Rappels sur les vecteurs

lundi 10, mardi 11, mercredi 12 & lundi 19 septembre 2012

Table des matières

1 Flèches & égalité vectorielle

Une ***flèche*** est un couple (paire *ordonnée*) de points (A, B) : le premier point (A) est appelé son ***origine***, le second point (B) son ***extrémité***. L'ordre permet de distinguer une flèche (A, B) de sa flèche ***opposée*** (B, A).

[dessin : deux points A et B, deux flèches en sens contraires]

Une flèche est caractérisée par

1. sa ***direction*** (la droite (AB))
2. son ***sens*** (de A vers B)
3. sa ***norme*** (la longueur AB)
4. son ***origine*** (le point A)

★ En maths, la direction n'est pas orientée ! Deux droites ont même direction ssi elles sont parallèles.

Un ***vecteur*** est une flèche dont on a "oublié" l'origine (point 4). Il est caractérisé par

1. sa ***direction***
2. son ***sens***
3. sa ***norme*** (on notera $\|u\|$ la norme d'un vecteur u).

[dessin : diverses flèches représentant un même vecteur]

Lorsqu'une flèche s'obtient en plantant un vecteur en un point, on dit que cette flèche ***représente*** (ou est un ***représentant*** de) ce vecteur.

Ainsi, deux flèches (A, B) et (a, b) représentent le même vecteur ssi le quadrilatère $ABba$ est un parallélogramme. En notant $\overrightarrow{AB}$ (ou $B - A$) le vecteur représenté par (A, B), cela s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ab} & \iff & ABba \text{ parallélogramme} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \overrightarrow{aA} = \overrightarrow{bB} & \iff & aABb \text{ parallélogramme} \end{array}.$$

Cas particulier Substituant A et B respectivement à a et b, on obtient l'équivalence $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$; la première égalité étant toujours triviale (tout objet est identique à lui-même), on en déduit l'égalité $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ pour tous points A et B. Ce dernier vecteur est appelé ***vecteur nul*** et est noté $\overrightarrow{0}$ (voire 0).

Propriété *Un vecteur est nul ssi sa norme est nulle :*

$$\|u\| = 0 \iff u = 0 \qquad \textit{(pour tout vecteur } u\textit{)}$$

Cela s'écrit aussi[1]

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 0 \iff A = B \qquad \textit{(pour tous points } A \textit{ et } B\textit{)}$$

Remarque La direction du vecteur nul n'est pas bien définie (il pourrait toutes les prendre).

Des vecteurs de même direction (resp. de directions orthogonales) seront dits ***colinéaires*** (resp. ***orthogonaux***). Si u et v dénotent des vecteurs, on exprimera leur colinéarité (resp. leur orthogonalité) par la notation $u \parallel v$ (resp. $u \perp v$).

Le vecteur nul est ainsi colinéaire et orthogonal à tout vecteur puisqu'il peut prendre toutes les directions.

2 Addition vectorielle

Pour ***additionner*** deux vecteurs u et v :

1. prendre un représentant $\overrightarrow{AB}$ du premier vecteur ;
2. prendre *le* représentant $\overrightarrow{BC}$ du second vecteur d'origine l'extrémité du premier représentant ;
3. considérer le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Propriétés L'addition vectorielle

1. est ***commutative*** : on a [dessin parallélogramme]

$$u + v = v + u \qquad \text{(pour tous vecteurs } u \text{ et } v\text{) ;}$$

2. est ***associative*** : on a [dessin quadrilatère + diagonales]

$$\begin{array}{c} u + (v + w) = (u + v) + w \\ \text{noté alors } u + v + w \text{ sans parenthèses} \end{array} \qquad \text{(pour tous vecteurs } u, v \text{ et } w\text{) ;}$$

3. admet le vecteur nul comme ***neutre*** :

$$u + 0 = u = 0 + u \qquad \text{(pour tout vecteur } u\text{).}$$

4. De plus, tout vecteur u admet un ***opposé***, çàd un vecteur (noté $-u$) tel que

$$u + (-u) = 0 = (-u) + u.$$

[1] Cela peut se reformuler en disant que deux points sont distincts ssi la norme du vecteur (représenté par la flèche) les reliant est non nul. Cette propriété est appelée ***séparation*** des points (on dit aussi que la norme ***sépare*** les points).

Les trois propriétés 2 à 4 qui précèdent définissent en toute généralité un ***groupe*** pour l'addition (on parle aussi de groupe ***additif***). La propriété 1 exprime la ***commutativité*** du groupe[2].

Remarque. Pour tous points A et B, l'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtient comme suit :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Étant donné un vecteur u, la transformation qui à un vecteur x associe le vecteur $x + u$ s'appelle la ***translation*** selon u (ou translation de vecteur u). Appliquer une translation sur une image, c'est la ***translater***.

[dessin : image translatée].

Question Comment la norme se comporte-t-elle vis-à-vis de l'addition ?

On a une ***inégalité*** dite ***triangulaire*** pour tous vecteurs u et v :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Elle exprime le fait que la longueur d'un côté dans un triangle est toujours plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés [dessin !].

3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Un vecteur (du latin *vehere*) est ce qui porte, ce qui véhicule, ce qui transmet, ce qui entraîne, ce qui transporte (penser au vecteur d'une maladie, à une force en physique).

De façon complètement différente, un nombre (réel) mesure selon une droite graduée, une échelle (*scale* en anglais), d'où le terme de ***scalaire***[3] qu'on lui attribue.

Il convient de bien distinguer les objets $\left\{ \begin{array}{l} \textit{vectoriels} \text{ (les vecteurs)} \\ \textit{scalaires} \text{ (les nombres réels)} \end{array} \right.$. (Il est usuel de mettre des flèches sur les vecteurs[4] mais on s'en lassera très vite – cependant AB désignera toujours la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.)

On peut ***multiplier*** un vecteur par un scalaire en

1. conservant la direction ;
2. gardant le même sens si le scalaire est positif, changeant le sens si le scalaire est négatif ;
3. multipliant la norme par la valeur absolue du scalaire.

La multiplication d'un vecteur par un scalaire est noté avec un point $\cdot$ (surtout pas de croix $\times$!) voire non notée.

Exemples [dessin $u, -2u, 3u, -\frac{3}{2}u, \frac{9}{4}u$]

Convention On écrit toujours le scalaire DEVANT le vecteur

$$\overbrace{\underbrace{\lambda}_{\text{scalaire}} \cdot \underbrace{u}_{\text{vecteur}}}^{\text{vecteur}}.$$

Propriétés On a pour tous scalaires λ et μ ainsi que pour tous vecteurs u et v les identités suivantes :

1. $1 \cdot u = u$ (on dit que 1 est ***neutre*** pour $\cdot$) ;
2. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (noté $\lambda\mu u$ tout court) (on dit qu'on a ***associativité*** des multiplications[5]) ;
3. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$ (on dit que $\cdot$ se ***distribue*** à gauche sur l'addition) ;
4. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$ (on dit que $\cdot$ se ***distribue*** à droite sur l'addition).

---

[2] On parle alors de groupe ***commutatif*** ou de groupe ***abélien*** (pour honorer Niels Abel).

[3] la terminologie remonte à Hamilton qui, dans son article *On Symbolical Geometry* de 1846, est très clair sur son choix terminologique : "*we give the name of scalars to all numbers of the kind called usually real, because they are all contained on the one scale of progression of number from negative to positive infinity*"

[4] ou de les imprimer en **police grasse** comme l'usage anglo-saxon

[5] d'une part la multiplication des scalaires entre eux (notée avec $\times$, $\cdot$ ou rien du tout), d'autre part la multiplication d'un vecteur par un scalaire (notée avec $\cdot$ ou rien du tout)

[dessin pour illustrer 4 : parallélogrammes homothétiques]

Remarque Les quatre propriétés ci-dessus définissent en toute généralité ce qu'on appellera un ***espace vectoriel***.

Remarque Un scalaire λ étant donné, la transformation qui à un vecteur u associe le vecteur λu s'appelle l'***homothétie***[6] de rapport λ. La quatrième propriété exprime l'***additivité*** des homothéties.

Question Comment la norme se comporte-t-elle vis-à-vis de la multiplication par un scalaire ?

La réponse est dans la définition : pour tout scalaire λ et pour tout vecteur u on a

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| .$$

On dit que la norme $\|\cdot\|$ est ***positivement homogène*** (*homogène* $\leftrightarrow$ on peut sortir le λ ; *positive* $\leftrightarrow$ il faut lui mettre une valeur absolue).

Remarque Les trois propriétés

$$\begin{array}{ll} \|u\| = 0 \iff u = 0 & \text{(séparation)} \\ \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\| & \text{(homogénéité positive)} \\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| & \text{(inégalité triangulaire)} \end{array}$$

définissent une ***norme*** en toute généralité (qui pourra être autre que la longueur, appelée norme ***euclidienne***).

4 Digression sur la colinéarité et les énoncés existentiels

On gagnera à exprimer la colinéarité en termes d'*égalités* vectorielles (le travail mathématique sera plus aisé) ; le prix à payer est la démonstration technique de la proposition suivante (à savoir refaire avec SOIN) que l'on propose justement pour sa technicité (ce qui n'empêchera pas de l'éclairer par quelques commentaires).

Propriété. Fixons deux vecteurs. On a alors les équivalences suivantes :

nos deux vecteurs sont colinéaires	$\iff$	il y a un vecteurs unitaire dont ils sont tous deux multiples scalaires
	$\iff$	le premier est nul *ou* le second est multiple scalaire du premier
	$\iff$	le second est nul *ou* le premier est multiple scalaire du second
	$\iff$	il y a une combinaison linéaire nulle de nos vecteurs à coefficients non tous nuls.

En d'autres termes (symboliques), pour tous vecteurs u et v, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} u \parallel v & \iff & \left\{ \begin{array}{l} \exists \omega \text{ vecteur unitaire,} \\ \exists r \in \mathbf{R},\ \exists s \in \mathbf{R}, \end{array} \right. \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} u = r\omega \\ v = s\omega \end{array} \right. \\ & \iff & [u = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbf{R},\ v = \lambda u] \\ & \iff & [v = 0 \text{ ou } \exists \mu \in \mathbf{R}, u = \mu v] \\ & \iff & \exists \alpha \in \mathbf{R},\ \exists \beta \in \mathbf{R},\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0 \text{ et } \alpha u + \beta v = 0. \end{array}$$

Remarque (logique). Le symbole "$\exists$" (appelé ***quantificateur existentiel***) se lit "*il existe*[7] *un(e)*" ou "*il y a un(e)*". On prendra garde à ce que la *virgule*, dans un ***énoncé existentiel*** (*i. e.* du type "$\exists a \in A,\ P(a)$") tient lieu de "*tel(le)(s) que*" :

$$\text{"}\exists a \in A,\ P(a)\text{"} \quad \text{se lit} \quad \text{"\textit{il y a un a dans A tel que} } P(a)\text{"}.$$

Commentaires. Avant de se lancer dans la démonstration, tentons d'éclaircir les énoncés ci-dessus dont on souhaite montrer l'équivalence – appelons-les respectivement (1), (2), (3), (3′) et (4).

L'énoncé (1) est la colinéarité que l'on souhaite traduire en termes d'égalités vectorielles.

[6] du grec *homo* (semblable) et *thétis* (position)

[7] Giuseppe Peano, dans son *Formulaire de mathématiques* publié en français en 1897, a eu l'idée de retourner droite-gauche un "E", initiale d'"Exister".

L'énoncé (2) est symétrique en u et v (ce qui est agréable) mais introduit un troisième vecteur ; il ne servira pas en pratique (il sert surtout d'intermédiaire pour la démonstration à suivre).

Les énoncés (3) et (3′) précisent ce que l'on aimerait bien dire, à savoir que

deux vecteurs sont colinéaires ssi l'un est multiple scalaire de l'autre.

En effet, si $v = 0 \neq u$, on a bien $u \parallel v$ mais aucun multiple scalaire de v (ils sont tous nuls) ne peut valoir u!. Les énoncés (3) et (3′) sont donc les traductions les plus "intuitives" de la colinéarité mais aussi (pour cause de rigueur) les plus asymétriques (en u et v).

L'énoncé (4) est symétrique en u et v et sera ce qui servira (plus tard) à généraliser la colinéarité (on parlera alors de vecteurs ***liés***). L'avantage de la symétrie a un prix : l'un des coefficients α ou β est inutile (on pourra toujours en prendre un égal à 1 quitte à diviser par l'un des α ou β qui est non nul).

Démonstration. Il suffit de montrer des implications entre ces cinq points qui permettent de passer de n'importe quel point à n'importe quel autre. On va montrer (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) puis (1) $\Longleftrightarrow$ (3′) et (2) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supposons $u \parallel v$. Considérons un vecteur ω possédant la même direction que u et v (avec un sens quelconque) et une norme 1. Alors le vecteur $\|u\|\,\omega$ a même direction et norme que u, donc lui est égal ou opposé. Il en résulte (2) en posant $r := \pm\|u\|$ (et de même $t := \pm\|v\|$ où le signe $\pm$ n'est pas forcément le même que pour r).

(2) $\Longrightarrow$ (3). Soient ω, r et s comme dans (2). Si $r = 0$, on a $u = 0$, d'où (3) ; sinon, on peut diviser par r, ce qui donne $\omega = \frac{1}{r}u$ puis $v = s\omega = \frac{s}{r}u$, d'où (3) en posant $\lambda := \frac{s}{r}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Si u est nul, il est trivialement colinéaire à v. De même si v est multiple scalaire de u (par définition de la multiplication par un scalaire).

(1) $\Longleftrightarrow$ (3′). Il suffit de remarquer que (1) $\Longleftrightarrow v \parallel u$ et d'échanger les symboles u et v dans l'équivalence établie (1) $\Longleftrightarrow$ (3).

(2) $\Longrightarrow$ (4). Soient ω, r et s comme dans (2). On a alors $su - rv = s(r\omega) - r(s\omega) = 0$, d'où (4) en posant $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{s}{-r}$. Cette conclusion ne tient cependant que si $\binom{s}{-r} \neq \binom{0}{0}$; dans le cas contraire, les scalaires r et s sont nuls, donc les vecteurs u et v aussi et alors n'importe quel choix de $\binom{\alpha}{\beta}$ convient, *e. g.* $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{1}{1}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Soient α et β comme dans (4). Si α est non nul, on divise par α, ce qui donne $u = \frac{-\beta}{\alpha}v$, d'où (3′) et (1) ; sinon β est forcément non nul et on divise par β pour obtenir $v = \frac{-\alpha}{\beta}u$, d'où (3) et (1).

Remarque & conventions (symbole muet dans $\exists$). Le symbole d'objet dans un énoncé existentiel n'a *aucun sens en-dehors* de cet énoncé, on peut tout à fait le remplacer par un autre sans changer le sens de l'énoncé (on parle de symbole ***muet***). Par exemple, il est équivalent d'écrire

1. $\exists c \in \mathbb{C},\ c^2 = -1$;
2. $\exists \Xi \in \mathbb{C},\ \Xi^2 = -1$;
3. $\exists Q \in \mathbb{C},\ Q^2 = -1$;
4. il y a un complexe dont le carré vaut -1.

Mais surtout pas $\exists i \in \mathbb{C},\ i^2 = -1$; en effet, on sait très bien que i appartient à $\mathbb{C}$ et que son carré vaut -1, il est donc bizarre de vouloir affirmer $\exists i \in \mathbb{C},\ i^2 = -1$. Si l'on veut dire qu'il y a un complexe singulier, noté i, dont le carré vaut -1, on l'écrit en français, ou bien on écrit "*on a l'énoncé* $\exists \Lambda \in \mathbb{C},\ \Lambda^2 = -1$ *; notons i un tel* Λ".

Il y a cependant une raison plus profonde qui légitime la règle suivante :

on ne peut pas utiliser pour symbole muet
un symbole qui dénote déjà un objet singulier.

Par exemple, le sens de l'énoncé "$\exists 2 \in \mathbf{R},\ 2^2 = 2 + 2$" (où 2 dénote à la fois un symbole muet et l'entier singulier $2 := 1 + 1$) serait difficile à distinguer parmi :

1. $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 = 2 + x$;
2. $\exists x \in \mathbf{R},\ 2^x = x + x$;
3. $\exists x \in \mathbf{R},\ x^x = 2 + 2$;
4. (d'autres possibilités en remplaçant certains 2 par x)...

Pour la même raison, un énoncé de la forme $\exists a \in \mathbf{R}, \exists a \in \mathbf{R}, a^a = a + a$ pourrait vouloir dire

1. $\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, a^b = a + b$

2. $\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, b^a = b + b$
3. $\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, a^a = b + a$
4. ...

On observera que, dans un énoncé de la forme $\exists a \in \mathbf{R}, \left(\exists b \in \mathbf{R}, a^b = a + b\right)$, une fois *à l'intérieur* de la parenthèse, le symbole a n'est plus muet mais doit se comporter comme un objet singulier afin que la parenthèse ait du sens. On en tire la considération suivante :

dans des énoncés existentiels "emboités",
les symboles muets deviennent (localement) singuliers.

Nous reverrons ces considérations lorsque nous aurons à définir des fonctions ou à prouver des énoncés universels.

5 Barycentres

Question Comment simplifier une ***combinaison linéaire*** (somme de vecteurs coefficientés chacun par un scalaire appelé ***poids***) à l'instar de $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM}$?

Idée : introduire un autre point, disons G, à choisir judicieusement. On écrit

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} &= 2\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) + 3\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right) \\ &= 2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + (2+3)\,\overrightarrow{GM}. \end{aligned}$$

Il est donc judicieux de choisir G de sorte à annuler la combinaison linéaire $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG}$ (ce qui revient à trouver les points M annulant la combinaison linéaire de départ).

[dessin : segment AB coupé en cinq, un vecteur unitaire $u := \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, le point A "poids 2", le point B "poids 3", le point G]

On a bien $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = 2\,(3u) + 3\,(-2u) = 6u - 6u = \overrightarrow{0}$.

Exemple $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{GM}$ où G est comme suit

[dessin : idem avec poids 1 et 2]

On vérifie que $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = (2u) + 2\,(-u) = 2u - 2u = \overrightarrow{0}$.

Cette idée fonctionne même avec des poids *négatifs*.

Exemple $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{GM}$

[dessin : idem avec B au milieu de $[AG]$]

S'assurer que $\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} = 2u - 2u = 0$.

★ Ne marche plus quand la somme des poids est nulle

Exemple $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ ne dépend pas de M (poids 1 et -1)

Un tel point G est appelé ***barycentre***[8] des points A et B pondérés respectivement par les coefficients correspondants (ci-dessus : respectivement 2 et 3, 1 et 2, 1 et -2).

Remarque Le vocabulaire des poids est un appel au bon sens physique afin d'aider à placer le barycentre.

6 Produit scalaire

Considérons/Soient deux vecteurs a et b colinéaires, mettons à un même vecteur ***unitaire*** (de norme 1) u. On peut donc[9] écrire $\binom{a}{b} = \binom{\lambda u}{\mu u}$ pour certains scalaires λ et μ (les ***coordonnées*** de a et b selon u).

Le ***produit scalaire*** de a et b est défini par le produit des scalaires λ et μ. Il dépend du choix de u : plus précisément, du choix d'une *longueur unité*[10].

[8] bary↔*barus*, *poids* ; un barycentre est donc un *centre des poids*, confirmant l'intuition physique de *point d'équilibre*

[9] par exemple $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{\pm\|a\|}{\pm\|b\|}$ où les signes $\pm$ sont à déterminer (*cf.* la digression sur la colinéarité)

[10] en effet, changer u en son opposé rajoute un signe $-$ aux deux coordonnées, ce qui ne change pas leur produit

Supposons à présent les vecteurs a et b quelconques (pas forcément colinéaires). On définit leur produit scalaire par celui de b par le projeté orthogonal de a sur (toute droite dirigée par) b (ce produit dépend toujours du choix d'une longueur unité).

[dessin : vecteurs a et b de même origine, projeté a' sur b, l'angle $\theta = \widehat{ab}$]

On le note indifféremment[11] $a \cdot b \quad (a \cdot b) \quad (a \mid b) \quad \langle a \mid b \rangle \quad \langle a, b \rangle$ mais jamais $a \times b$! (et rarement ab).

Remarque Le projeté a pour norme celle de a multipliée par $\cos\theta$. En faisant attention aux signes (distinguer les cas θ ***aigu*** (*i. e.* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) et θ ***obtus*** (*i. e.* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$)), on en déduirait

$$a \cdot b = \|a\| \, \|b\| \cos\theta.$$

Le membre de droite de cette égalité est ***symétrique*** en a et b (inchangée par échange de a et b), donc le membre de gauche aussi, ce qui s'écrit $a \cdot b = b \cdot a$. On dit que le produit scalaire est ***commutatif***.

Propriété Pour tous vecteurs a et b, on a la comparaison[12]

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \, \|b\| \qquad \text{avec égalité ssi } a \parallel b$$

(***comparaison de Buniakowski-Cauchy-Schwarz***).

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$|a \cdot b| = |\|a\| \, \|b\| \cos\theta| = |\cos\theta| \, \|a\| \, \|b\| \overset{|\cos\theta| \leq 1}{\leq} \|a\| \, \|b\| \, .$$

Vu la comparaison utilisée, on aura égalité ssi $|\cos\theta| = 1$ (ou si $\|a\| = 0$ ou si $\|b\| = 0$),
i. e. ssi $\theta = 0 \; [\pi]$ (ou si $a = 0$ ou si $b = 0$),
i. e. ssi $a \parallel b$ (ou si $a = 0$ ou si $b = 0$),
i. e.[13] ssi $a \parallel b$ (puisque le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur).

Variation (sur Cauchy-Schwarz) Pour tous vecteurs a et b, on a la comparaison

$$a \cdot b \leq \|a\| \, \|b\| \qquad \textit{avec égalité ssi } a \parallel b \textit{ et de même sens.}$$

(démonstration quasiment identique)

Remarques

Pourquoi "produit *scalaire*[14]" ? Parce que sa valeur est un scalaire.

Pourquoi "*produit* scalaire" ? Parce que ce produit se ***distribue*** sur l'addition : on a pour tous vecteurs u, v et w les égalités

$$\begin{cases} u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \\ (u + v) \cdot w = u \cdot w + u \cdot v \end{cases}.$$

On a de plus une ***associativité*** des multiplications scalaires[15] : pour tout scalaire λ et pour tous vecteurs a et b, on a

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda \, (a \cdot b) \qquad (\text{qui vaut aussi } a \cdot (\lambda b)\,).$$

La distributivité et l'associativité expriment la ***bilinéarité***[16] du produit scalaire, EXACTEMENT COMME LE PRODUIT USUEL DE NOMBRES REELS. La bilinéarité permet donc de faire du calcul "comme d'habitude" : on pourra *e. g.*, étant donnés deux vecteurs a et b, développer le carré

$$(3a - 2b)^2 = 9a^2 - 12 \, (a \cdot b) + 4b^2.$$

Propriété. *On a pour tous vecteurs u et v l'équivalence*

$$u \perp v \Longleftrightarrow u \cdot v = 0$$

[11] les symboles $<$ et $>$ s'appellent des ***chevrons***

[12] On parle généralement d'*inégalité*. Si l'on suit l'étymologie, "in-égal" signifie "non-égal". Or une comparaison n'énonce pas une non-égalité (d'ailleurs elle parle souvent du cas d'égalité), elle *compare* l'ordre respectif de deux objets.

[13] on invoque l'équivalence (p ou q) $\Longleftrightarrow p$ valide lorsque q implique p (ici p et q désignent des propositions quelconques)

[14] on parlera en anglais de *scalar product* ou de *dot product* (évoque le *dot* $\cdot$ dans la notation $a \cdot b$)

[15] scalaire·vecteur ou vecteur·vecteur

[16] linéarité en chacun de ses deux vecteurs

(intérêt : au lieu d'une démonstration géométrique, un calcul pourra suffire pour prouver une orthogonalité).

Propriété. *On a pour tout vecteur u l'égalité*

$$u \cdot u = \|u\|^2$$

(intérêt : pouvoir traduire des problèmes de distances (où la norme d'une somme de vecteurs ne s'exprime pas directement en fonction des normes de ces vecteurs) en termes de produits scalaires (où le calcul bilinéaire est aisé)).

Application. [dessin : triangle ABC, côtés a, b, c, angles α, β, γ]. On écrit

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\ AB\ \cos\widehat{BAC},$$

d'où l'on déduit

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (\textbf{\textit{relation d'Al-Kashi}}).$$

On a donc l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$ ssi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, *i. e.* ssi le triangle ABC est rectangle en A (cette équivalence est le ***théorème de Pythagore***).

(★ on n'a pas affirmé l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$ —> lire la phrase jusqu'au bout !)

Application. Fixons deux points A et B. On sait que le lieu des points M tels que $AM = BM$ es la ***médiatrice*** du segment $[AB]$ (ou son ***plan médiateur*** si l'on est dans l'espace) [dessin]

Que dire du lieu $\mathcal{L}$ des points M tels que $2AM = BM$?

Fixons un point M. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{L} &\iff 2AM = BM \qquad (\text{définition de } \mathcal{L})\\
&\iff (2AM)^2 = BM^2 \qquad (\text{tout est positif})\\
&\iff \left(2\overrightarrow{AM}\right)^2 = \overrightarrow{BM}^2 \qquad (u \cdot u = \|u\|^2\,)\\
&\iff \left(2\overrightarrow{AM}\right)^2 - \overrightarrow{BM}^2 = 0 \qquad (\text{tout passer du même côté})\\
&\iff \left(2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) = 0 \qquad (\text{factorisation } u^2 - v^2 = (u-v)\,(u+v)\,)\\
&\iff (2-1)\,\overrightarrow{GM} \cdot (2+1)\,\overrightarrow{HM} = 0 \qquad (\text{introduction des barycentres } G \text{ et } H \text{ adéquats})\\
&\iff \overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{HM} \qquad (\text{caractérisation de l'orthogonalité par la nullité d'un produit scalaire}).
\end{aligned}$$

[dessin ; les barycentres G et H tels que $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$]

Si on se souvient que l'angle sous-tendu par un diamètre d'un cercle est toujours droit, on a envie de montrer que le lieu $\mathcal{L}$ cherché est le cercle $\mathcal{S}$ de diamètre $[GH]$ (ou, dans l'espace, la sphère).

[dessin : cercle de diamètre $[GH]$ avec un angle droit sous-tendu par ce diamètre]

Montrons que cette intuition est bien fondée. Reprenons nos équivalences en faisant apparaître le centre voulu (le milieu O de $[GH]$) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 &\iff \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}\right)\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}\right) = 0 \qquad (\text{relation de Chasles})\\
&\iff \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}\right)\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OG}\right) = 0 \qquad (O \text{ est milieu de } [GH]\,)\\
&\iff \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OG}^2 = 0 \qquad (\text{développer } (u-v)\,(u+v) = u^2 - v^2)\\
&\iff OM^2 = OG^2 \qquad (u \cdot u = \|u\|^2\,)\\
&\iff OM = OG \qquad (\text{tout est positif})\\
&\iff M \text{ est sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } OG \qquad (\text{définition d'un cercle})\\
&\iff M \text{ est sur le cercle de diamètre } [GH] \qquad (O \text{ est milieu de } [GH]\,)\\
&\iff M \in \mathcal{S} \qquad (\text{définition de } \mathcal{S}).
\end{aligned}$$

Conclusion. On vient d'établir, pour tout point M fixé, l'équivalence $M \in \mathcal{L} \iff M \in \mathcal{S}$. Cette équivalence dit qu'un point donné appartient à $\mathcal{L}$ ssi il appartient au cercle (la sphère) $\mathcal{S}$. Cela permet d'identifier les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}$, ce qui conclut la preuve[17]. □

[17] le symbole □ est un repère usuel dans la littérature mathématique pour signaler la fin d'une démonstration

Remarque. La preuve qui suit doit être relue et comprise dans tous ses détails (c'est la première preuve conséquente du cours). On peut la visualiser comme un escalier (la succession d'équivalences) où l'on s'assure du passage CERTAIN d'une marche à une autre. Au lieu de franchir d'un bond toutes les marches de l'escalier (ce qui est très dangereux), on procède petit à petit, avec CONFIANCE et CERTITUDE. Au bout de l'escalier, on peut se retourner et contempler le chemin parcouru (la preuve) qui s'est profilé petit à petit : "*Wow, j'ai vraiment monté/descendu tout ça ?*" – Et oui, juste avec des petits pas. Il convient donc de considérer avec *respect* les petits pas – ainsi que le soin que l'on prendra à les assurer.

Propriété (calcul effectif du produit scalaire). *Dans une base* orthonormée*, le produit scalaire vaut la somme des produits des coordonnées :*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

On en déduit que la norme vaut la racine de la somme des carrés des coordonnées (toujours dans une base orthonormée*) :*

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Application. Montrer que la famille formée des vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et ***équinormée*** (*i. e.* tous ses vecteurs ont même norme).

On calcule les produits scalaires

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)\,2 + 2\,(-1) + 2 \cdot 2 = -2 - 2 + 4 = 0$$

et montre de même les deux autres orthogonalités. En considérant les carrés des normes (pour ne pas à avoir à écrire de racines), on trouve

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

(*idem* pour les deux autre vecteurs), ce qui montre que les trois vecteurs ont pour norme $\sqrt{9} = 3$.

Application (calcul de l'angle formé par deux vecteurs)**.** Donner une valeur approchée à 1° de l'angle formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Appelons a et b nos deux vecteurs et θ l'angle cherché (non orienté). On sait que $\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}$. On calcule donc d'une part le produit scalaire

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + (-2)\,3 + (-2)\,2 = 6 - 6 - 4,$$

d'autre part les normes

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ \text{et } \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{6^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\cos\theta = -\frac{4}{21} \simeq -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5} = -0.2.$$

L'approximation ci-dessus suggère (dessiner le cercle trigo !) que l'angle cherché est un peu plus grand que 90°. En effet, la calculette nous donne (en inversant la relation $\cos\theta = -\frac{4}{21}$) $\theta \simeq 101°$.

Application (équation d'un plan donné par un point et un vecteur normal). Donner l'équation du plan contenant le point $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et normal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Notons A et n les point et vecteur donnés. Fixons un point $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors les équivalences (DESSSIN !)

$$\begin{aligned} P \text{ appartient au plan cherché} &\iff \overrightarrow{AP} \perp n \\ &\iff \overrightarrow{AP} \cdot n = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x-1) + 2(y+2) - 3z = 0 \\ &\iff x + 2y - 3z + 3 = 0. \end{aligned}$$

On observera que les coordonnées d'un vecteur normal se lisent dans l'équation en lisant les coefficients devant les coordonnées (TRÈS UTILE).

Application (distance d'un point à un plan) La distance d'un point A à un plan d'équation $\lambda x + \mu y + \nu z + \xi = 0$ est donnée par

$$\frac{|\lambda x_A + \mu y_A + \nu z_A + \xi|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}$$

(substituer dans l'équation du plan les coordonnées du point dont on cherche la distance au plan)

Démonstration. Notons $P(x, y, z)$ le projeté orthogonal de A sur le plan considéré ; la distance cherchée vaut donc AP. Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ étant orthogonal au plan, il est colinéaire à un vecteur normal, par exemple (λ, μ, ν) (lu dans l'équation), ce qui s'écrit $\overrightarrow{AP} = \alpha(\lambda, \mu, \nu)$ pour un certain scalaire α. On en déduit les coordonnées de P :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + \alpha\lambda \\ y_A + \alpha\mu \\ z_A + \alpha\nu \end{pmatrix}.$$

Or P appartient au plan, donc ses coordonnées satisfont son équation, ce qui s'écrit

$$\lambda(x_A + \alpha\lambda) + \mu(y_A + \alpha\mu) + \nu(z_A + \alpha\nu) + \xi = 0,$$

d'où l'on déduit le scalaire inconnu

$$\alpha = -\frac{\lambda x_A + \mu y_A + \nu z_A + \xi}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Tout étant exprimé en fonction des données de l'énoncé, on peut conclure :

$$AP = \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \|\alpha(\lambda, \mu, \nu)\| = |\alpha|\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \frac{|\lambda x_A + \mu y_A + \nu z_A + \xi|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}.$$

Application (très utile en mécanique) Dans une base *orthonormée*, les coordonnées d'un vecteur d'obtiennent en en faisant le produit scalaire contre les vecteurs de base :

$$u\begin{pmatrix} (u \mid i) \\ (u \mid j) \\ (u \mid k) \end{pmatrix} = (u \mid i)\, i + (u \mid j)\, j + (u \mid k)\, k.$$

[dessin : trois axes dirigés par i, j, k, un vecteur u, ses projeté sur le plan Oij (H) et la droite Ok, les coordonnées $(u \mid i)$, $(u \mid j)$ et $(u \mid k)$, les distances $r := OH$ et $\rho := \|u\|$, les angles $\theta := i\widehat{O}H$ et $\varphi := k\widehat{O}u$]

On lit par exemple

$$\begin{cases} (u \mid i) = r\cos\theta \\ (u \mid j) = r\sin\theta \\ (u \mid k) = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad \text{avec } r = \rho\sin\varphi.$$

Les coordonnées (r, θ, z) sont dites ***cylindriques*** (elles sont formées des coordonées polaires z, θ dans le plan Oij ainsi que de la cote $z := (u \mid k)$), les coordonnées (ρ, θ, φ) sont dites ***sphériques***.

7 Produit vectoriel

Des vecteurs seront dits ***coplanaires*** s'ils possèdent des directions appartenant à un même plan.

Remarque. Pour tous vecteurs u et v, on a la ***coplanarité*** (ou ***coplanéité***) des vecteurs u et v ainsi que celle des vecteurs 0, u et v.

Propriété. *Étant donnés trois vecteurs u, v et w, on a l'équivalence suivante*

$$u, v, w \text{ coplanaires} \iff \begin{cases} \text{deux d'entre eux sont colinéaires } \textit{ou} \\ \text{l'un est combinaison linéaire des deux autres} \end{cases}$$

(cela doit rappeller la digression sur la colinéarité).

Commentaire. Le premier cas (colinéarité) est en quelque sorte dégénéré (analogue du cas de la colinéarité de deux vecteurs dont l'un est nul). Le second cas doit se voir dans un plan (DESSIN !) où les coefficients de la combinaison linéaire représentent ses coordonnées dans la base formée par les deux autres vecteurs (qui n'ont aucune raison d'être orthonormés).

Orientation dans l'espace.

Un ***trièdre*** désignera tout ***triplet*** (trio *ordonné*) de vecteurs non coplanaires.

Considérons un trièdre (a, b, c) de même origine. Quand quelqu'un a ses pieds en l'origine et sa tête dans le sens donné par le vecteur c, il "voit" le plan contenant a et b d'un seul côté ; ***orienter*** le trièdre a, b, c, c'est orienter ce plan. Lorsque c voit qu'on tourne de a vers b dans le sens décrété positif/direct (par l'orientation choisie), le trièdre est dit ***direct*** (***indirect*** sinon). ***Orienter*** l'espace, c'est orienter tous ses trièdres dans le même sens.

Considérons deux vecteurs a et b de l'espace. On note

1. $\mathcal{A}_{a,b}$ l'aire du parallélogramme de "côtés" a et b ;
2. $n_{a,b}$ un vecteur unitaire normal à a et b tel que (si cela fait sens) le trièdre $(a, b, n_{a,b})$ soit direct.

On définit alors le ***produit vectoriel*** de a et b par le vecteur $\mathcal{A}_{a,b} n_{a,b}$. Il est noté $a \times b$ ou $a \wedge b$:

$$a \times b := \mathcal{A}_{a,b} n_{a,b} =: a \wedge b.$$

[dessin : a, b, $n_{a,b}$, l'angle positif (non orienté) $\theta := \widehat{ab}$, la normale à a et b, la hauteur h du parallélogramme relative au côté a]

Remarque. Dans le parallélogramme de "côtés" a et b, la hauteur relative au côté a s'exprime par $\|b\| \sin\theta$. On en déduit $\mathcal{A}_{a,b} = \|a\| \, \|b\| \sin\theta$, d'où l'on tire

$$\|a \times b\| = \|a\| \, \|b\| \sin\theta \qquad \text{(avec } \theta \text{ non orienté).}$$

Application. La distance d'un point A à la droite[18] $O + \mathbf{R}u$ passant par un point O et dirigée par un vecteur u est donnée par

$$\operatorname{dist}\begin{pmatrix} \text{point } A \\ \text{droite } O + \mathbf{R}u \end{pmatrix} = \frac{\left\| \overrightarrow{OA} \times u \right\|}{\|u\|}.$$

Démonstration. [dessin : A, O, u, la droite, le projeté H de A sur la droite] La distance cherchée vaut $AH = OA \sin\theta$.

[18] Notons Δ la droite passant par O et dirigée par u. Un point M appartiendra à Δ ssi $\overrightarrow{OM} \parallel u$, ce qui s'écrit (puisque u est non nul) $\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{OM} = \lambda u$, ou encore $\exists \lambda \in \mathbf{R},\ M = O + \lambda u$. Ainsi, la droite Δ s'identifie à l'ensemble des points $O + \lambda u$ lorsque λ décrit/parcourt $\mathbf{R}$, ce qui est précisément le sens de la notation $O + \mathbf{R}u$.

Exemples (de produits vectoriels) On se donne deux trièdres orthornormés directs (i, j, k) et (u, v, k). Alors

[dessin : les deux trièdres, l'angle orienté θ de i vers u]

$$i \times j = k \qquad i \times u = (\sin\theta)\, k \qquad u \times k = -v \qquad v \times i = -(\cos\theta)\, k.$$

Propriétés. *On donne trois vecteurs a, b et c ainsi que deux scalaires λ et μ. On a*

$$a \times b = 0 \iff a \parallel b \qquad (\text{intérêt : } cf.\ a \cdot b = 0 \iff a \perp b)$$

$$a \perp a \times b \qquad \text{et} \qquad b \perp a \times b$$

$$b \times a = -a \times b \qquad (\textbf{\textit{anti-commutativité}} \text{ de } \times)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda a) \times (\mu b) = \lambda\mu\,(a \times b) \\ a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ (a + b) \times c = a \times c + b \times c \end{array} \right. \qquad (\textbf{\textit{bilinéarité}} \text{ de } \times)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c \\ (a \times b) \times c = (a \cdot c)\, b - (b \cdot c)\, a \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \text{(commencer par développer} \\ \text{le "plus loin" d'abord)} \end{array}$$

★ le produit vectoriel *n'est pas associatif* : en effet, les deux membres de droite ci-dessus coïncident ssi $(a \cdot b)\, c = (b \cdot c)\, a$, ce qui force la colinéarité de a et c (laquelle est fausse en générale). Pour un contre-exemple explicite, reprendre les deux trièdres (i, j, k) et (u, v, k) ci-dessus et observer la différence entre les vecteurs

$$\begin{array}{rcl} (i \times u) \times k & = & (\sin\theta)\, k \times k = 0 \text{ et} \\ i \times (u \times k) & = & i \times (-v) = v \times i = -(\cos\theta)\, k. \end{array}$$

Remarque Pourquoi "produit *vectoriel*[19]" ? Parce que sa valeur est un vecteur. Pourquoi "*produit* vectoriel" ? Parce que ce produit est bilinéaire.

Propriété (calcul du produit vectoriel) *Dans une base* orthonormée directe*, le produit vectoriel s'exprime comme suit :*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{(prolonger les vecteurs vers le bas en répétant} \\ \text{les coordonnées puis dessiner trois "gamma" } \gamma) \end{array}$$

Démonstration. Notons i, j, k nos trois vecteurs de base. La bilinéarité permet alors de développer

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} & = & \times \begin{array}{l} (ai + bj + ck) \\ (\alpha i + \beta j + \gamma k) \end{array} \\ & = & \left[\begin{array}{l} ai \times \alpha i + ai \times \beta j + ai \times \gamma k \\ +bj \times \alpha i + bj \times \beta j + bj \times \gamma k \\ +ck \times \alpha i + ck \times \beta j + ck \times \gamma k \end{array} \right. \\ & = & \left[\begin{array}{l} a\alpha \underbrace{(i \times i)}_{=0} + a\beta \underbrace{(i \times j)}_{=k} + a\gamma \underbrace{(i \times k)}_{=-j} \\ +b\alpha \underbrace{(j \times i)}_{=-k} + b\beta \underbrace{(j \times j)}_{=0} + b\gamma \underbrace{(j \times k)}_{=i} \\ +c\alpha \underbrace{(k \times i)}_{=j} + c\beta \underbrace{(k \times j)}_{=-i} + c\gamma \underbrace{(k \times k)}_{=0} \end{array} \right. \\ & = & (b\gamma - c\beta)\, i + (c\alpha - a\gamma)\, j + (a\beta - b\alpha)\, k, \qquad c.\ q.\ f.\ d. \end{array}$$

(cette démonstration est purement calculatoire et ne présente aucune difficulté, sinon du soin).

Application. Calculer l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[19] on parlera en anglais de *vector product* ou de *cross product* (évoque la *cross* $\times$ dans la notation $a \times b$)

L'aire cherchée est la norme du produit vectoriel de nos deux vecteurs. On calcule donc ce dernier :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 - (-2)\,4 \\ (-2)\,(-3) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - (-3)\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix},$$

d'où l'aire cherchée $\sqrt{8^2 + 6^2 + 19^2} = \sqrt{461}$.

Remarque (intersection de plans) Si n et n' désignent respectivement deux vecteurs normaux à des plans π et π', alors la droite $\pi \cap \pi'$ est dirigée[20] par le produit vectoriel $n \times n'$.

Notation. Le symbole "$\cap$" se lit "*inter*" et dénote une ***intersection*** (l'ensemble des points en commun).

Application. Déterminer la droite située à l'intersection des plans d'équations $2x - 3y + z = 4$ et $x + 5y - z = 2$.

On commence par lire deux vecteurs normaux dans les équations, à savoir $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. La droite cherchée est donc dirigée par le produit vectoriel $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$. Il reste à en trouver un point : en essayant des valeurs simples, on voit que le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie les deux équations. La droite cherchée est donc

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

8 Produits mixtes & déterminants

Quand on *mélange* produits scalaire et vectoriel, on obtient un produit dit *mixte*.

Le ***produit mixte*** de trois vecteurs de l'espace est défini et noté par

$$[a, b, c] := (a \times b) \cdot c.$$

C'est donc un *scalaire*[21] : $\underbrace{\overbrace{(a \times b)}^{\text{vecteur}} \cdot \overbrace{c}^{\text{vecteur}}}_{\text{scalaire}}$.

Propriétés. Fixons trois vecteurs a, b, c de l'espace.

• Le produit mixte $[a, b, c]$ représente le ***volume signé*** du parallélépipède de "côtés" a, b, c (signe $+$ si le trièdre (a, b, c) est direct, signe $-$ sinon). [dessin d'un parallélépipède]

• Le produit mixte est inchangé par ***permutation circulaire*** des vecteurs considérés [dessin : cercle avec a, b, c]

$$[a, b, c] = [c, a, b] = [b, c, a].$$

• Le produit mixte est opposé par ***transposition*** de deux des trois vecteurs considérés [dessin : triangle de sommets a, b, c avec trois réflexions]

$$[a, b, c] = -[b, a, c] = -[c, b, a] = -[a, c, b].$$

• Le produit mixte est ***trilinéaire*** :

$$\begin{array}{rclll} [\lambda a, \mu b, \nu c] & = & \lambda\mu\nu\,[a, b, c] & \text{pour tous scalaires } \lambda, \mu, \nu & \text{et} \\ \left[\begin{array}{c} a \\ +\alpha \end{array}, b, c\right] & = & + \begin{array}{c} [a, b, c] \\ [\alpha, b, c] \end{array} & \begin{array}{l} \text{pour tout vecteur } \alpha \text{ (idem pour} \\ \text{les deux autres positions).} \end{array} & \end{array}$$

[20] sauf cas pathologique où les plans π et π' sont parallèles, ce qui revient à la colinéarité de n et n' (et donc se verra tout de suite lors du calcul de $n \times n'$ puisqu'on trouvera 0)

[21] on parlera en anglais de *triple scalar product*

• La nullité d'un produit mixte équivaut à une coplanéité[22] :

$$[a,b,c]=0 \Longleftrightarrow a,b,c \text{ coplanaires} \qquad \left(\text{intérêt : } \textit{cf.} \begin{array}{c} a\cdot b=0 \Longleftrightarrow a\perp b \\ a\times b=0 \Longleftrightarrow a \parallel b \end{array}\right)$$

Propriété (calcul du produit mixte) Dans une base *orthonormée directe*, le produit se calcul comme suit :

$$\left[\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix}\right] = \begin{array}{c} a\beta C+\alpha Bc+Ab\gamma \\ -c\beta A-\gamma Ba-Cb\alpha \end{array}.$$

[dessin : prolonger les colonnes, trois droites ╲ avec un signe +, trois droites ╱ avec un signe −]

On le note plus simplement $\begin{vmatrix} a & \alpha & A\\ b & \beta & B\\ c & \gamma & C\end{vmatrix}$ et on l'appelle le ***déterminant*** des trois vecteurs considérés, d'où la notation alternative pour le produit mixte de trois vecteurs u, v et w :

$$\operatorname{Det}(u,v,w) := [u,v,w]$$

Remarque (dépendance en l'orientation). Si l'on change l'orientation de l'espace, tous les produits mixtes seront transformés en leurs opposés respectifs.

Par analogie au produit mixte dans l'espace, on définit le produit mixte de *deux* vecteurs par l'aire signée du parallélogramme de "côtés" a et b (signe + si l'angle $\widehat{ab}$ est direct, signe − sinon) : [dessin d'un parallélogramme]

$$[a,b] := \begin{cases} +\mathcal{A}_{a,b} \text{ si } & 0\le \operatorname{mes}\widehat{ab}\le\pi \\ -\mathcal{A}_{a,b} \text{ si } & -\pi\le \operatorname{mes}\widehat{ab}\le 0 \end{cases}.$$

Propriétés.
• Le produit mixte de deux vecteurs est anti-commutatif et bilinéaire.
• Dans une base orthonormée directe, il s'exprime comme suit :

$$\left[\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right] = a\beta-b\alpha \qquad (\text{dessiner un "gamma" } \gamma).$$

On le note plus simplement $\begin{vmatrix} a & \alpha\\ b & \beta\end{vmatrix}$ et on l'appelle le ***déterminant*** des deux vecteurs considérés, d'où la notation alternative pour le produit mixte de deux vecteurs u et v :

$$\operatorname{Det}(u,v) := [u,v]\,.$$

Remarque (expression déterminantale du produit vectoriel). À l'aide du déterminant de deux vecteurs, on peut réécrire l'expression du produit vectoriel dans une base orthonormée sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b & c\\ \beta & \gamma\end{vmatrix},\begin{vmatrix} c & a\\ \gamma & \alpha\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\right).$$

Remarque (dépendance en l'orientation). Le déterminant $[a,b]$ dépend de l'orientation choisie dans le[23] plan contenant a et b. Si l'on change cette dernière, tous les produits mixtes seront transformés en leurs opposés respectifs.

Remarque (lien entre produits mixtes). Considérons deux vecteurs a et b dans l'espace ainsi que le vecteur normal unitaire $n_{a,b}$ associé (*cf.* définition du produit vectoriel). Ce dernier donne une orientation du plan contenant a et b selon laquelle le déterminant $[a,b]$ est positif. On pourra donc écrire (selon cette orientation) $a\times b=[a,b]\ n_{a,b}$, d'où l'on tire (en faisant le produit scalaire contre $n_{a,b}$)

$$\operatorname{Det}(a,b)=\operatorname{Det}(a,b,n_{a,b})$$

[22] pour une démonstration lorsque a et b ne sont pas colinéaires, on déroulera les équivalences suivantes : a,b,c coplanaires $\Longleftrightarrow$ c appartient au plan contenant a et b $\Longleftrightarrow$ c orthogonal à un vecteur normal au plan contenant a et b $\Longleftrightarrow$ c orthogonal à $a\times b \Longleftrightarrow a\times b\perp c \Longleftrightarrow (a\times b)\cdot c=0 \Longleftrightarrow [a,b,c]=0$.

[23] si ce plan n'est pas unique, les vecteurs a et b sont colinéaires et donc de déterminant nul (quel que soit le plan choisi et quelle que soit l'orientation de ce plan choisie)

(il reste bien sûr plus efficace de calculer $[a,b]$ en prenant la norme de $a\times b$).

Il résulte de l'identité $a\times b=[a,b]\ \ n_{a,b}$ l'équivalence suivante :

$$a\parallel b\Longleftrightarrow \operatorname{Det}(a,b)=0.$$

9 Distance entre deux droites

La distance entre deux droites parallèles est aisée à calculer : projeter orthogonalement n'importe quel point de l'autre sur l'autre [dessin : deux droites α et β parallèles, deux points $A\in\alpha$ et $B\in\beta$ tels que $(AB)\perp\alpha,\beta$]

Rappel : la distance entre deux lieux géométriques L et L′ est la plus petite distance AA' pour A parcourant $\mathcal{L}$ et A' parcourant $\mathcal{L}'$.

★ la distance n'est pas toujours atteinte ! Lorsque L est un disque ouvert (disque fermé privé de sa frontière) et $\mathcal{L}'$ une droite ne rencontrant pas $\mathcal{L}$ [DESSIN], la distance vaut celle du cercle frontière de $\mathcal{L}$ à la droite $\mathcal{L}'$ mais aucun point du disque ouvert ne réalise cette plus petite distance (analogie : l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ ne possède pas de plus petit élément : s'il en possédait un, disons a, alors $\frac{a}{2}$ serait un élément de $\mathbf{R}_+^*$ strictement plus petit que son plus petit élément a, ce qui serait absurde).

Considérons à présent deux droites $\left\{\begin{array}{l}\alpha=A+\mathbf{R}u\\ \beta=B+\mathbf{R}v\end{array}\right.$ non parallèles (*i. e.* u et v non colinéaires). Sans nuire à la généralité, on peut supposer u et v unitaires (quitte à les ***normaliser***, *i. e.* à les diviser chacun par sa norme).

Par analogie avec le cas $\alpha\parallel\beta$, supposons trouvés deux points $\left\{\begin{array}{l}a\in\alpha\\ b\in\beta\end{array}\right.$ tels que $\overrightarrow{ab}$ soit orthogonal à u et v (*i. e.* l'un est projeté orthogonal de l'autre sur l'autre droite) (on dit que la droite (ab) est une (droite) ***perpendiculaire commune*** à α et β). [DESSIN] Montrons que la distance cherchée vaut ab et n'est atteinte *que* en (a,b).

Considérons deux points $\left\{\begin{array}{l}M\in\alpha\\ N\in\beta\end{array}\right.$. Par définition de $\left\{\begin{array}{l}\alpha=A+\mathbf{R}u\\ \beta=B+\mathbf{R}v\end{array}\right.$, il y a des scalaires $\binom{\lambda}{\mu}$ tel que $\left\{\begin{array}{l}M=a+\lambda u\\ N=b+\mu v\end{array}\right.$. La distance MN est la norme du vecteur "différence" $\overrightarrow{MN}=(b+\mu v)-(a+\lambda u)=\mu v-\lambda u+\overrightarrow{ab}$, à savoir la racine du carré scalaire[24]

$$MN^2=\left\|\mu v-\lambda u+\overrightarrow{ab}\right\|^2=\|\mu v\|^2+\|-\lambda u\|^2+\left\|\overrightarrow{ab}\right\|^2+2\,(\mu v)\cdot(-\lambda u)+2\,(\mu v)\cdot\overrightarrow{ab}+2\,(-\lambda u)\cdot\overrightarrow{ab}.$$

En se souvenant que u et v sont unitaires et orthogonaux à $\overrightarrow{ab}$, le carré scalaire ci-dessus se simplifie en introduisant l'angle $\theta:=\widehat{uv}$:

$$\begin{array}{rcl}\left\|\mu v-\lambda u+\overrightarrow{ab}\right\|^2&=&\mu^2+\lambda^2+ab^2-2\lambda\mu\cos\theta+0+0\\ &=&ab^2+\underbrace{(\mu-\lambda\cos\theta)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\lambda^2\left(1-\cos^2\theta\right)}_{\geq 0}\\ &\geq&ab^2\end{array}$$

avec égalité ssi $\left\{\begin{array}{l}(\mu-\lambda\cos\theta)^2=0\\ \lambda^2\sin^2\theta=0\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{l}\mu=\lambda\cos\theta\\ \lambda=0\text{ ou }\theta=0\ \ [\pi]\end{array}\right.$, *i. e.* ssi (le cas $\theta=0\ \ [\pi]$ équivaut à la colinéarité de u et v, laquelle a été exclue au début de la discussion), $\left\{\begin{array}{l}\mu=\lambda\cos\theta\\ \lambda=0\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\lambda=0=\mu$, ce qui revient à l'égalité des points $\binom{M}{N}=\binom{a}{b}$.

[24] que l'on développera par bilinéarité selon l'identité remarquable

$$(r+s+t)^2=r^2+s^2+t^2+2rs+2st+2rt$$

Résumé. On a montré que, pour tous points $\begin{cases} M \in \alpha \\ N \in \beta \end{cases}$, la distance MN était $\geq ab$ et que l'égalité $MN = ab$ impliquait $\binom{M}{N} = \binom{a}{b}$. C'est précisément ce que l'on avait annoncé

Remarque (unicité). Ce qui précède montre que les deux points a et b (s'ils existent) sont *uniques*. En effet, si $\begin{cases} a' \in \alpha \\ b' \in \beta \end{cases}$ sont deux autres points tels que $\overrightarrow{a'b'} \perp u$ et $\overrightarrow{a'b'} \perp v$, alors ce qui précède montre que $a'b' \geq ab$ (en voyant a et b comme projetés orthogonaux mutuels et en voyant a' et b' comme points quelconques sur α et β) mais également que $ab \geq a'b'$ (en voyant cette fois a' et b' comme projetés orthogonaux mutuels et en voyant a et b comme points quelconques sur α et β), d'où l'égalité des distances $ab = \alpha\beta$ et (toujours d'après ce qui précède) celle des points $\binom{a}{b} = \binom{a'}{b'}$.

À RETENIR Pour montrer qu'un objet vérifiant une propriété donnée est le *seul* à la satisfaire, on considère un objet vérifiant la même propriété et on montre que les deux objets sont égaux.

Montrons à présent l'*existence* des points a et b sus-considérés. (Ce qui suit est une voie à suivre pour expliciter ces points dans les situations particulières que l'on rencontrera).

Fixons deux scalaires λ et μ et posons $\begin{cases} a := A + \lambda u \\ b := B + \mu v \end{cases}$. Les conditions $\begin{cases} \overrightarrow{ab} \perp u \\ \overrightarrow{ab} \perp v \end{cases}$ se réécrivent en termes de produits scalaires nuls :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ab} \perp u \\ \overrightarrow{ab} \perp v \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \overrightarrow{ab} \cdot u = \left(\mu v - \lambda u + \overrightarrow{ab}\right) \cdot u = \mu \cos\theta - \lambda + \overrightarrow{ab} \cdot u \\ 0 = \overrightarrow{ab} \cdot v = \left(\mu v - \lambda u + \overrightarrow{ab}\right) \cdot v = \mu - \lambda\cos\theta + \overrightarrow{ab} \cdot v \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda - \mu\cos\theta = \overrightarrow{ab} \cdot u \\ \lambda\cos\theta - \mu = \overrightarrow{ab} \cdot v \end{cases}.$$

MÉTHODE Pour résoudre un système $\begin{cases} ax + by = c \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$.en les inconnues $\binom{x}{y}$, système que l'on réécrira sous la forme $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{\text{la } \textbf{matrice} \text{ du système}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$:

1. calculer le déterminant $\Delta := \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - \alpha b$;
2. si $\Delta \neq 0$, alors le système équivaut à $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ (il y a donc une *unique* solution) où $\Delta\xi$ représente le déterminant Δ où l'on a remplacé la colonne correspondant à la coordonnée ξ par la colonne $\binom{c}{\gamma}$ des constantes (ici $\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}$ et $\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}$) ; dans le cas contraire (*i. e.* lorsque $\Delta = 0$), une ligne est superflue (ouvrir alors les yeux pour voir laquelle selon la situation donnée) et le système est dit ***dégénéré*** (pas de solutions ou une infinité de solutions).

Application. Les conditions $\begin{cases} \overrightarrow{ab} \perp u \\ \overrightarrow{ab} \perp v \end{cases}$ équivalent au système $\begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta \\ \cos\theta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{ab} \cdot u \\ \overrightarrow{ab} \cdot v \end{pmatrix}$ en l'inconnue $\binom{\lambda}{\mu}$. Le déterminant vaut $-1 + \cos^2\theta = -\sin^2\theta$: il s'annule ssi $\theta = 0 \ [\pi]$, ce qui est impossible car revient à $u \parallel v$. Le système admet donc une solution (dont on a déjà discutée l'unicité), d'où l'existence recherchée.

10 Équations dans le plan et dans l'espace

Considérons un lieu géométrique $\mathcal{L}$ (dans le plan ou l'espace).

Une ***équation*** de $\mathcal{L}$ est une équation dont l'inconnue est un point (ou tout famille de scalaires codant ce point, comme des coordonnées) et dont les solutions sont précisément les points de $\mathcal{L}$.

Bien souvent, les inconnues sont les coordonnées cartésiennes (x, y) ou (x, y, z) mais on peut aussi prendre les coordonnées polaires (r, θ), cylindriques (r, θ, z) ou sphériques (ρ, θ, φ).

Exemples d'équations (ce qui suit dit parfois à quoi peut ressembler une équation, parfois comment trouver une telle équation, souvent à l'aide des outils vectoriels développés en amont dans le cours –> D'OÙ UN INTÉRÊT POUR CES OUTILS ! !)

1. tout le plan (ou tout l'espace) :
$$0 = 0.$$
2. le ***lieu vide*** $\emptyset$:
$$0 = 1, \qquad x^2 + y^2 = -1, \qquad \cos\theta = \pi, \qquad e^\rho = \frac{1}{2} \qquad \ldots$$

Dans le plan :

3. une droite de pente λ :
$$y = \lambda x + \mu$$
(où μ est à déterminer : c'est l'***ordonnée à l'origine***, *i. e.* l'ordonnée du point de la droite d'abscisse nulle).
Rappel : la pente λ vaut le ***taux*** (=rapport=quotient) ***de variation*** ou d'***accroissement*** (variation=accroissement=différence) $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre deux points quelconques $A \neq B$ de la droite [DESSIN].
4. une droite en l'origine faisant un angle θ_0 avec $\overrightarrow{Ox}$:
$$\theta = \theta_0 \ [\pi]$$
(si on retire le "$[\pi]$", on obtient une *demi*-droite) [DESSIN].
5. cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon R [DESSIN] :
$$\begin{aligned} \text{un point } M \text{ est sur ce cercle} &\iff \Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2 \\ &\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \end{aligned}$$
6. disque fermé de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon R :
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2.$$
7. disque ouvert de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon R :
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2.$$
8. cercle de centre 0 et de rayon R :
$$r = R.$$
9. une droite de vecteur normal $n\binom{a}{b}$ et passant en un point P [DESSIN] :
$$\begin{aligned} \text{un point } M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est sur cette droite} &\iff \overrightarrow{PM} \perp n \iff \overrightarrow{PM} \cdot n = 0 \\ &\iff ax + by + c = 0 \text{ (avec } c \text{ à déterminer).} \end{aligned}$$
10. une droite $P + \mathbf{R}u$ de vecteur directeur u et passant en un point P [DESSIN] :
$$\text{un point } M \text{ est sur cette droite} \iff \overrightarrow{PM} \parallel u = 0 \iff \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{PM}, u\right) = 0.$$

Dans l'espace :

11. une droite $P + \mathbf{R}u$ de vecteur directeur u et passant en un point P [DESSIN] :
$$\text{un point } M \text{ est sur cette droite} \iff \overrightarrow{PM} \parallel u = 0 \iff \overrightarrow{PM} \times u = 0.$$
Rappel : dans tous les cas (plan ou espace) :
$$\text{un point } M \text{ appartient à la droite } P + \mathbf{R}u \iff \exists \lambda \in \mathbf{R},\ M = P + \lambda u.$$
12. un plan défini par un vecteur normal $n\,(a,b,c)$ et un point P [DESSIN] :
$$\begin{aligned} \text{un point } M\,(x,y,z) \text{ est sur ce plan} &\iff \overrightarrow{AM} \perp n = 0 \iff \overrightarrow{PM} \cdot n = 0 \\ &\iff ax + by + cz + d = 0 \text{ (avec } d \text{ à déterminer).} \end{aligned}$$

13. un plan défini par un point P et deux vecteurs u et v [DESSIN] :

$$\text{un point } M \text{ est sur ce plan} \Longleftrightarrow \overrightarrow{PM}, u, v \text{ coplanaires} \Longleftrightarrow \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{PM}, u, v\right) = 0.$$

Remarque : un point M est sur ce plan ssi $\overrightarrow{PM}$ est combinaison linéaire de u et v, ce qui s'écrit $\exists\lambda \in \mathbf{R},\ \exists\mu \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{PM} = \lambda u + \mu v$. C'est pourquoi ce plan est noté $P + \mathbf{R}u + \mathbf{R}v$ (notation analogue à la droite $P + \mathbf{R}u$).

14. un plan vertical faisant un angle θ_0 avec $\overrightarrow{Ox}$ [DESSIN] :

$$\theta = \theta_0 \ \ [\pi]$$

(si on retire le "$[\pi]$", on obtient un *demi*-plan de frontière l'axe des cotes).

15. une droite peut être donnée comme intersection de deux plans : une équation d'une telle droite peut alors être obtenue en considérant la ***conjonction*** d'équations des plans, typiquement un système

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{array} \right. .$$

Un vecteur directeur est alors le produit vectoriel $(a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma)$ [dessin : deux plans se croisant, deux vecteurs normaux, leur produit vectoriel qui dirige la droite].

16. une sphère de centre $\Omega\,(a, b, c)$ et de rayon R (resp. boule fermée, resp. boule ouverte) [DESSIN] :

$$\begin{array}{rcl} \text{un point } M \text{ est sur cette sphère} & \Longleftrightarrow & \Omega M = R \Longleftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ & \Longleftrightarrow & (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \text{ (resp. } \leq R^2\text{, resp. } < R^2\text{).} \end{array}$$

17. une sphère de centre 0 et de rayon R :

$$\rho = R.$$

18. un (demi-)cône d'axe $\overrightarrow{Oz}$ et d'angle axial φ_0 [DESSIN avec le triangle rectangle où l'on voit $\frac{r}{z} = \tan\varphi_0$] :

$$\varphi = \varphi_0, \qquad r = z\tan\varphi_0, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = z\tan\varphi_0.$$