{Im} f & \underset{\left[g_{|\operatorname{Im} f}\right]^{-1}}{\overset{\widetilde{g_{|\operatorname{Im} f}}}{\rightleftarrows}} & \operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im} f}\right) & & \\ \| & & & & \| & & \\ A & & \underset{[g\circ f]^{-1}}{\overset{\widetilde{g\circ f}}{\rightleftarrows}} & & \operatorname{Im}(g\circ f) & & \end{array}$$

(quand f est bijective, les inclusions deviennent des égalités et on retombe sur $A\underset{f^{-1}}{\overset{\widetilde{f}}{\rightleftarrows}}B\underset{g^{-1}}{\overset{\widetilde{g}}{\rightleftarrows}}\operatorname{Im} g\subset C$).

9 Permutations

On fixe un ensemble E.

Une ***permutation*** de E est une bijection de E dans lui-même. On note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de E.

Exemple (de permutations). Un ***cycle*** (de E) est une permutation de la forme $\left\{\begin{array}{c} a_1\longmapsto a_2 \\ a_2\longmapsto a_3 \\ a_3\longmapsto a_4 \\ \cdots \\ a_{l-1}\longmapsto a_l \\ a_l\longmapsto a_1\end{array}\right.$ où les $a_1,a_2,...,a_l$ sont l éléments deux à deux distincts de E et qui agit comme Id_E sur les éléments de E autre que $a_1,a_2,...,a_l$.

Un tel cycle est noté $(a_1, a_2, ..., a_l)$. Lorsque $l = 2$, on parle de ***transposition.*** Lorsque $l = 1$, on parle de ***cycle fixe*** (remarque : tous les cycles fixe valent Id_E). L'entier l est la ***longueur*** du cycle, la partie de E formée des éléments $a_1, a_2, ..., a_l$ est son ***support*** et le signe $(-1)^{l-1}$ est sa ***signature***.

Exemple (de cycle). Soient a, b, c, d quatre éléments de E deux à deux distincts. Le cycle $\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \uparrow & & \downarrow \\ d & \longleftarrow & c \end{array}$ est de longueur 4 et de signature $(-1)^{4-1} = -1$. On peut le noter $\left\{\begin{array}{l} \phantom{\text{ou}}\ (a,b,c,d) \\ \text{ou}\ (b,c,d,a) \\ \text{ou}\ (c,d,a,b) \\ \text{ou}\ (d,a,b,c) \end{array}\right.$. Son inverse est le cycle $\begin{array}{ccc} a & \longleftarrow & b \\ \downarrow & & \uparrow \\ d & \longrightarrow & c \end{array}$ obtenu en reversant le sens des flèches, à savoir $\left\{\begin{array}{l} \phantom{\text{ou}}\ (a,d,c,b) \\ \text{ou}\ (b,a,d,c) \\ \text{ou}\ (c,b,a,d) \\ \text{ou}\ (d,c,b,a) \end{array}\right.$.

Exemple (de permutations) Lorsque E contient une suite infinie $..., a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, ...$, on peut définir deux "***tapis roulant***" par $\left\{\begin{array}{l} \forall k \in \mathbf{Z},\ a_k \longmapsto a_{k+1} \text{ (vers la droite)} \\ \forall k \in \mathbf{Z},\ a_k \longmapsto a_{k-1} \text{ (vers la gauche)} \end{array}\right.$. Ils sont inverses l'un de l'autre.

On fixe à présent un entier $n \geq 1$. On note $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{\{1,...,n\}}$.

Il est usuel de représenter une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ donnée sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Considérons par exemple la permutation $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

Elle agit sur $\{1, 4, 6\}$ comme le cycle $(1, 6, 4)$: $1 \longmapsto 6 \longmapsto 4 \longmapsto 1$.

Elle agit sur $\{2, 5, 7\}$ comme le cycle $(2, 7, 5)$: $2 \longmapsto 7 \longmapsto 5 \longmapsto 2$.

Elle agit sur $\{9, 10\}$ comme la transposition $(9, 10)$: $9 \longmapsto 10 \longmapsto 9$.

Elle agit enfin sur $\{3, 8\}$ comme l'identité : $3 \longmapsto 3$ et $8 \longmapsto 8$.

On peut schématiser l'action de σ comme suit : [dessin avec les deux cycles, la transposition et les deux boucles]

Formellement, on peut factoriser $\sigma = (1, 6, 4) \circ (2, 7, 5) \circ (9, 10)$ en produit de cycles non fixes qui sont deux à deux à supports disjoints (*i. e.* sans élément en commun). Cette observation est un fait général.

Théorème (admis). *Toute permutation d'un ensemble* fini *se décompose d'une unique manière (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de cycles non fixes à supports disjoints.*

Méthode : on obtient chacun des cycles en itérant la permutation donnée sur un point fixé.

Définition. La ***signature*** $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ est le produit des signatures des cycles de sa décomposition.

Exemples. La permutation ci-dessus $(1, 6, 4) \circ (2, 7, 5) \circ (9, 10)$ a pour signature $(1)(1)(-1) = -1$: on dit qu'elle est ***impaire*** (elle serait dite ***paire*** si sa signature valait $+1$)

Propriété (admise). *La signature est un morphisme multiplicatif, au sens où*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \forall \rho \in \mathfrak{S}_n \end{array}\right., \varepsilon(\sigma \circ \rho) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\rho).$$

(Cela généralise la définition de la signature comme un produit de signatures.)

Représentation géométrique de $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

L'ensemble $\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{Id}\}$ n'est pas très intéressant (son unique élément fixe tout le monde).

L'ensemble $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}, (1, 2)\}$ peut se représenter géométriquement comme le groupe de symétrie d'un *segment* [dessin : segment [12], sa médiatrice qui les échange par réflexion] : la transposition $(1, 2)$ correspond à la réflexion par rapport à la médiatrice du segment [12].

De même, $\mathfrak{S}_3 = \left\{\begin{array}{c} \mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2), \\ (1,2), (1,3), (2,3) \end{array}\right\}$ peut se représenter géométriquement comme le groupe de symétrie d'un *triangle équilatéral* [dessin : triangle équilatéral 123, les trois axes de symétrie qui échangent les sommets par réflexion, les deux sens de rotation] : les trois transpositions correspondent aux trois réflexions d'axes les médiatrices, les deux cycles de longueur 3 correspondent aux rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ de centre celui du triangle.

On pourra également voir $\mathfrak{S}_4$ comme groupe de symétrie d'un *tétraèdre régulier*. L'ensemble $\mathfrak{S}_4$ contient (outre l'identité)

1. six transpositions, chacune correspondant à une réflexion par rapport à un plan médiateur [dessin : tétraèdre régulier 1234 avec un plan médiateur] ;
2. huit cycles de longueur 3, chacun correspondant à une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ d'axe passant par un sommet et orthogonal à la face contenant les trois autres [dessin : tétraèdre régulier 1234 avec un tel axe de rotation] ;
3. trois produits de deux transpositions à supports disjoints (*e. g.* $(1, 2) \circ (3, 4)$), chacun correspondant à une rotation qui échange deux arêtes opposées :
4. six cycles de longueur 4 correspondant à la composées d'une réflexion du type 1 par une rotation du type 3 (*e. g.* $(4, 2, 1, 3) = (2, 3) \circ (1, 2)\,(3, 4)$).

Remarque. On observera que les permutations *paires* correspondent à des transformations géométriques qui *conservent* l'orientation (*e. g.* des rotations) tandis que les permutations *impaires* correspondent à des transformations géométriques qui *inversent* l'orientation (*e. g.* des réflexions).