Rappels de trigonométrie

mercredi 5 septembre 2012

Table des matières

1 Angle (non-orienté), mesure modulo 2π, somme

L'***angle*** entre deux demi-droites est la *rotation* (le déplacement) qui amène l'une sur l'autre. L'espace entre les demi-droites est le ***secteur angulaire*** (associé).

Pour *mesurer* un angle, on trace un cercle ***unité*** (de rayon 1) centré en l'origine commune O des demi-droites et l'on prend la longueur de l'arc de cercle entre les points de rencontre des demi-droites avec le cercle) :

$$\widehat{AOB} := \operatorname{lg} \operatorname{arc} AB \qquad \text{(" lg " abrège } \textit{longueur}\text{).}$$

Convention Les deux points à côté du signe = signifient qu'il s'agit d'une *définition* et non de l'énoncé d'une vérité (ici l'égalité entre deux objets). Cette convention permet d'écrire "*L'objet o* $:= \frac{\omega \divideontimes \overline{\mho}}{\partial\sigma\otimes\wp^2}$ *vérifie...*" pour abréger "*L'objet o, que l'on définit comme étant égal à* $\frac{\omega \divideontimes \overline{\mho}}{\partial\sigma\otimes\wp^2}$*, vérifie...*". Par exemple, on comparera le sens des deux égalités dans la phrase "*le nombre* $2 := 1 + 1$ *vérifie* $2 + 2 = 4$". Les deux points sont toujours du côté de l'objet défini (donc pas toujours à gauche du signe =).

Exemples (mesures d'angles) tour complet $\leftrightarrow 2\pi$ (360°), demi-tour ou ***angle plat*** $\leftrightarrow \pi$ (180°), ***angle droit*** $\leftrightarrow \frac{\pi}{2}$ (90°), angle dans un triangle équilatéral $\leftrightarrow \frac{\pi}{3}$ (60°).

Remarque En tant que *déplacement*, le tour complet revient à ne rien bouger, donc a une mesure nulle :

$$2\pi = 0.$$

On dit que l'on calcule ***modulo***[1] 2π (*modulo* = "à la mesure de") et on le note[2] $(\operatorname{mod} 2\pi)$ ou $[2\pi]$.

Exemples demi-tour = demi-tour opposé, d'où $\pi = -\pi \ [2\pi]$; $\frac{3}{4}$ tour = $\frac{1}{4}$ tour opposé, d'où $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Remarque Par abus de langage, on pourra confondre un angle avec sa mesure *modulo* 2π.

[1] Un tel calcul est qualifié de ***modulaire*** (adjectif relatif à *modulo*).

[2] Karl Gauss a introduit ce vocabulaire dans ses *Disquisitiones arithmeticae* de 1801. Il y remplaçait l'égalité = par le symbole de ***congruence*** $\equiv$ mais ce n'est pas indispensable : l'essentiel est de signaler quelque part que l'on calcule *modulo* quelque chose et de préciser ce quelque chose, le ***module***, la mesure à l'aune de laquelle on calcule.

Remarque (homogénéité) Un angle est une grandeur ***adimensionnée*** (sans dimension). On donne aux angles l'unité de ***radian*** uniquement pour préciser que l'on considère ces nombres *modulo* 2π.

(Dans la définition ci-dessus, on a abusivement identifié les longueurs OA et OB au réel 1, ce qui cachait le rapport de longueurs $\widehat{AOB} = \frac{\lg \operatorname{arc} AB}{1} = \frac{\lg \operatorname{arc} AB}{OA}$: sous cette forme, il est clair qu'un angle est sans dimension.)

On peut ***ajouter / additionner*** des angles en juxtaposant les secteurs angulaires associés.

★ La (mesure de la) somme d'angles vaut la somme des (mesures des) angles MODULO 2π.

On pourra le retenir sous la forme abrégée :

$$\operatorname{mes} \sum = \sum \operatorname{mes} \ [2\pi]$$

(le "Σ" est la première lettre de "***s***omme", "mes" abrège "mesure").

Exemple couper un disque en trois part égales : $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi = 0 \ [2\pi]$.

Des angles seront dit ***complémentaires*** (resp. ***supplémentaires***) lorsque leur somme fait $\frac{\pi}{2}$ (resp. π).

(Mnémo : les mesures 90° et 180° sont dans le même ordre (numérique) que les premières lettres c et f de "*c*omplémentaire" et "*s*upplémentaire" le sont (alphabétiquement).)

Convention. "resp." abrège *respectivement* (de l'*ordre*). Cet adverbe (et son adjectif dérivé) permet d'abréger une phrase de type "*truc1 vérifie bidule1 et truc2 vérifie bidule2 et truc3 vérifie bidule3 et...*" en "*truc1 (resp. truc2, truc3, ...) vérifie bidule1 (resp. bidule2, bidule3, ...)*.

Exemple On formulera indifféremment :

le carré de 7 est 49, le carré de 18 est 324, le carré de 49 est 1764 ;

le carré de 7 (resp. 18, 42) est 49 (resp. 324, 1764) ;

les carrés de 7, 18 et 42 sont respectivement 49, 324 et 1764 ;

les carrés respectifs de 7, 18 et 42 sont 49, 324 et 1764.

2 Lignes trigonométriques dans le triangle rectangle

Question quel rapport entre la longueur d'un arc de cercle arc AB et celle de la corde $[AB]$ qui sous-tend cet arc ? (Rapport historiquement capital pour les astronomes.)

[dessin : un angle $\widehat{IOA}$ où I et A sont sur un même cercle de centre O. Notons H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OIA.]

Le ***sinus***[3] d'un angle θ est la (longueur de la) demi-corde associée à l'angle double rapportée au rayon du cercle :

$$\sin A := \frac{AH}{AO} = \frac{demi - corde}{rayon}.$$

Le ***cosinus*** est la longueur (rapportée au rayon du cercle) de l'autre côté adjacent de l'angle droit dans le triangle OHA. C'est aussi le sinus de l'angle complémentaire (d'où la terminologie) :

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Remarque (dualité) Dessinons un triangle rectangle d'hypoténuse[4] unité. Si l'on dénote par α et β ses angles (non droits), les longueurs des côtés (adjacentes à l'angle droit) valent respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = \operatorname{co}\sin\beta \\ \sin\beta = \operatorname{co}\sin\alpha \end{array} \right. .$$

Les sinus et cosinus sont ainsi symétriques, duaux, interchangeables (on pourrait ainsi dire que le cocosinus est le sinus).

[3] « Le terme sinus provient [...] d'une curieuse confusion. Les Indiens calculaient le sinus de cordes, ou plutôt de demi-cordes et non pas d'angles. Aryabatha l'appelle alors *jya-ardha*, mot à mot *corde-demi* bientôt devenu *jya*. Les Arabes l'empruntent et le déforment en *jiba*. Or, en arabe, seules les consonnes sont notées et *jb* se confond avec *jaïb* qui signifie comme *sinus* le pli d'un vêtement. On traduit bien sûr ce mot par *sinus* en latin médiéval. » (B. Hauchecorne, *Les Mots & les Maths*)

[4] *hypo* ↔ sous, *tenuse* ↔ tend (donc pas de *h* !) : l'hypoténuse est ce qui *sous-tend* (l'angle droit)

Remarque (homogénéité) Les sinus et cosinus sont des *rapports de longueurs*, donc des nombres *adimensionnés*.

Remarque (invariance) Les définitions de sin et cos sont *indépendantes du rayon* (c'est une façon d'énoncé le théorème de Thalès) : on peut donc choisir un rayon unité.

[dessin : toujours l'arc de cercle AI de centre O où A se projette orthogonalement en H sur $[OI]$. On prolonge $[OA)$, on prend un point A' sur ce prolongement, on prolonge $[OI)$, on prend un point I' sur ce prolongement, on note H' le projeté orthogonale de A' sur $[OI']$. On s'arrange pour que H' tombe dans $[II']$.]

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{AH}{AO} = \sin\theta = \frac{A'H'}{A'O} \\ \frac{OH}{OI} = \cos\theta = \frac{OH'}{OI'} \end{array}\right. .$$

Par division, on obtient $\frac{HA}{HO} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{H'A'}{H'O}$: ce rapport est appelé la ***tangente*** de θ et est notée $\tan\theta$.

Interprétation géométrique de la tangente :

[dessin : le même avec un cercle unité ($OA = OI = 1$) et dans le cas où la hauteur $[H'A']$ est *tangente* à l'arc AI en I.]

On lit $\tan\theta = \frac{H'A'}{H'O} = H'A'$ qui est la longueur de la tangente en I.

Remarque (sens physique) La tangente d'un réel θ définit la ***pente*** (ou le ***coefficient directeur***) d'une route rectiligne faisant un angle θ avec l'horizontale. On ne pourra donc pas la confondre avec son inverse $\frac{1}{\tan\theta} =: \cot\theta$ (la ***cotangente***.de θ) en invoquant le bon sens :

$$\text{petit angle} \longleftrightarrow \text{petite pente} \longleftrightarrow \text{petite tangente.}$$

RÉSUMÉ

[dessin : un triangle rectangle posé sur son hypoténuse (abrégée hyp), un angle non droit marqué θ, le côté adjacent à l'angle marqué (autre que l'hypoténuse) est noté adj, le côté opposé est noté opp.]

$$\begin{array}{lll} \sin\theta = \dfrac{opp}{hyp} & \cos\theta = \dfrac{adj}{hyp} & \text{co-sinus} = \text{sinus du }\textbf{co}\text{mplémentaire : } \cos\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) ; \\ \tan\theta = \dfrac{opp}{adj} & \cot\theta = \dfrac{adj}{opp} & \text{co-tangente} = \text{tangente du }\textbf{co}\text{mplémentaire : } \cot\theta = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right). \end{array}$$

Le théorème de Pythagore fournit une identité fondamentale (montrant encore en quoi sin et cos sont interchangeables) :

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

À RETENIR

[dessin : une droite Δ, un segment de longueur L non parallèle à Δ qui ne la coupe pas et fait avec un angle θ, le projeté orthogonal de ce segment sur Δ a pour longueur $L\cos\theta$]

Quand on projette orthogonalement sur une droite,
les longueurs sont multipliées par le cosinus de l'angle fait avec cette droite.

Remarque (étymologique) tri=3, gone=côté, donc *trigone*=triangle ; metron=mesure, donc *métrie*=études des mesures ; par conséquent, *trigonométrie* signifie

étude des mesures (angles, longueurs, aires) dans le triangle.

Un ***ligne trigonométrique***[5] désignera ainsi une longueur dans le triangle.

Principales lignes trigonométriques.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

(retenir $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$).

[5] La question initiale de cette section (rapport corde-arc ?) est naturelle en trigonométrie car elle relie longueurs d'arcs et longueurs de segments. Cette question fait ainsi naturellement émerger l'outil du sinus (et, partant, les cosinus, tangente et cotangente), d'où l'omniprésence en trigonométrie des fonctions sin, cos, tan et cot.

On se souviendra des valeurs approchées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \simeq 1,414 \\ \sqrt{3} \simeq 1,732 \end{array} \right., \text{ d'où } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \theta & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} \\ \hline \sin\theta & 0,5 & 0,707 & 0,866 \\ \hline \cos\theta & 0,866 & 0,707 & 0,5 \\ \hline \tan\theta & 0,577 & 1 & 1,732 \\ \hline \end{array}.$$

3 Quelques aires

Rappels

Aire d'un rectangle de côtés l et L : le produit lL.

Aire d'un parallélogramme de base b et hauteur h : [couper en deux selon un axe orthogonal à deux côtés opposés puis recomposer un rectangle] le produit bh

Surface d'un triangle de base b et hauteur h : [symétriser le triangle par rapport au milieu d'un de ses côtés induit un parallélogramme]

$$S = \frac{1}{2}bh.$$

[dessin : un triangle ABC, une hauteur $[BH]$ de longueur h tombant sur le côté $[AC]$ de longueur b, un autre côté $[AB]$ de longueur c.]

Application.

Dans le triangle rectangle ABH, on lit $h = c\sin\widehat{A}$, d'où (remplacer dans la formule ci-dessus)

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

Réécrivons sous la forme $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{abc}{2S}$ (vérifier l'homogénéité). Le membre de droite est inchangé si l'on permute les noms des sommets A, B, C (car alors les longueurs a, b, c sont également permutées et leur produit abc reste le même), donc le membre de gauche l'est aussi, d'où l'on déduit

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \qquad \text{(loi des sinus).}$$

Autre preuve.

[dessin : cercle de centre O de rayon R circonscrivant un triangle ABC, le milieu de $[BC]$ est noté A'.]

Le triangle BOC est isocèle ($OB = OC = R$), donc la médiane $[AA']$ est aussi hauteur et bissectrice, d'où (dans le triangle rectangle $BA'O$)

$$BA' = BO\sin\widehat{BOA'} = R\sin\frac{\widehat{BOC}}{2}.$$

Or l'angle au centre $\widehat{BOC}$ vaut le double de l'angle $\widehat{BAC}$ et la longueur BA' est la moitié de celle de $a = BC$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = R\sin\widehat{A}$. Le rapport $\frac{a}{\sin\widehat{A}}$ est donc égal à $2R$, lequel est invariant par permutation des trois sommets, ce qui permet de conclure comme ci-dessus.

La loi des sinus se précise finalement en

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

(d'où l'on peut déduire la surface $S = \frac{abc}{4R}$, formule dont on controlera l'homogénéité).

Remarque Les sinus, cosinus et tangente permettent, dans un triangle, de *relier deux longueurs* à travers les sinus des angles de ce triangle. La loi des sinus sert EXACTEMENT à la même chose dans un triangle quelconque. C'est donc une généralisation de la définition des lignes trigo dans le triangle rectangle.

Pour s'en convaincre, retrouvons ces dernières en appliquons la loi des sinus dans un triangle ABC rectangle en C (où $\sin\widehat{C}=1$ et où $\cos\widehat{A}=\sin\widehat{B}$) :

$$\begin{aligned}
&\text{l'égalité } \frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}} \text{ donne } \frac{BC}{AC}=\sin\widehat{A},\\
&\text{l'égalité } \frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}} \text{ donne } \frac{AB}{AC}=\cos\widehat{A},\\
&\text{l'égalité } \frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}} \text{ donne } \frac{BC}{AC}=\tan\widehat{A}.
\end{aligned}$$

Aire d'un sectaire angulaire.
On a défini la mesure d'un angle par la longueur d'un arc (rapportée au rayon) : $\theta=\frac{l}{r}$.
[dessin : un arc de cercle de longueur l et de rayon r faisant un angle θ et délimitant une aire A]
En pratique, on donne souvent l'angle et on souhaite connaître la longueur[6] et l'aire :

$$l=r\theta \qquad \mathcal{A}=\frac{1}{2}r^2\theta.$$

Exemples circonférence du cercle $=2\pi r$, aire du disque πr^2.
Mméno[7] :

La circonférence est fière
D'être égale à deux pi ère
Et le disque tout joyeux
D'être égale à pi ère deux.

Exemple L'aire d'un secteur angulaire de rayon unité vaut la moitié de l'angle associé.
Remarque (homogénéité) Les deux formules sont bien homogènes ($\mathcal{A}$ est le carré d'une longueur par un truc adimensionné).
Remarque (divinatoire) Comment deviner la formule donnant l'aire ?

1. Regarder les *unités* : d'une part on veut une aire, d'autre on ne dispose que de r (longueur), l (longueur) et θ (sans dimension). Il est donc raisonnable d'essayer $\mathcal{A}\overset{?}{=}r\times l$ (qui devient $r^2\theta$ d'après l'expression de l).
2. *Tester* sur un exemple simple, *e. g.* le disque tout entier : on a alors $\mathcal{A}=\pi r^2$ mais notre formule donne $r^2 2\pi$.
3. *Rectifier* avec une constante multiplicative : vu notre test, il faut rajouter un facteur $\frac{1}{2}$ devant notre intuition.

Ce n'est pas de la magie, des gens ont *vraiment* deviné des formules justes avec cette démarche (très économe).
(Si l'on ne parvient pas toujours à *deviner* par des considérations dimensionnelles, on *doit* utiliser ces dernières pour éviter de grossières erreurs.)

Application.
[dessin : un arc de cercle AI centré en O de rayon 1 définissant un angle θ, on projette A en H sur $[OI]$, l'intersection de (OA) et de la tangente au cercle en I définit un point T.]
Le secteur angulaire est compris entre les triangles OIA et OIT. On en déduit les comparaisons suivantes de leurs aires respectives :

$$\text{aire}\, OIA \leq \text{aire secteur}\, \widehat{AOI} \leq \text{aire}\, OIT.$$

Dans les deux triangles OIA et OIT, on prend la base $OI=1$ (et les hauteurs HA et IT). On obtient donc

$$\frac{1}{2}HA \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}IT,$$

d'où en se débarassant du facteur $\frac{1}{2}$ la comparaison

$$\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta \qquad \text{(à retenir).}$$

[6] C'est comme pour la loi d'Ohm $R=\frac{U}{I}$. Cette dernière formule *définit* la résistance R mais en pratique c'est elle qu'on donne tandis que l'on cherche la tension U ou l'intensité I.
[7] La ritournelle qui suit identifie abusivement la circonférence et le disque à leur *mesure*. (En toute rigueur, un lieu géométrique n'est pas un nombre.)

4 Orientation, angles orientés

Sur une courbe (droite, cercle, lemniscate ∞...), on peut distinguer *deux* sens de parcours, *a priori* symétriques, interchangeables. ***Orienter*** une courbe, c'est choisir l'un de ces sens, qui sera alors dit ***positif*** (ou ***direct***), l'autre étant alors appelé ***négatif*** (ou ***indirect*** ou ***rétrograde***).

Exemples [avec dessins] droite verticale orientée vers le haut, droite horizontale orientée vers la droite, cercle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre (***clockwise***), cercle orienté dans le sens trigonométrique (***anti-clockwise***), une lemniscate ∞ avec ses deux orientations ***opposées*** (ou ***contraires***).

Remarque (bon sens) Orienter une route, c'est choisir de quel côté roulent les voitures. Orienter une route ne sert à rien si l'on ne les oriente pas toutes de la même manière. Le choix de l'orientation est *arbitraire* (la droite n'est ni mieux ni moins bien que la gauche) mais doit être *uniforme*.

Orienter un plan, c'est orienter tous ses cercles dans le même sens (souvent celui trigonométrique).

On peut alors (une fois le plan orienté) parler d'angles *orientés* (l'***angle orienté*** entre deux demi-droites $[OB)$ est la rotation qui envoit la première sur la seconde – et pas l'inverse[8])

[dessin : un arc de cercle AB centré en O fléché de A vers B]

[dessin : le même mais en fléchant de B vers A]

L'angle orienté[9] $A\overset{\curvearrowright}{O}B$ est à distinguer de son ***opposé*** $B\overset{\curvearrowright}{O}A$.

On ***additionne*** les angles orientés en composant les rotations associées :

[dessin : deux angles orientés $A\overset{\curvearrowright}{O}B \simeq 20°$ et $B\overset{\curvearrowright}{O}C \simeq 40°$]

$$A\overset{\curvearrowright}{O}B + B\overset{\curvearrowright}{O}C = A\overset{\curvearrowright}{O}C \qquad \textbf{(relation de Chasles)}$$

[dessin : deux angles orientés $A\overset{\curvearrowright}{O}B \simeq 20°$ et $B\overset{\curvearrowright}{O}C \simeq -100°$]

$$A\overset{\curvearrowright}{O}C - B\overset{\curvearrowright}{O}C = A\overset{\curvearrowright}{O}B \qquad \textbf{(relation de Chasles)}.$$

Remarque La somme d'un angle et de son opposé donne l'***angle nul*** $\overset{\curvearrowright}{0}$ (écrire $A\overset{\curvearrowright}{O}B + B\overset{\curvearrowright}{O}A = A\overset{\curvearrowright}{O}A = \overset{\curvearrowright}{0}$). Cela légitime la notation de l'opposé

$$-A\overset{\curvearrowright}{O}B := B\overset{\curvearrowright}{O}A.$$

Remarque Dans l'espace, on ne peut pas orienter les cercles ! (Imaginer sinon une pendule en verre que l'on regarderait d'un côté ou de l'autre : les orientations serait contraires.)

5 Trigonométrie dans le cercle unité

[dessin : un cercle unité centré en O, l'angle θ, un axe horizontal, un axe vertical, le point à 3h s'appelle I, le point M de cercle unité tel que $I\overset{\curvearrowright}{O}M = \theta$]

Étant donné un angle orienté θ, on définit ses ***cosinus*** et ***sinus*** par les coordonnées du point M du cercle unité tel que $I\overset{\curvearrowright}{O}M = \theta$:

$$\begin{aligned} \text{cosinus} &\quad\leftrightarrow\quad \text{abscisse,} \\ \text{sinus} &\quad\leftrightarrow\quad \text{ordonnné.} \end{aligned}$$

Lorsque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on retrouve les définitions dans le triangle rectangle :

[dessin : premier quadrant centré en O, un point $A\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$, les projections sur les axes avec le noms des coordonnées ($\cos\theta$ et $\sin\theta$)]

[8] cette différence était inessentielle dans notre première définition d'un angle (non-orienté)

[9] À défaut de parvenir à mettre une flèche au bout du chapeau d'un angle non-orienté $\widehat{AOB}$, j'utiliserai la notation $A\overset{\curvearrowright}{O}B$.

Sinon, on se ramène dans le ***premier quadrant*** (quart de plan défini par les points à coordonnées toutes positives) par des transformations géométriques. Ces transformations auront un effet très simple sur les cosinus et sinus : il faudra des fois les échanger et parfois leur accoler un signe "moins" (mais rien de plus).

Transformations à connaître. (quatre rotations, trois réflexions[10])
[un dessin par transformation, indispensable à visualiser]
Rotation d'un tour complet : $\begin{cases} \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \end{cases}$ (on dit que les fonctions cos et sin sont 2π-***périodiques***).

Rotation d'un demi-tour (ou symétrie centrale) : $\begin{cases} \cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta \\ \sin(\theta \pm \pi) = -\sin\theta \end{cases}$.

Rotations d'un quart de tour : $\begin{cases} \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\theta \\ \sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\theta \end{cases}$ (★ deux formules en une : si on lit le signe du haut dans un membre, il faut lire également le signe du haut dans l'autre membre – *idem* pour le signe du bas.)

Réflexion par rapport à l'axe des abscisses : $\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$ (on dit que les fonction cos et sin sont respectivement ***paire*** et ***impaire***).

Réflexion par rapport à l'axe des ordonnées : $\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \end{cases}$ (apparaît le supplémentaire de θ).

Réflexion par rapport à la ***première bissectrice*** : $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \end{cases}$ (apparaît le complémentaire de θ). Cette réflexion, qui échange les coordonnées, ne permet pas de se ramener dans le premier quadrant.

Mnémo. (permet de n'apprendre par coeur aucune des formules précédentes !)
[dessin : cercle avec deux axes, un rayon d'angle $\theta \simeq 20°$, ses huits images par les transformations ci-dessus avec les noms des angles $\pm\theta \pm \pi(/2)$]

1. remplacer $\begin{cases} \cos\theta \leftrightarrow 1 \\ \sin\theta \leftrightarrow 0 \end{cases}$ (comme si $\theta = 0$) ;
2. associer graphiquement $\begin{cases} 1 \leftrightarrow \text{loin de zéro} \\ 0 \leftrightarrow \text{proche de zéro} \end{cases}$;
3. regarder les figures pour trancher sur les signes.

Exemples
Pour l'angle θ, $\begin{cases} \text{son abscisse est positive et loin de zéro} \\ \text{son ordonnée est positive et proche de zéro} \end{cases}$; on écrira donc $\binom{+1}{+0}$, ce qui donne après remplacement $\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Pour l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$, $\begin{cases} \text{son abscisse est négative et proche de zéro} \\ \text{son ordonnée est positive et loin de zéro} \end{cases}$; on écrira donc $\binom{-0}{+1}$, ce qui donne après remplacement $\binom{-\sin\theta}{\cos\theta}$.

Application (exo) Montrer que la fonction tan est π-périodique :

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta.$$

Autre utilisation du cercle trigo.
Quels angles ont un sinus nul ?
[dessin : cercle & axes, on marque la droite d'ordonnée nulle)
$\sin\theta = 0 \iff \theta = 0\ [\pi] \iff \left\{_{\text{ou}} \begin{array}{l} \theta = 0\ [2\pi] \\ \theta = \pi\ [2\pi] \end{array}\right.$
Quels angles ont un cosinus nul ?
[dessin : cercle & axes, on marque la droite d'abscisse nulle)
$\cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \theta = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \left\{_{\text{ou}} \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \theta = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array}\right.$.
[dessin : cercle & axes, on marque une droite horizonale]
Plus généralement, un dessin permet de retrouver immédiatement

$$\sin\theta = \sin\varphi \iff \left\{_{\text{ou}} \begin{array}{l} \theta = \varphi\ [2\pi] \\ \theta = \pi - \varphi\ [2\pi] \end{array}\right.$$

[10] rappelons que *réflexion* signifie *symétrie orthogonale*

(deux angles ont même sinus ssi ils sont égaux ou supplémentaires)

et [dessin : cercle & axes, on marque une droite verticale]

$$\cos\theta = \cos\varphi \Longleftrightarrow \begin{cases} & \theta = \varphi \ [2\pi] \\ \text{ou} & \\ & \theta = -\varphi \ [2\pi] \end{cases}$$

(deux angles ont même cosinus ssi ils sont égaux ou opposés).

On observera de même dans le cercle trigo l'équivalences pour les tangentes :

$$\tan\theta = \tan\varphi \Longleftrightarrow \begin{cases} & \theta = \varphi \ [2\pi] \\ \text{ou} & \\ & \theta = \varphi + \pi \ [2\pi] \end{cases}$$

(deux angles ont même tangente ssi les points correspondants sur le cercle unité sont confondus ou diamétralement opposés).

Convention. Les lettres "ssi" abrègent *si et seulement si*, ce qui dénote une ***équivalence logique***. Ainsi, pour signifier l'équivalence d'une assertion A et d'un énoncé $\acute{E}$, on pourra dire "*L'assertion A est vérifiée ssi l'énoncé $\acute{E}$ a lieu*". Dans ce cas, les propositions A et $\acute{E}$ auront même ***valeur de vérité*** (elles seront toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses) et l'on pourra remplacer indifféremment l'une par l'autre dans notre discours.