Rappels sur les complexes

mercredi 5 et lundi 10 septembre 2012

Table des matières

1 Complexes et couples de réels

Un (***nombre***) ***complexe*** est un objet de la forme $a+ib$ où $\begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont des (nombres) réels} \\ i \text{ est une racine carrée de } -1. \end{cases}$.

L'ensemble des complexes[1] est noté $\mathbf{C}$.

Quand on écrit un complexe c sous la forme ci-dessus, le réel a (resp. b) est appelé sa ***partie réelle*** (resp. ***partie imaginaire***) et est notée $\operatorname{Re} c$ (resp. $\operatorname{Im} c$). Tout complexe c s'écrit donc

$$c = \operatorname{Re} c + i \operatorname{Im} c.$$

Exemple Tout réel est un complexe : $a = a + 0i$.

Réciproque. Un complexe est réel ssi sa partie réelle imaginaire est nulle ou ssi il égale sa partie réelle, ce que l'on pourra écrire

$$\forall c \in \mathbb{C},\ [(c \in \mathbf{R}) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} c = 0) \Longleftrightarrow (c = \operatorname{Re} c)] .$$

Le symbole "$\forall$" (appelé ***quantificateur universel***) se lit "pour tout[2]" ou "quel que soit".

Le symbole "$\in$" (dit d'***appartenance***[3]) se lit "appartient à" ou "est (un) élément de".

Le symbole "$\Longleftrightarrow$" (dit d'***équivalence***).se lit "est équivalent à" ou "équivaut à".

Remarque Il est fondamental d'arriver à lire ce formalisme en français, ainsi que de pouvoir traduire un problème exprimé en français dans ce formalisme. Cela vient avec la pratique.

On peut $\begin{cases} \text{additionner} \\ \text{multiplier} \end{cases}$ les complexes "comme d'habitude" en remplaçant partour i^2 par -1.

Exemple On développe $(1+i)(2-7i) = 2 - 7i + 2i - 7i^2 = 9 - 5i$.

Étant donné un repère du plan, un complexe $a+ib$ *s'identifiera* au point de coordonnées $\binom{a}{b}$. Lorsqu'on représente un complexe par un point dans le plan, ce dernier est appelé ***diagramme d'Argand***[4].

[dessin : deux axes NON orthogonaux, une flèche vers un point $a+ib$, une autre vers $a-ib$, les projetés a et ib sur les axes $\mathbf{R}$ et $i\mathbf{R}$]

---

[1] Un complexe est donné par *deux* nombres réels, ce qui est plus compliqué que d'en n'avoir qu'un seul. Les nombres complexe sont donc bien *plus complexes que* les nombres réels.

[2] Ce symbole, introduit par Gentzen en 1935, est un A retourné, initiale de *All* en allemand (et en anglais) qui signifie « tout ». (Si un français y avait pensé avant, on aurait un un T à l'envers, et on serait bien embêtés pour l'orthogonalité !)

[3] Le symbole d'appartenance est issu de la lettre grecque *epsilon* (ϵ ou ε), qui est l'initiale de $\varepsilon\sigma\tau\iota$ (esti) signifiant « (il) est ». Il a été créé par Peano en 1890.

[4] Jean-Robert Argand a présenté son digramme dans un petit livre publié en 1806 : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Le terme "diagramme d'Argand" apparaît en 1893 dans *A Treatise on the Theory of Functions* par James Harkness et Frank Morley.

Le ***conjugué*** $\overline{c}$ ou c^* d'un complexe est son symétrique par rapport à la droite réelle $\mathbf{R}$ parallèlement à la droite $i\mathbf{R}$ des ***imaginaires purs*** :

$$\overline{c} := \operatorname{Re} c - i \operatorname{Im} c =: c^*.$$

Exemples (représentation de complexes)
[dessin : deux axes NON orthogonaux et d'unité DISTINCTES, le point $1+2i$, la droite $\mathbf{R}-i$]

2 Distances & angles

Lorsque le repère est de plus orthonormé (ce qui permet de représenter convenablement angles et distances), un complexe c sera déterminé/caractérisé/défini/donné/fixé[5] par
[dessin : deux axes, le point 1, une flèche vers un complexe c, son module $|c|$ et son argument $\arg c$]

1. son ***module***[6] $|c|$, distance à l'origine ;
$$|c| := Oc\,;$$
2. son ***argument***[7] $\arg c$, angle entre la demi-droite $\mathbf{R}_+$ et la demi-droite $[Oc]$:
$$\arg c = \overset{\frown}{1Oc}.$$

Remarque L'argument de 0 n'est pas bien défini (il pourrait prendre n'importe quel valeur).

[dessin : deux axes, un complexe c, son projeté réel pour dessiner un triangle rectangle, le segment Oc de longueur r, l'argument θ de c, la longueur a de sa partie réelle, la longueur b de sa partie imaginaire]
On a les relations $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$, $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\theta = \frac{b}{a} \end{cases}$ et $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a+r}$
[dessin : demi-cercle, un segment de l'origine vers un point c d'argument $\theta \simeq 50°$, sa projection réelle, la longueur a, un segment de $-r$ à c, l'angle $\frac{\theta}{2}$ issu du point $-r$, la longueur r entre $-r$ et 0.]

Remarque être de module 1 $\Longleftrightarrow$ appartenir au cercle unité.

Propriété pour tous complexes c et d, on a

$$\begin{array}{lll} |cd| = |c|\,|d| & |\overline{c}| = |c| & \arg cd = \arg c + \arg d \\ \left|\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{|c|} \text{ (si } c \neq 0) & c\overline{c} = |c|^2 & \arg \frac{1}{c} = -\arg c \text{ (si } c \neq 0) \\ \left|\frac{c}{d}\right| = \frac{|c|}{|d|} \text{ (si } d \neq 0) & |c+d| \leq |c| + |d| & \arg \frac{c}{d} = \arg c - \arg d \text{ (si } d \neq 0) \\ & & \arg \overline{c} = -\arg c \end{array}.$$

Remarque L'inégalité $|c+d| \leq |c| + |d|$ se lit géométriquement : en notant $s := c + d$, dans le triangle $0cs$, la longueur $|c+d|$ du côté $[0s]$ est inférieure à la somme $|c| + |d|$ des longueurs des deux autres côtés ($[0c]$ et $[cs]$). C'est pourquoi on l'appelle ***inégalité triangulaire***. On a égalité ssi le sommet c appartient au segment $[0s]$, autrement dit ssi c et d sont colinéaires[8] et de même sens (ou dit aussi ***positivement colinéaires***) :

$$|c+d| = |c| + |d| \Longleftrightarrow c \text{ et } d \text{ positivement colinéaires.}$$

Remarque En pratique, une forme très utile de l'inégalité triangulaire est la suivante : pour tous complexes u, v, w, on a

$$|u-w| \leq |u-v| + |v-w|$$

(souvent on souhaite majorer $|u-w|$ et on doit introduire le point v judicieusement).

---

[5] Ces mot sont interchangeables et devraient cibler le sens souhaité : ne laisser *aucune ambiguïté* sur l'objet dont on parle.

[6] Le terme date de Jean Robert Argand (première apparition en 1814) et a été adopté par Cauchy dans son *Cours d'Analyse* de 1821. La polysémie de *module* en allemand a cependant poussé certains auteurs germanophones à parler plutôt de *norme* ou de *valeur absolue*.

[7] Le terme *argument*, dans le sens d'un angle en astronomie, apparaît fin XIV$^{\text{e}}$ sous la plume de Geoffrey Chaucer, en particulier dans *A Treatise on the Astrolabe* daté de 1391. Sa première apparition française semble avoir lieu dans la *Théorie des fonctions* (1859) de Charles Briot et Claude Bouquet. Mais l'histoire aurait pu retenir d'autres synonymes : *amplitude*, *anomalie*, *arc*, *déclinaison*, *phase* (signalés en 1913 par Heinrich Burkhardt dans la traduction anglaise de son ouvrage *Theory of functions of a complex variable*).

[8] Des complexes sont dits ***colinéaires*** si l'un au moins d'entre eux est nul ou si les droites joignant l'origine 0 à chacun de ces complexes sont parallèles. On reverra ce terme dans le cours sur les rappels vectoriels.

Remarque La relation $c\overline{c} = |c|^2$ permet de transformer un complexe en un *réel* en le multipliant par son conjugué. On en déduit que tout complexe c non nul admet un inverse

$$\frac{1}{c} = \frac{\overline{c}}{|c|^2}.$$

[dessin : deux axes, un complexe c, son inverse $\frac{1}{c}$, les modules $r := |c|$ et $\frac{1}{r}$, les arguments $\theta := \arg c$ et $-\theta$.]

Exemple $\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

3 Trigonométrie (bonjour exponentielle)

Remarque Pour tout réel θ, le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ est de module $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$; il appartient donc au cercle unité. On le note $e^{i\theta}$ ou $e^{\theta i}$ ou $\exp(i\theta)$ ou $\exp(\theta i)$.

[dessin : deux axes, un cercle, le complexe $e^{i\theta}$ avec $\theta \simeq 110°$)

Ainsi, tout complexe c s'écrit

$$c = |c|\, e^{i\arg c} \qquad \text{(forme \textbf{\textit{polaire}}, \textbf{\textit{trigonométrique}} ou \textbf{\textit{exponentielle}})}$$

Remarque La forme $c = \operatorname{Re} c + i \operatorname{Im} c$ est appelé ***forme rectangulaire*** (car les quatre points 0, $\operatorname{Re} c$, c et $i\operatorname{Im} c$ forment un rectangle lorsque le repère est orthogonal). Elle est à utiliser *en dernier recours* et il faut lui préférer la forme polaire.

Exemple La forme polaire exprime très simplement[9] l'inverse d'un complexe c non nul :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{|c|} e^{-i\arg c}.$$

Exemples de complexes $e^{i\theta}$ (avec dessins) $e^0 = e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pm\pi i} = -1$, $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$, $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cette racine cubique de l'unité est souvent notée j).

Application Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{42}$. Il est pertinent de tout mettre sous une forme compatible avec le produit –> la forme polaire nous tend les bras. Pour calculer les arguments, on commence par factoriser par les modules :

$$\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \text{ d'où } 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

La parenthèse étant de module 1, elle s'écrit $e^{i\theta}$ pour un réel θ à déterminer ; ici, cette détermination est facile vu les lignes usuelles –> $\theta = \frac{\pi}{3}$. On obtiendrait de même $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit le quotient

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}},$$

d'où la puissance recherchée

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{42} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{42} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{42}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{42} = 2^{21}e^{i\frac{7\pi}{2}} = -2^{21}i.$$

On a utilisé dans le calcul ci-desus (une fois en simplifiant $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{12}}$ et une autre en écrivant $\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{42} = e^{i\frac{\pi}{12}\times 42}$) une propriété fondamentale de l'exponentielle :

$$\boxed{e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}} \text{ pour tous réels } \alpha \text{ et } \beta.$$

[9] comparer avec l'expression rectangulaire $\frac{1}{c} = \frac{\operatorname{Re} c - i\operatorname{Im} c}{\sqrt{(\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2}}$

Corollaire[10] Les ***formules d'addition*** (dans ce qui suit a et b sont des réels)

$$\begin{aligned}\cos(a\pm b) &= \cos a\cos b\mp\sin a\sin b\\ \sin(a\pm b) &= \sin a\cos b\pm\cos a\sin b\\ \tan(a\pm b) &= \frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}\end{aligned}$$

Démonstration Soient a et b des réels. Les réels $\cos(a\pm b)$ (resp. $\sin(a\pm b)$) sont les parties réelle (resp. imaginaire) de

$$\begin{aligned}e^{i(a\pm b)} &= e^{ia}e^{\pm ib}\\ &= (\cos a+i\sin a)(\cos b\pm i\sin b)\\ &= (\cos a\cos b\mp\sin a\sin b)+i(\sin a\cos b\pm\sin b\cos a),\end{aligned}$$

d'où les formules d'addition pour sin et cos. On en déduit celle pour la tangente :

$$\begin{aligned}\tan(a\pm b) &= \frac{\sin(a\pm b)}{\cos(a\pm b)}\\ &= \frac{\sin a\cos b\pm\sin b\cos a}{\cos a\cos b\mp\sin a\sin b}\\ &\overset{\text{diviser en haut et en bas par }\cos a\cos b}{=} \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}\pm\frac{\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}\mp\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}\\ &= \frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}.\end{aligned}$$

En prenant $b=a$ dans les formules d'addition, on obtient les ***formules de duplication***

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \begin{cases}\cos^2 a-\sin^2 a\\ 2\cos^2 a-1\\ 1-2\sin^2 a\end{cases} \quad \text{(on utilise } \cos^2+\sin^2=1 \text{ pour passer d'une ligne à une autre),}\\ \sin 2a &= 2\sin a\cos a,\\ \tan 2a &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.\end{aligned}$$

Question Comment simplifier une somme $a\cos\theta+b\sin\theta$? (problème récurrent en physique)

On exprime tout sous forme d'une partie réelle en écrivant

$$\cos\theta=\operatorname{Re}e^{i\theta} \text{ et } \sin\theta=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{Re}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=-\operatorname{Re}\left(ie^{i\theta}\right),$$

d'où l'on tire $a\cos\theta+b\sin\theta=a\operatorname{Re}e^{i\theta}-b\operatorname{Re}ie^{i\theta}=\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}(a-ib)\right)$. En écrivant le complexe $a+ib=re^{i\varphi}$ sous forme polaire, il vient $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}(a-ib)\right)=\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}re^{-i\varphi}\right)=r\cos(\theta-\varphi)$.

On retiendra donc

$$a\cos\theta+b\sin\theta=r\cos(\theta-\varphi) \qquad \text{où } a+ib=:re^{i\varphi}$$

(φ est parfois appelé ***phase*** et on dit alors que l'argument θ est ***déphasé*** de φ).

Question Comment simplifier une somme $e^{i\theta}+1$?

Première chose : *dessiner*. En appelant A le complexe $e^{i\theta}$ et S la somme $e^{i\theta}+1$, on voit que le quadrilatère $01SA$ a tous ses côtés de même longueur (1), donc est un losange. La diagonale $(0S)$ en est donc un axe de symétrie, donc bissecte l'angle $\widehat{A0S}$, ce qui permet de lire l'argument $\arg s=\frac{\theta}{2}$. Pour le module, l'autre diagonale $[1A]$ rencontre $[0S]$ orthogonalement ; notons H leur intersection. Dans le triangle rectangle $0AH$, on lit $\cos\widehat{A0H}=\frac{0H}{0A}$, *i. e.* $\cos\frac{\theta}{2}=0H=\frac{0S}{2}$, d'où le module $|s|=2\cos\frac{\theta}{2}$.

Deuxième chose : *vérifier* par le *calcul*. Vu l'intuition géométrique qui précède, il est naturel de factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ (on appelle souvent $\frac{\theta}{2}$ l'***arc moitié***), ce qui donne

$$e^{i\theta}+1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

[10] Les mots "corollaire" et corolle" viennent du latin *corolla* qui signifiait « petite couronne » ; l'on donnait en effet une petite couronne de lauriers aux acteurs comme gratification. Un corollaire est donc un cadeau donné en plus par le théorème !

(★ ce n'est peut-être pas la forme polaire de $e^{i\theta}+1$ car rien n'assure que le soit-disant "module" $2\cos\frac{\theta}{2}$ soit positif).

À RETENIR :

faire apparaître l'arc moitié peut permettre d'avancer dans les calculs.

Uen autre chose à retenir de cet exemple est que l'exponentielle permet de reconstituer les sinus et cosinus *via* les ***formules*** dites ***d'Euler*** :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta$$

(★ ne pas oublier le i au dénominateur du s***i***nus, ni le signe $-$ à son numérateur).

Exercice Soit c un complexe non nul. Montrer l'inégalité

$$|c-1|\leq||c|-1|+|c\arg c|\,.$$

Première chose : *dessiner* pour tenter d'interpréter géométriquement. Notons $r:=|c|$ et $\theta:=\arg c$ pour alléger.

[dessin : le triangle $1rc$, le segment $0c$, l'arc de cercle rc]

On demande de montrer $c1\leq 1r+\lg\operatorname{arc}rc$. Or on a d'une part l'inégalité triangulaire $c1\leq cr+r1$, d'autre part la majoration $cr\leq\lg\operatorname{arc}rc$ (le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite), ce qui conclut.

Montrons cela *par le calcul*, à svoir que la longueur de l'arc cr est en effet plus grande[11] que celle du segment $[cr]$. Cela s'écrit $r\,|\theta|\overset{?}{\geq}|r-c|$. En divisant par r, cette inégalité devient $|\theta|\overset{?}{\geq}\left|1-e^{i\theta}\right|$. Pour obtenir ce dernier module, on fait apparaître l'arc moitité $1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)$, d'où le module $\left|1-e^{i\theta}\right|=\left|-ie^{i\frac{\theta}{2}}\right|\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|=2\sin\left|\frac{\theta}{2}\right|$. L'inégalité désirée se réécrit alors $|\theta|\overset{?}{\geq}2\sin\left|\frac{\theta}{2}\right|$, ou encore $\left|\frac{\theta}{2}\right|\overset{?}{\geq}\sin\left|\frac{\theta}{2}\right|$, ce qui est un cas particulier de l'inégalité générale $\sin p\leq p$ valable pour tout réel p positif.

[11] l'inégalité triangulaire peut aussi se montrer directement sans géométrie, par exemple en comparant les carrés :

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)\,\overline{(a+b)}=(a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\\
&= a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b}=a\overline{a}+b\overline{b}+\left(a\overline{b}+\overline{a\overline{b}}\right)\\
&\overset{c+\overline{c}=2\operatorname{Re}c}{=} |a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}a\overline{b}\overset{\operatorname{Re}c\leq|c|}{\leq}|a|^2+|b|^2+2\left|a\overline{b}\right|\\
&= |a|^2+2\,|a|\,|b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2
\end{aligned}$$