

# Combinatoire des nombres de Hurwitz

Marc SAGE

15 septembre 2007

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Constellations et revêtements : deux approches du problème de Hurwitz</b>   | <b>4</b>  |
| 2.1      | Rappels sur les cartes . . . . .   | 4         |
| 2.1.1    | Définitions de base . . . . .  | 4         |
| 2.1.2    | Caractéristique d'Euler . . . . .  | 5         |
| 2.1.3    | Graphes contre cartes : les ordres cycliques . . . . .   | 5         |
| 2.1.4    | Graphes planaires . . . . .  | 6         |
| 2.2      | Le point de vue des permutations via les constellations . . . . .  | 7         |
| 2.2.1    | Définitions . . . . .  | 7         |
| 2.2.2    | Cartes et 3-constellations . . . . .   | 8         |
| 2.2.3    | Hyper-cartes . . . . .   | 9         |
| 2.3      | Une seconde approche, topologique : les revêtements ramifiés de la sphère . . . . .  | 9         |
| 2.3.1    | Définitions . . . . .  | 9         |
| 2.3.2    | Monodromie : du revêtement à la constellation . . . . .  | 10        |
| 2.3.3    | Cartes et revêtements . . . . .  | 11        |
| 2.3.4    | Formule de Riemann-Hurwitz . . . . .   | 11        |
| 2.4      | Le problème de Hurwitz . . . . .   | 12        |
| <b>3</b> | <b>Espaces des modules des courbes</b>   | <b>14</b> |
| 3.1      | Propriétés de base . . . . .   | 14        |
| 3.1.1    | Surfaces de Riemann . . . . .  | 14        |
| 3.1.2    | Surfaces de Riemann à $n$ points marqués . . . . .   | 14        |
| 3.1.3    | Structure d'orbifold sur $\mathcal{M}_{g,n}$ . . . . .   | 15        |
| 3.2      | Compactification de $\mathcal{M}_{g,n}$ . . . . .  | 17        |
| 3.2.1    | Exemples de limites manquantes dans $\mathcal{M}_{g,n}$ . . . . .  | 18        |
| 3.2.2    | Courbes stables et compactification de Deligne-Mumford . . . . .   | 18        |
| 3.2.3    | Morphismes d'oubli . . . . .   | 19        |
| 3.3      | Intégration sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . . . . .   | 20        |
| 3.3.1    | Rappels de cohomologie . . . . .   | 20        |
| 3.3.2    | Quelques classes de cohomologie . . . . .  | 21        |
| 3.3.3    | Chevron $\langle \cdot \rangle$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . . . . .   | 23        |
| 3.3.4    | Relation des cordes et du dilaton, chevrons sphériques et toriques . . . . .   | 23        |
| 3.4      | Formule ELSV . . . . .   | 27        |
| 3.4.1    | Genre nul : la formule de Hurwitz . . . . .  | 27        |
| 3.4.2    | Revêtements toriques . . . . .   | 29        |
| <b>4</b> | <b>Une algèbre remarquable : <math>\mathcal{A} = \mathbb{Q} \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} q^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} q^n \right]</math></b> | <b>31</b> |
| 4.1      | Calculs dans $\mathcal{A}$ . . . . .   | 31        |
| 4.1.1    | Identités basiques . . . . .   | 31        |
| 4.1.2    | Calcul des puissances des générateurs . . . . .  | 32        |
| 4.1.3    | Asymptotique dans $\mathcal{A}$ . . . . .  | 34        |
| 4.2      | Chevrons $\langle \cdot \rangle$ sur les graphes simples . . . . .   | 36        |
| 4.2.1    | Graphes décorés et graphes simples . . . . .   | 36        |
| 4.2.2    | Représentation des chevrons de genre $g$ . . . . .   | 37        |
| 4.3      | Série génératrice des nombres de Hurwitz . . . . .   | 39        |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 4.3.1 | Premiers résultats en lien avec l'algèbre $\mathcal{A}$ . . . . . | 39 |
| 4.3.2 | Une généralisation . . . . .                                      | 40 |
| 4.3.3 | Le théorème central . . . . .                                     | 43 |
| 4.4   | Miscellanées sur un théorème de M. Kazarian . . . . .             | 46 |

|          |                      |           |
|----------|----------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Bibliographie</b> | <b>50</b> |
|----------|----------------------|-----------|

# 1 Introduction

Ce mémoire se propose d'étudier la combinatoire des nombres de Hurwitz, lesquels dénombrent les revêtements ramifiés de la sphère. Apparaissant naturellement en physique moderne dans l'étude de certains modèles 2D de la gravité, ces nombres sont en fait étudiés par les combinatoristes depuis la fin du dix-neuvième siècle. Le pionnier Hurwitz nous a en particulier légué l'élégante formule

$$\frac{h_{g=0,n;\mu=(d_1,\dots,d_p)}}{(n+p-2)!} = \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} n^{p-3}$$

comptant les revêtements ramifiés de la sphère par elle-même à  $n$  feuillets possédant un point de ramification multiple. Nous nous proposons de dénombrer une classe plus générale de revêtements, en imposant le genre, le nombre de feuillets, ainsi que la ramification des valeurs critiques.

Après avoir présenté dans une première partie le problème ci-dessus (dit *de Hurwitz*) sous l'angle des revêtements tant que sous celui des constellations, nous parlerons en second lieu du compactifié  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  de l'espace des modules des courbes complexes de genre  $g$  à  $n$  points marqués, nécessaire à la compréhension de la formule d'Ekedahl-Lando-Shapiro-Vainshtein (ELSV)

$$\frac{h_{g,n;\mu}}{c(n)!} = \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{1}{(n-p-r)!} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n-r}} \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - d_1 \psi_1) \dots (1 - d_p \psi_p) (1 - \psi_{p+1}) \dots (1 - \psi_{n-r})}$$

qui sera la trame de fond de notre mémoire. Nous pourrons alors expliciter tous les nombres de Hurwitz en genre sphérique et torique possédant un point de ramification multiple. La troisième partie, en étudiant une algèbre remarquable de séries formelles, développe un outil intéressant pour étudier l'asymptotique des nombres de Hurwitz. Le principal théorème montré ici est que la série génératrice des nombres de Hurwitz, à genre fixé, appartient à cette algèbre.

Je tiens à remercier mon directeur Gilles Schaeffer pour m'avoir fait découvrir de jolies mathématiques en me proposant de travailler sur ce sujet et tout particulièrement Dimitri Zvonkine qui, avec son aide précieuse et constante m'éclairant lors de mes nombreuses phases obscures, a grandement contribué à ce que ce mémoire voit le jour.

## 2 Constellations et revêtements : deux approches du problème de Hurwitz

Par la suite, le terme *surface* désignera une 2-variété compacte connexe sans bord orientée. Un théorème de classification des surfaces nous dit que toute surface est homéomorphe à un tore à  $g$  trous (visualiser une bouée familiale) ;  $g$  est appelé *genre* de la surface – on parle aussi de  *$g$ -tore*. La sphère est de genre nul.

Tous les graphes seront supposés non orientés. Les boucles et arêtes multiples sont autorisées.

### 2.1 Rappels sur les cartes

#### 2.1.1 Définitions de base

Armons-nous d'un planisphère et traçons les frontières entre pays au gros feutre noir, en rajoutant des points à l'intersection de ces frontières. Voici une *carte* (*map* en anglais) : si l'on découpe notre surface (ici une sphère – la Terre) selon les arêtes, on obtient des bouts homéomorphes à des disques, les pays (supposés sans enclave), appelés *faces*.

Une *carte* est la donnée d'un graphe tracé sur une surface tel que, d'une part les arêtes ne se coupent pas, d'autre part notre surface privée du graphe dessiné est union disjointe de ses composantes irréductibles, appelées *faces*, chacune étant homéomorphe à un disque ouvert. Une carte sera souvent notée  $M$ , en référence à son appellation anglo-saxonne.

Le *degré* d'une face est le nombre d'arêtes se situant sur son bord, une face de degré  $n$  étant ainsi représentée par un  $n$ -gone. Chaque arête apparaissant deux fois dans le découpage, on obtient de suite la relation

$$\sum_{f \text{ face}} \deg f = 2A$$

où  $A$  désigne le nombre d'arêtes. On notera également  $S$  et  $F$  le nombre de sommets et de faces. Le même argument de dénombrement montre que

$$\sum_{s \text{ sommet}} \deg s = 2A$$

(on peut aussi appliquer la formule qui précède à la *carte duale* d'une carte  $M$ , *i.e.* la carte dont les sommets sont les faces de  $M$ , deux faces étant reliées si et seulement si elles sont adjacentes).

Il est important de noter qu'une carte contient deux choses : un graphe abstrait (*i.e.* une matrice symétrique à coefficients dans  $\{0, 1\}$  dont la diagonale prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ ) et une surface bien particulière (un  $g$ -tore) sur laquelle on *plonge* notre graphe (on parle également de *graphe plongé* pour désigner une carte). En effet, on peut toujours plonger un même graphe sur des surfaces de genre différents : il suffit de rajouter des « trous » pour augmenter le genre indéfiniment. On parlera donc du *genre* d'une carte, mais jamais du genre d'un graphe.

#### Définition.

Soient  $M$  et  $M'$  deux cartes de graphes sous-jacents  $G$  et  $G'$  plongés sur des surfaces  $S$  et  $S'$ . On dit que  $M$  et  $M'$  sont isomorphes s'il y a un homéomorphisme  $S \simeq S'$  dont la restriction à  $G$  soit un isomorphisme de graphes  $G \simeq G'$ .

La subtilité de cette définition apparaît en genre  $g \geq 1$ . Par exemple, plongeons un carré sur un tore en collant successivement ses côtés opposés (on passe par un cylindre). Si l'on coupe la chambre à air ainsi obtenue le long d'une boucle, que l'on faire tourner le bord de cette boucle d'un multiple de  $2\pi$  (on parle de *Dehn twist*), et que l'on recolle le tout, on obtient deux cartes isomorphes. Mais jamais l'on ne pourra passer de l'une à l'autre petit à petit, au sens où l'homéomorphisme ne pourra être une isotopie<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>On se souviendra qu'un nœud fait avec une chambre à air est toujours homéomorphe à une tore, mais ne lui est isotope que si ce nœud n'en est vraiment pas un.

### 2.1.2 Caractéristique d'Euler

Un polyèdre peut être vu comme une carte de genre nul (*i.e.* tracée sur la sphère). Descartes avait déjà observé que la somme alternée  $S - A + F$  du nombre de sommets, arêtes et faces vaut 2. Ce fait, prouvé par Euler en 1752 pour le genre nul, apparaît pour la première fois en genre  $g \geq 1$  dans un article de Simon Lhuillier et Gergonne (1812). Cet invariant, appelé *caractéristique d'Euler*, se généralise en genre quelconque et vaut

$$S - A + F =: \chi = 2 - 2g \text{ (formule d'Euler).}$$

Pour se souvenir de l'ordre, on peut observer que l'on va en augmentant la dimension des choses comptées : les sommets sont de dimension 0, les arêtes de dimension 1 et les faces de dimension 2.

#### Démonstration.

On commence par montrer que si  $M$  et  $M'$  sont deux cartes sur un  $g$ -tore avec  $M \subset M'$  (*i.e.* les sommets de  $M$  sont des sommets de  $M'$ , et les arêtes de  $M$  sont des chaînes d'arêtes de  $M'$ ), alors  $\chi(M) = \chi(M')$ .

En effet, on passe de  $M$  à  $M'$  en rajoutant des arêtes et des sommets à  $M$ , ce qui peut s'effectuer à partir des trois opérations élémentaires suivantes : rajouter juste un sommet (nécessairement sur un arête préexistante car les cartes sont connexes), ce qui incrémente  $S$  et  $A$ ; rajouter juste une arête (nécessairement entre deux sommets préexistants), ce qui incrémente  $A$  et  $F$ ; rajouter une arête et un sommet exactement (ce qui doit forcément se faire à partir d'un sommet préexistant), ce qui incrémente  $S$  et  $A$ . On remarque que  $\chi$  est conservée par ces opérations (et on comprend mieux le caractère alterné de la formule!), d'où le résultat.

Considérons alors deux cartes  $M$  et  $M'$  de même genre. On définit la carte  $M \cup M'$ , dont les sommets sont ceux de  $M$  et  $M'$  auxquels on ajoute les points d'intersection des arêtes de  $M$  avec celles de  $M'$ , et dont les arêtes sont celles de  $M$  et  $M'$  éventuellement morcelées par leurs intersections. En passant par  $M \cup M'$ , on voit que  $M$  et  $M'$  ont même  $\chi$ , ce qui montre que  $\chi$  ne dépend que du genre. On considère alors la carte suivante : plonger le carré sur un tore en collant deux à deux ses côtés opposés (ce qui donne une carte à un sommet, deux arêtes et une face), coller  $g$  telles cartes bout à bout, puis relier les  $g$  sommets le long d'une chaîne de  $g - 1$  arêtes. La carte obtenue possède  $S = g$  sommets,  $A = 2g + (g - 1)$  arêtes, et  $F = 1$  face (pour le voir, trancher d'abord les boucles, puis découper le long de la courbe restante comme on ouvrirait une fermeture éclair). On trouve ainsi

$$\chi = S - A + F = g - (2g + (g - 1)) + 1 = 2 - 2g, \text{ CQFD.}$$

La recherche du plus petit genre possible pour plonger tel graphe est un problème qui se pose tout naturellement, et qui est loin d'être facile à résoudre puisqu'est NP-complet. Certains cas particuliers, de difficulté très variable, sont néanmoins abordables. Pour le  $n$ -cube, une simple application de la formule d'Euler permet d'obtenir  $g \geq 1 + (n - 4)2^{n-3}$ , cette valeur étant atteinte pour un certain ordre cyclique (*cf.* plus bas). Le livre [7] est par ailleurs entièrement consacré à montrer que ce genre minimal, pour le cas du graphe complet  $K_n$ , vaut  $\left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ .

### 2.1.3 Graphes contre cartes : les ordres cycliques

Maintenant, il est également naturel de se demander ce qui, outre la surface associée, différencie une carte de son graphe originel. Puisque l'on plonge notre graphe sur une surface *orientée*, on peut, autour d'un sommet fixé, orienter les arêtes qui lui sont incidentes; on parle d'*ordre cyclique*. Ce qui est remarquable, c'est que cette donnée est suffisante pour reconstruire la carte de départ. On en déduit qu'il y a priori

$$\prod_{S \text{ sommet}} (\deg S - 1)!$$

façons de plonger un graphe (certaines menant bien sûr à des cartes isomorphes).

#### Théorème.

*La donnée d'un ordre cyclique autour de chaque sommet d'un graphe permet de construire une carte.*

#### Démonstration.

Représentons les sommets du graphe par des ronds-points orientés à la française, chaque sortie correspondant à une fin d'arête, l'ordre des sorties étant déterminé par l'ordre cyclique imposé, puis représentons les arêtes

par des tronçons de route orientés également à la française. On a ainsi virtuellement représenté notre graphe par une mini-ville.

Partons alors d'un sommet et déplaçons-nous en prenant toujours la première à droite. On obtient un trajet, qui finit nécessairement par boucler car le nombre d'arêtes est fini. Mais la condition de tourner toujours le plus à droite possible impose que le bouclage se fasse au début de trajet (sinon on aurait pu à un moment tourner plus à droite que ce que l'on a effectivement fait) : on obtient ainsi un cycle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre (si l'on le dessine dans le plan).

En recommençant, on obtient un nombre fini de cycles, orientés tous pareil, qui contiennent toutes les arêtes et tous les sommets du graphe considéré (chaque arête étant contenue exactement deux fois dans l'ensemble des cycles), et surtout disjoints (chaque route est tracée sur un unique cycle).

Remplissons alors mentalement l'intérieur de ces cycles pour obtenir des polygones ; en collant ces polygones selon les arêtes communes (les flèches étant appariées en sens contraire), on obtient une 2-variété sans bord (clair si on est à l'intérieur des polygones, et clair aussi si l'on est sur les arêtes car on peut « circuler » d'un polygone à l'autre via leur arête commune), compacte (car les polygones, en nombre finis, sont compacts), orientable (car les cycles ont même orientation, et le collage des arêtes en sens contraire permet de conserver cette même orientation quand on passe d'un polygone à l'autre), partitionnée par les polygones : c'est donc un  $g$ -tore sur lequel est dessinée une carte représentant le graphe de départ et ayant l'ordre cyclique imposé par construction, *CQFD*.

L'intérêt de la démonstration ci-dessus est qu'elle permet de mettre en évidence la construction de cartes à partir de l'ensemble de ses faces. En se donnant un ensemble de faces de degré total pair (rappelons que l'on doit avoir  $\sum_f \text{deg } f = 2A$ ), on peut appairer les côtés deux à deux pour obtenir une carte. Par exemple, on a tous étant petit construit le cube à partir de son patron, ensemble de six faces carrées où figurent les côtés devant être appariés. Mais l'on peut également s'amuser à partir de quatre faces hexagonales et ainsi obtenir un plongement du cube sur le tore.

Un autre type de problème intéressant est de compter, à faces fixées, le nombre de façon d'appairer leurs côtés pour obtenir une carte de genre donné. C'est également un problème très difficile. En partant d'un  $2n$ -gone, Harer et Zagier ont montré, en calculant un certain type d'intégrales sur des matrices hermitiennes contre des mesures gaussiennes (*cf.* [7], chapitre 3), que ce nombre vaut

$$\varepsilon_g(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-2g)!} \times \text{Coef de } t^{2g} \text{ dans } \left( \frac{\frac{t}{2}}{\text{th } \frac{t}{2}} \right)^{n+1}.$$

En introduisant les nombres  $C_g(n) := \frac{2^g \varepsilon_g(n)}{\text{Cat}_n}$  où  $\text{Cat}_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan, on peut dériver la relation de récurrence

$$C_g(n+1) = C_g(n) + \binom{n+1}{2} C_g(n-1)$$

dont il serait très éclairant de donner une interprétation combinatoire (*cf.* les remarques de D. Zagier à la page 159 dans [7]).

## 2.1.4 Graphes planaires

Lorsqu'un graphe peut être plongé sur la sphère, homéomorphe à un plan une fois privée d'un de ses points, on dit que notre graphe est *planaire*. Attention à ne pas oublier la face « externe » (ou « à l'infini ») des graphes planaires lorsque l'on compte les faces de ces derniers. Ne pas s'étonner également que l'orientation de la face externe a toujours l'air contraire à ce qu'elle devrait être : il faut la regarder « par l'autre côté ».

Par exemple, le célèbre problème des trois maisons qu'on aimerait relier chacune à trois puits montrer que le graphe  $K_{3,3}$  n'est pas planaire (appliquer la formule d'Euler pour aboutir à une contradiction). Il en est de même pour le graphe complet  $K_5$ . C'est un fait remarquable que ces deux exemples sont les seules obstructions à la planarité d'un graphe : un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe isomorphe à  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .

## 2.2 Le point de vue des permutations via les constellations

### 2.2.1 Définitions

On se fixe par la suite un entier  $n \geq 1$ .

#### Définition.

Une constellation de longueur  $k$  et de degré  $n$  est une suite  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  de  $k$  permutations d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments telle que, d'une part le groupe engendré  $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$  agit transitivement sur  $E$ , d'autre part le produit  $\sigma_1 \dots \sigma_k$  vaut l'identité :

$$\sigma_1 \dots \sigma_k = \text{Id}.$$

On parle aussi de  $k$ -constellation.

Le groupe  $G := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle \hookrightarrow \mathfrak{S}_E$  est appelé groupe cartographique de la constellation. On parlera également plus tard de groupe de monodromie.

Deux constellations  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  et  $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_k)$  sur des ensembles  $E$  et  $E'$  sont isomorphes s'il y a une bijection  $f : E \rightarrow E'$  telle que  $\sigma'_i = f \sigma_i f^{-1}$ .

Une symétrie d'une constellation  $C = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  est un automorphisme de  $C$ , i.e. une permutation de  $\mathfrak{S}_{\deg C}$  qui commute avec tous les  $\sigma_i$ .

Le terme « constellation » deviendra clair dans la partie suivante lorsque l'on regardera la correspondance avec les revêtements d'un graphe étoilé sur la sphère.

La notion de  $k$ -constellation présente peu d'intérêt pour  $k \leq 2$ . En effet, pour  $k = 0$  ou  $1$ , le groupe cartographique est réduit à  $\{\text{Id}\}$  qui n'est transitif que si  $n = 1$ , et pour  $k = 2$ , les constellations sont toutes de la forme  $(\sigma, \sigma^{-1})$  où  $\sigma$  est un  $n$ -cycle.

En revanche, les 3-constellations sont déjà d'une grande richesse, comme nous le verrons par la suite.

Parlant de permutations, rappelons que se donner une classe de conjugaison  $C$  dans  $\mathfrak{S}_n$  revient à se donner une partition de  $n$ , chaque entier  $\geq 1$  représentant la longueur d'un cycle d'une permutation fixée dans  $C$  (les points fixes sont considérés comme cycles de longueur 1 et sont comptés). Par exemple, la partition associée à la classe de  $(1, 2, 3, 4)(5)(6)(7, 8, 9)$  est  $9 = 4 + 1 + 1 + 3$ . On la notera également  $1^2 3 4$  par souci de concision.

De façon formelle, une partition de  $n$  est un  $p$ -uplet  $(d_1, \dots, d_p)$  d'entiers  $d_i \geq 1$  tel que  $d_1 + \dots + d_p = n$ , modulo action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_p$ . On leur associe un poids  $\frac{1}{|\text{Aut } \mu|}$ , tenant compte de leur symétrie, de la manière suivante. Une symétrie (ou un automorphisme) d'un  $p$ -uplet  $\vec{d}$  est une permutation des  $d_i$  qui fixe  $\vec{d}$  ;  $|\text{Aut } \mu|$  désigne alors le nombre de symétrie d'un représentant quelconque de  $\mu$ . De façon explicite, on a

$$|\text{Aut}(1^{c_1} 2^{c_2} \dots n^{c_n})| = c_1! c_2! \dots c_n!.$$

Par exemple,  $|\text{Aut}(1 + 1 + 1 + 3 + 3)| = 3! 2! = 12$ .

Rappelons également un paramètre important concernant une permutation  $\sigma$  donnée (qui permet entre autres de définir la signature) : le degré  $n$  moins le nombre  $p$  de cycles. Nous noterons ce nombre

$$r(\sigma) := n - p$$

et l'appellerons degré de ramification de  $\sigma$  ( $r$  comme « ramification », cf. partie sur les revêtements ramifiés pour justifier la terminologie). Nous avons choisi  $p$  pour désigner le nombre de parts dans la partition que déterminent les cycles de  $\sigma$  (autant de parts que de cycles).

On préférera voir  $r(\sigma)$  comme la somme des longueurs des cycles  $\gamma_i$  de  $\sigma$  décrémentées chacune de 1 : ceci est naturel, au sens où la signature d'un cycle est  $-1$  puissance sa longueur moins 1. On écrira ainsi

$$r(\sigma) = \sum_{i=1}^p (l(\gamma_i) - 1).$$

Ceci étant rappelé, on peut introduire la notion de passeport d'une constellation et donner une première définition des nombres de Hurwitz.

#### Définition.

Le passeport d'une constellation  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  de degré  $n$  est la donnée  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  des partitions de  $n$  associées aux classes de conjugaison des  $\sigma_i$ .

Le degré total de ramification d'une constellation est l'entier

$$r(\sigma_1, \dots, \sigma_k) := r(\sigma_1) + \dots + r(\sigma_k).$$

Le problème de Hurwitz revient à trouver le nombre de constellations possédant un passeport fixé. Un tel nombre est appelé *nombre de Hurwitz*.

La réponse à ce problème, sans la condition de transitivité, est connue grâce à la *formule de Frobenius* que nous citons juste à titre culturel (pour une démonstration, consulter l'appendice de D. Zagier dans [7]).

**Théorème (Frobenius).**

Soit  $C_1, \dots, C_k$  des classes de conjugaisons (non nécessairement distinctes) dans un groupe fini  $G$ . Alors le nombre de solutions à l'équation  $g_1 \dots g_k = \text{Id}$  avec  $g_i \in C_i$  pour tout  $i$  est donné par

$$\frac{|C_1| \dots |C_k|}{|G|} \sum_{\substack{\chi \text{ caractère} \\ \text{irréductible}}} \frac{\chi(C_1) \dots \chi(C_k)}{\chi(\text{Id})^{k-2}}.$$

Évidemment, se donner un passeport dans  $\mathfrak{S}_n$ , c'est se donner des classes de conjugaison, d'où la possibilité d'appliquer Frobenius. Mais la condition de transitivité est bien présente et complique vraiment les choses.

**2.2.2 Cartes et 3-constellations**

Reprenons l'étude des ordres cycliques sur une carte. L'image de la ville et des rond-points nous servira.

Au voisinage d'un sommet, vu comme rond-point à la française, il y a des arêtes qui arrivent. On peut voir ces dernières comme des routes. Nous prendrons la convention que ces routes sont orientées à l'anglaise, de sorte que l'on tourne autour des faces dans le même sens qu'autour des sommets (même si cela pose de sérieux problèmes de circulation). Une arête se casse ainsi en deux *piques* collées en sens contraire. Nous allons introduire une 3-constellation sur l'ensemble  $P$  de ces piques qui permettra de reconstituer notre carte de départ.

L'ordre cyclique autour d'un sommet nous donne une permutations  $\sigma$  des piques de  $P$  partant de ce sommet ( $\sigma$  comme « **s**ommet »). L'appariement de deux éléments de  $P$  formant une arête nous donne également une permutation  $\alpha$  de  $P$  ( $\alpha$  comme « **a**rête ») qui est une involution sans points fixes (ce qui implique la parité du nombre  $|P|$  de piques, mais cela était déjà évident vu que  $|P| = 2A$ ). Enfin, l'ordre cyclique des piques autour d'une face nous donne une troisième permutation  $\varphi$  de  $P$  ( $\varphi$  comme « **f**ace »). Il est trivial de constater que le produit  $\sigma\alpha\varphi$  vaut l'identité et que la transitivité du groupe  $\langle \alpha, \sigma, \varphi \rangle$  revient à la connexité de notre graphe.

Réciproquement, donnons-nous une 3-constellation  $(\sigma, \alpha, \varphi)$  d'un ensemble  $P$  à  $2A$  éléments où  $\alpha$  est une involution sans points fixes. On va construire la carte à partir de ses faces.  $\varphi$  nous permet de partir de polygones (un pour chacun de ses cycles) dont les côtés (orientés) sont des éléments de  $P$ ,  $\alpha$  nous permet de coller ces polygones en préservant l'orientation, et la condition  $\sigma\alpha\varphi = \text{Id}$  nous assure que l'ordre cyclique autour des sommets est respecté.

La construction précédente nous amène à la définition suivante.

**Définition.**

Une carte combinatoire est une 3-constellation  $(\sigma, \alpha, \varphi)$  où  $\sigma$  est une involution sans points fixes.

Deux cartes combinatoires sont isomorphes si les constellations associées le sont.

Le groupe d'automorphie d'une carte  $M$  est le centralisateur du groupe cartographique  $G$  associé, i.e.

$$\text{Aut } M = \{h ; hg = gh \forall g \in G\}.$$

Les automorphismes de  $M$  sont donc les permutations commutant avec  $\sigma$  et  $\alpha$ .

Dans la pratique, il est usuel de numéroter les piques pour écrire les permutations dans  $\mathfrak{S}_{2A}$ . Évidemment, deux numérotations différentes donnent lieu à deux constellations isomorphes.

En général, les cartes ont très peu d'automorphie, i.e.  $\text{Aut } M = \{\text{Id}\}$  pour la plupart des cartes.



Il est bon de remarquer le dictionnaire entre les deux notions :

|                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| un sommet                | un cycle de $\sigma$               |
| le degré d'un sommet     | la longueur d'un cycle de $\sigma$ |
| le nombre $S$ de sommets | le nombre de cycles de $\sigma$    |
| le nombre $A$ d'arêtes   | le demi-degré de la constellation  |

la même chose tenant pour les faces et  $\varphi$ .

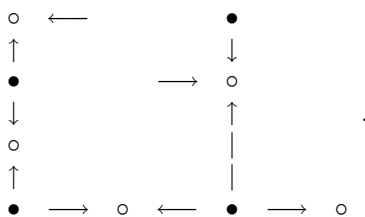
### 2.2.3 Hyper-cartes

On peut se demander ce qui se passe si l'on retire la condition sur  $\alpha$  dans la définition précédente, condition nuisant somme toute à la généralité. Cela mène à la notion d'*hyper-carte* dont nous ne ferons pas usage dans ce mémoire. Nous en parlons uniquement à titre culturel et renvoyons à la section 5 du chapitre 1 de [7] pour plus de détails.

Étant donnée une carte, colorions ses sommets en noir et cassons chaque arête en deux en rajoutant un sommet blanc au milieu. Le nombre d'arêtes se trouvent doublées, les « piques » devenant naturellement les nouvelles arêtes, que nous orienterons fuyant les sommets (*i.e.* du noir vers le blanc). La permutation  $\sigma$  s'obtient alors en regardant les piques partant des sommets noirs, tandis que l'appariement  $\alpha$  des piques se fait à la jonction des sommets blancs.

Plus généralement, une hyper-carte est une carte dont les sommets sont coloriés en noir et blanc de sorte que chaque arête relie deux sommets de couleurs différentes (on parle de graphe plongé *bipartite*). Les « piques » de l'hyper-carte (qui servent à retrouver  $\alpha$  et  $\sigma$ ) sont les arêtes de la carte sous-jacente orientées du noir vers le blanc. Pour retrouver  $\sigma$ , on regarde les piques partant des sommets noirs, et on part des sommets blancs pour obtenir  $\alpha$ . Bien noter que  $\varphi$  ne correspond plus à parcourir les arêtes d'une face, mais à parcourir ses piques, lesquelles maintenant ne recouvrent plus le contour d'une face.

Prenons par exemple l'hyper-carte suivante :



Numéroter ses piques permet de trouver le passeport de  $(\sigma, \alpha, \varphi)$  comme étant

$$(2^2 3^2, 12^2 3^2, 235).$$

## 2.3 Une seconde approche, topologique : les revêtements ramifiés de la sphère

### 2.3.1 Définitions

Comme toujours, pour étudier des objets, il est intéressants d'étudier les morphismes entre ces objets. Cela nous mène à l'étude des applications continues entre surfaces sous-jacentes à des cartes. Nous regarderons plus particulièrement le cas où la surface d'arrivée est la sphère.

Nous supposons que le lecteur possède quelques rudiments de géométrie différentielle complexe.

#### Définition.

Soit  $X$  une surface et  $n$  un entier  $\geq 1$ . On se donne une projection continue  $f : X \rightarrow \mathbb{S}$  et  $a$  un point sur la sphère en bas. On suppose qu'il y a un disque en bas contenant  $a$  dont la préimage est homéomorphe à  $p_a$  disques ouverts. On impose de plus que, sur chacun de ces  $p_a$  disques,  $f$  soit (à biholomorphisme près) de la forme  $z \mapsto z^{d_i}$  avec

$$d_1 + \dots + d_{p_a} = n.$$

On dit alors que  $f$  (ou par abus  $X$ ) est un revêtement ramifié de  $\mathbb{S}$  à  $n$  feuillet. L'entier  $n$  est le degré du revêtement  $f$  et est noté  $\deg f$ . Les partitions  $d_1 + \dots + d_{p_a} = n$  forment le passeport du revêtement.

La préimage d'un point  $a$  est usuellement appelée fibre au-dessus de  $a$ .

Les centres des disques au-dessus de  $a$  sont appelés points critiques d'ordre  $d_i$ . Les points  $a$  où  $p_a < n$  sont les valeurs critiques ou points de ramification, leur degré de ramification étant défini par la somme

$$r(a) := n - p_a = (d_1 - 1) + \dots + (d_{p_a} - 1).$$

Les autres valeurs de la sphère sont des valeurs non critiques ; on peut aussi les considérer comme des valeurs critiques de degré de ramification nul.

En notant  $a_1, \dots, a_k$  les points de ramification, le degré total de ramification du revêtement est la somme

$$r(f) := r(a_1) + \dots + r(a_k).$$

Les  $n$  disques au-dessus des valeurs non critiques sont les feuillet du revêtement<sup>2</sup>.

Deux revêtements  $f : X \rightarrow \mathbb{S}$  et  $g : Y \rightarrow \mathbb{S}$  sont isomorphes s'il y a un homéomorphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  au-dessus de  $\mathbb{S}$ , i.e. tel que  $g = f \circ \varphi$ .

Par exemple, toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann<sup>3</sup> donne lieu à un revêtement ramifié de la sphère.

Une question qui se pose naturellement (en tout cas en physique<sup>4</sup>) est de compter, à isomorphisme près, le nombre de revêtements ramifiés de la sphère ayant un passeport donné. Comme nous le verrons bientôt, cette question revient à s'intéresser au problème de Hurwitz.

Le lecteur attentif aura remarqué le lien entre les degrés de ramification et les longueurs des cycles d'une permutation (par exemple, la notation  $p_a$  doit évoquer le nombre de parts au-dessus d'un point  $a$ ). C'est le premier pas vers la correspondance entre constellations et revêtements ramifiés.

### 2.3.2 Monodromie : du revêtement à la constellation

Soit un revêtement de la sphère ramifié en  $a_1, \dots, a_k$ . Prenons un autre point  $a$  sur la sphère et considérons le graphe étoilé en  $a$  vers les  $a_i$ . Modifions légèrement ce graphe pour obtenir un lacet : autour de chaque point de ramification, on fait faire un petit cercle dans le sens trigonométrique avant de revenir en  $a$  selon le même chemin. Cela nous donne un lacet  $\gamma_i$  basé en  $a$ . On impose également que  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  partent de  $a$  dans le sens trigonométrique. Le produit  $\gamma_1 \dots \gamma_k$  est alors un lacet basé en  $a$  qui entoure les points de ramification ; comme nous sommes sur une sphère, ce lacet est contractile en passant « de l'autre côté ». Ceci s'écrit aussi

$$\gamma_1 \dots \gamma_k = \text{Id dans } \pi_1(\mathbb{S}', a) \text{ avec } \mathbb{S}' := \mathbb{S} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$$

On reconnaît une condition de constellation. Comment passer aux permutations ?

Considérons  $E$  la fibre au-dessus du point  $a$ . Comme ce dernier est une valeur non critique,  $E$  est de cardinal  $n$  le degré du revêtement. Soit maintenant  $\gamma$  un lacet tracé sur la sphère image privée des  $a_i$ , basé en  $a$ . Sa préimage est une copie de  $n$  chemins partant chacun d'un point de  $E$  et arrivant chacun en un point de  $E$ . Mais le point de départ et d'arrivée n'ont aucune raison d'être les mêmes :  $\gamma$  induit ainsi une permutation de  $E$ , appelé *monodromie* du revêtement. On obtient ainsi un morphisme du  $\pi_1$  de  $\mathbb{S}'$  base en  $a$  dans  $\mathfrak{S}_E$ . En notant  $\sigma_i$  l'image des générateurs sus-construits, la relation ci-dessus s'envoie sur

$$\sigma_1 \dots \sigma_k = \text{Id dans } \mathfrak{S}_E.$$

Il ne manque plus que la transitivité du groupe  $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ . Prenons deux points  $e$  et  $e'$  dans  $E$ . Notre revêtement  $X$  étant supposé connexe, il y a un chemin reliant  $e$  et  $e'$ . L'image de ce chemin est un lacet  $\gamma$  basé en  $a$  dont la monodromie envoie  $e$  sur  $e'$  par construction.

Que se passe-t-il si l'on prend un autre point base  $a'$  ? Les  $\pi_1$  se retrouvent conjugués par n'importe quel chemin  $c$  allant de  $a$  à  $a'$  (notre revêtement est connexe!), disons  $\gamma'_i = c\gamma_i c^{-1}$ . Les fibres  $E_a$  et  $E_{a'}$  sont par

<sup>2</sup>Pour éclairer le terme de *ramification*, on peut faire des dessins en traçant un ligne par feuillet. Les  $n$  feuillet se recoupent alors au-dessus des points de ramification, et les  $p_a < n$  disques au-dessus des points de ramification se ramifient en  $n$  feuillet.

<sup>3</sup>cf. paragraphe 3.1.1

<sup>4</sup>On pourra consulter la partie 5 de [11] pour plus de détails.

ailleurs mises en bijection par les préimages de  $c$ , mettons  $E_a \stackrel{\cong}{\simeq} E_{a'}$ . On en déduit  $\sigma'_i = \varphi \sigma_i \varphi^{-1}$ , de sorte que les constellations associées à  $a$  et  $a'$  se retrouvent isomorphes.

Nous venons de montrer le théorème suivant.

**Théorème.**

*À tout revêtement ramifié de degré  $n$  on peut associer une constellation de degré  $n$  définie à isomorphisme près.*

On observera qu'une symétrie de la constellation revient à une permutation des feuillets qui commute avec la monodromie de chaque point de ramification.

Il est important de noter que *cette correspondance préserve les passeports*. En effet, fixons un point  $e$  de la fibre  $E$  au-dessus d'une valeur  $a$  non critique. Géométriquement, lorsque le lacet  $\gamma_i$  fait un tour complet autour de la valeur critique  $a_i$ , sa préimage partant de  $e$ , qui arrive vers un certain point critique  $\omega$  de la fibre au-dessus de  $a_i$ , ne tourne que d'un angle  $\frac{2\pi}{d}$  autour de  $\omega$ . On revient ainsi vers un certain point  $e'$  au-dessus de  $a$ . En réappliquant  $\sigma_i$ , on repartira de  $e'$  par le même chemin et tournera encore de  $\frac{2\pi}{d}$  autour de  $\omega$ . Au bout de  $d$  itérations, on retombe sur  $e$ . Ainsi se décompose cycliquement notre permutation  $\sigma_i$ .

On peut montrer avec un peu plus de travail que, à passeport fixé, cette correspondance est surjective et que l'application ci-dessus induit une bijection en quotientant modulo isomorphismes de revêtements. Nous renvoyons à [7] section 1.2 pour les détails.

Par ailleurs, il est plus aisé (afin de compter) de ne raisonner qu'avec des constellations sur  $\mathfrak{S}_n$  (au lieu d'un ensemble  $E$  quelconque à  $n$  éléments). Fixons un revêtement ramifié  $f$  de degré  $n$  et regardons les constellations (isomorphes) de  $\mathfrak{S}_n$  qui lui sont associées. Soit  $C$  une telle constellation. Toute permutation  $\varphi$  de  $\mathfrak{S}_n$  induit une autre constellation  $\varphi C \varphi^{-1}$  isomorphe à  $C$ , qui est la même ssi  $\varphi \in \text{Aut } C$ . Il y a ainsi  $\frac{n!}{|\text{Aut } f|}$  constellations associées à  $f$ . Ceci permet de compter, ou bien les constellations avec poids  $\frac{1}{n!}$ , ou bien les revêtements ramifiés avec poids  $\frac{1}{|\text{Aut}|}$ .

Expliquons pour finir le terme de constellation. Partant d'un graphe étoilé vers les  $k$  points de ramification, sa préimage par un revêtement de degré  $n$  est une copie de  $n$  étoiles entremêlées au-dessus des points de ramification. Une constellation est donc un enchevêtrement d'étoiles !

### 2.3.3 Cartes et revêtements

La section précédente nous donne une correspondance entre les cartes et un certain type de 3-constellations. Étendons la correspondance aux revêtements ramifiés en trois points.

**Proposition.**

*Prenons une carte  $M$  associée à une 3-constellation  $(\sigma, \alpha, \varphi)$  et notons  $s$  et  $a$  les points de ramifications associés à  $\sigma$  et  $\alpha$  par le revêtement correspondant. Alors  $M$  est la préimage de la carte reliant  $s$  à  $a$ , les préimages de  $a$  étant les « milieux » des arêtes de  $M$ , les préimages du point associé à  $\varphi$  étant les « centres » des faces.*

**Idée de démonstration.**

Les éléments de la fibre au-dessus de  $s$  sont en nombre  $p(\sigma) = S$ , qui est le nombre de sommets de notre carte  $M$  de départ. Ils sont associés via la permutation  $\alpha$  aux éléments de la fibre au-dessus de  $a$  (les « milieux des arêtes ») de sorte à reconstruire les arêtes de  $M$ . Ceci incite à tracer une pique sur la sphère arrivée allant de  $s$  vers  $a$  et à prendre la préimage de la carte  $s \rightarrow a$  ainsi tracée. Le processus inverse nous redonne les mêmes  $\sigma$  et  $\alpha$ , donc le même  $\varphi$ , donc la même carte.

### 2.3.4 Formule de Riemann-Hurwitz

Comment retrouver le genre d'un revêtement ? Il suffit de tracer une carte en haut et de calculer sa caractéristique d'Euler. Pour avoir une carte en haut, on tire en arrière une carte en bas. Autant en prendre une simple. Il s'agit alors de voir comment se comportent le nombre de sommets, arêtes et faces lors d'un tiré-en-arrière.

Observons le fait suivant. Considérons une face sur la sphère image ne contenant aucun point de ramification. Alors sa préimage est une copie de  $n$  feuillets, *i.e.*  $n$  faces. De même pour ses arêtes. Plus généralement, si l'intérieur de la face et l'intérieur de ses arêtes ne contient pas de point de ramification (peut-être ses sommets en sont), la préimage de son intérieur est aussi une copie de  $n$  faces « ouvertes », et chaque arête ouverte est également tirée en arrière sur  $n$  arêtes. Cela nous suffira.

Considérons un revêtement  $f$  de degré  $n$ . Appelons  $a_1, \dots, a_k$  ses points de ramifications et soit  $a_0$  un autre point de la sphère. Considérons le graphe étoilé en  $a_0$  vers les  $a_i$ . Il définit une carte en bas ayant  $k+1$  sommets,  $k$  arêtes et 1 face. Tirons-la en arrière. D'après notre observation, on obtient une carte ayant  $n$  faces et  $kn$  arêtes. Le nombre de sommets au-dessus de  $a_i$  étant  $p_{a_i}$ , on peut calculer le genre de notre revêtement par la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= (n + p_{a_1} + \dots + p_{a_k}) - nk + n \\ &= n + \sum_{i=1}^k (n - r(a_i)) - nk + n \\ &= 2n - \sum r(a_i). \end{aligned}$$

C'est la *formule de Riemann-Hurwitz* :

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= 2n - r(f), \\ \text{ou } g &= \frac{r(f)}{2} - (n - 1). \end{aligned}$$

On aurait également pu considérer une courbe de Jordan passant par chacun des points de ramification. La carte en bas aurait eu  $k$  sommets,  $k$  arêtes, 2 faces. Le même raisonnement aurait donné

$$2 - 2g = (p_{a_1} + \dots + p_{a_k}) - nk + 2n, \text{ d'où la même formule.}$$

Un fait remarquable de la formule de Riemann-Hurwitz est qu'elle ne fait intervenir que des entiers. Ainsi tombe la parité du degré total de ramification, ce qui montre que le problème de Hurwitz n'a pas de solution si le degré total de ramification du passeport est impair.

Mieux, l'entier  $g$  est *positif*. On peut en déduire le fait suivant, non trivial sans considérations topologiques (et dont nous ferons usage au paragraphe 3.4.1).

**Proposition.**

Si  $k$  permutations  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  de  $\mathfrak{S}_n$  vérifiant  $\sum r(\sigma_i) = n - 1$  engendrent un sous-groupe transitif de  $\mathfrak{S}_n$ , alors le produit  $\prod \sigma_i$ , quel que soit l'ordre de ses facteurs, est un  $n$ -cycle.

**Démonstration.**

En effet, soit  $\gamma^{-1}$  le produit considéré, de sorte que l'on dispose d'une  $(k+1)$ -constellation mettant en jeu  $\gamma, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ . On lui associe un revêtement, et on applique la formule de Riemann-Hurwitz :

$$0 \leq \sigma = \frac{r(\gamma) + \sum r(\sigma_i)}{2} - (n - 1) = \frac{r(\gamma) - (n - 1)}{2}, \text{ d'où } r(\gamma) \geq n - 1.$$

En se rappelant que  $r(\gamma)$  vaut  $n$  moins le nombre  $p$  de ses cycles, on obtient  $n - p \geq n - 1$ , d'où  $p \leq 1$  et  $\gamma$  est bien un  $n$ -cycle.

## 2.4 Le problème de Hurwitz

Les deux angles d'attaque étant définis, nous pouvons formuler le problème qui sous-tend ce mémoire.

**Définition**

Un point critique d'ordre 1 sera dit simple.

Soit  $\mu = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots n^{a_n}$  une partition d'un entier  $\leq n$  et  $a$  une valeur critique d'un revêtement de degré  $n$  dont les degrés des préimages forment la partition  $\mu$  à laquelle on a éventuellement rajoutée des 1. Un  $\mu$ -marquage de  $a$  est la donnée d'une partie à  $a_1$  éléments des préimages simples de  $a$ .

Un revêtement  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ -marqué est un revêtement ramifié à  $k$  valeurs critiques muni d'un  $\mu_i$ -marquage pour chacune de ses valeurs critiques.

À l'origine, Hurwitz cherchait les constellations de passeport  $(\mu, 2, \dots, 2)$  où  $\mu$  est arbitraire, le genre étant donné par la formule de Riemann-Hurwitz.

Évidemment, on généralise à un passeport quelconque, *i.e.* on cherche le nombre de revêtement ramifiés de la sphère dont le passeport  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  est donné.

Une autre formulation, encore plus générale, consiste à se donner des partitions  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  d'entiers tous  $\leq n$  le degré du revêtement, et à compter les revêtements  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ -marqués.

Pour finir, on se donne même le luxe d'imposer le genre, quitte à rajouter des valeurs critiques de degré de ramification 1 – on parle de *valeurs simples*.

### Le problème de Hurwitz.

On se donne deux entiers positifs  $g$  et  $n$  ainsi que des partitions  $\mu_1, \dots, \mu_k$  d'entiers situés entre 0 et  $n$ . Quitte à compléter les partitions avec des 1, on obtient un  $k$ -passeport de degré  $n$ . Pour obtenir un revêtement de genre  $g$  précisément, on rajoute un certain nombre  $c(n)$  de valeurs simples. La valeur de  $c(n)$  se trouve par la formule de Riemann-Hurwitz :

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= 2n - \sum r(\mu_i) - c(n), \text{ d'où} \\ c(n) &= 2n + 2g - 2 - r. \end{aligned}$$

Le nombre de revêtements (à isomorphisme près)  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ -marqués à  $n$  feuillets possédant le  $(k + c(n))$ -passeport précédent est un nombre de Hurwitz. Il est très recherché et sera noté

$$h_{g,n;\mu_1,\dots,\mu_k}.$$

Il est compté avec un poids  $\frac{1}{|\text{Aut}|}$  inverse du cardinal de son automorphie, de sorte que les nombres de Hurwitz sont rationnels (non nécessairement entiers).

Les nombres de Hurwitz  $h_{g,n;*}$  comptent également les  $(k + c(n))$ -constellations sur  $\mathfrak{S}_n$  ayant le passeport considéré, marquées par ce passeport (avec un sens évident), avec un poids  $\frac{1}{n!}$ .

Observer que si l'une des partitions est vide, la permutation associée vaut l'identité, de sorte que l'on peut la laisser tomber lorsque l'on dénombre la constellation associée :

$$h_{g,n;\mu_1,\dots,\mu_k,\emptyset} = h_{g,n;\mu_1,\dots,\mu_k}.$$

Par exemple, si l'on souhaite n'avoir que des valeurs simples, on prendra  $\mu_i = \emptyset$  pour tout  $i$ , ce que revient à faire  $k = 0$ .

Maintenant que nous avons présenté le problème de Hurwitz sous différents angles, présentons les outils techniques nécessaire pour s'attaquer<sup>5</sup>. L'article [3] exprime certains nombres de Hurwitz à l'aide d'intégrales sur l'espace des modules des courbes  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  (formule ELSV). Notre démarche sera, d'abord de présenter les outils nécessaires pour comprendre cette formule, d'expliquer ces nombres en genre 0 et 1, puis de montrer par des outils purement combinatoires que les  $h_{g,n;\mu_1,\dots,\mu_k}$  interviennent tous dans une algèbre remarquable de séries formelles.

---

<sup>5</sup>Noter qu'en réalité c'est l'étude de la théorie de l'intersection sur l'espace des modules des courbes qui a stimulé l'intérêt pour les nombres de Hurwitz

## 3 Espaces des modules des courbes

### 3.1 Propriétés de base

#### 3.1.1 Surfaces de Riemann

Nous appellerons *surface de Riemann* toute variété compacte connexe de dimension complexe 1. En ne considérant que la structure topologique, les surfaces de Riemann sont classifiées par leur genre  $g$  (mais on perd alors la richesse de la structure complexe).

Étant donné le rapport double entre dimension réelle et complexe, le terme « courbe » (complexe) ne doit pas surprendre lorsque l'on parle de « surfaces » (réelles).

La situation en genre 0 ou 1 est plutôt facile à décrire.

En genre nul, la sphère possède (à isomorphisme près) une unique structure de surface de Riemann, celle de la droite projective complexe  $\mathbb{S} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , donnée par deux cartes recollées par le changement de coordonnée  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Son groupe d'automorphismes est  $PSL_2(\mathbb{C})$  et agit sur la coordonnée  $z$  par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Une surface de Riemann de genre 0 est appelé *courbe rationnelle*<sup>6</sup>.

En genre 1, toute surface de Riemann peut être obtenue en quotientant  $\mathbb{C}$  par un réseau  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^2$ , deux réseaux donnant lieu à deux surfaces isomorphes si et seulement si l'un se déduit de l'autre par une homothétie complexe. On parle également de *courbes elliptiques*<sup>7</sup>. Le groupe d'automorphismes  $\text{Aut } E$  d'une courbe elliptique  $E$  contient un sous-groupe infini de translations ( $E$  agissant sur elle-même) qui sont tués si l'on fixe un point sur  $E$ , ainsi qu'un sous-groupe de rotations cyclique d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6 (par exemple, le réseau triangulaire  $\mathbb{Z} + e^{\frac{\pi i}{3}}\mathbb{Z}$  a de l'automorphie due à la rotation d'angle  $e^{\frac{\pi i}{3}}$ ).

Nous allons à présent marquer des points sur nos surfaces, points qui devront bien sûr être conservés par automorphisme, puis faire varier nos points sur la surface. L'espace des modules des courbes va paramétrer ces surfaces marquées à isomorphisme près.

#### 3.1.2 Surfaces de Riemann à $n$ points marqués

##### Définition.

L'espace des modules des courbes  $\mathcal{M}_{g,n}$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann de genre  $g$  avec  $n$  points marqués.

Si le nombre de points  $n$  est inférieur à la caractéristique d'Euler  $2 - 2g$  de la surface, alors notre surface marquée possède un groupe d'automorphismes infini (et réciproquement), phénomène (dit d'*instabilité*) que nous souhaitons écarter afin de pouvoir mettre une structure d'orbifold sur  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Nous laisserons donc de côté les espaces  $\mathcal{M}_{0,0}$ ,  $\mathcal{M}_{0,1}$ ,  $\mathcal{M}_{0,2}$  et  $\mathcal{M}_{1,0}$ . On parlera dans ce cas de couple  $(g, n)$  *stable*.

Regardons les premiers exemples en genre 0 et 1.

Marquons trois points sur la sphère de Riemann  $\mathbb{S}$ . Il est connu que  $\text{Aut } \mathbb{S} = PSL_2(\mathbb{C})$  est 3-transitif sur  $\mathbb{S}$ . Ainsi, étant données deux sphères marquées par trois points, il y a aura toujours un automorphisme envoyant la première en la seconde, de sorte que l'espace  $\mathcal{M}_{0,3}$  des modules des courbes rationnelles à trois points marqués est réduit à un point.

Marquons à présent quatre points, mettons  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$ . Pour les mêmes raisons, on peut envoyer  $(x_1, x_2, x_3)$  sur  $(0, 1, \infty)$ , mais l'image de  $x_4$  est fixée par la position des trois premiers points. Son image, appelons-la  $t$ , est le *module* de notre surface de départ. Si cette dernière est la sphère de Riemann,  $t$  vaut le

<sup>6</sup>La terminologie vient du fait (classique) que toute application méromorphe entre courbes rationnelles est une fraction *rationnelle*.

<sup>7</sup>La terminologie vient des équations dites *elliptiques* qui sont de la forme  $y^2 = P(x)$  où  $P$  est un polynôme de degré 3 ou 4. On peut en effet mettre une structure complexe de tore sur les solutions complexes de telles équations.

birraport  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ . L'espace des modules  $\mathcal{M}_{0,4}$  est alors l'ensemble des valeurs que peut prendre ce module, à savoir  $\mathbb{S}$  privé de  $\{0, 1, \infty\}$ .

Plus généralement, on peut décrire l'espace des modules des courbes rationnelles par

$$\mathcal{M}_{0,n} = \left\{ \vec{t} \in \mathbb{S}^{n-3} ; t_i \neq 0, 1, \infty ; t_i \neq t_j \right\}.$$

Remarquer qu'il y a des trous :  $\mathcal{M}_{0,n}$  n'est jamais compact pour  $n \geq 4$ .

En genre 1, toute courbe elliptique  $E$  est le quotient de  $\mathbb{C}$  par un réseau. L'image de 0 fournit naturellement un point marqué sur  $E$ . On en déduit

$$\mathcal{M}_{1,1} = \{\text{réseaux}\} / \mathbb{C}^*.$$

Pour une autre description, considérer une base directe  $(z_1, z_2)$  d'un réseau. Quitte à multiplier par  $\frac{1}{z_1}$ , on obtient  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  avec  $\tau$  dans le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H} = \{\text{Im } z > 0\}$ . Partant d'une autre base, reliée à la première par action de  $SL_2(\mathbb{Z})$ , on obtient un autre  $\tau'$  dans  $\mathbb{H}$ . On en déduit donc

$$\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H} / SL_2(\mathbb{Z}).$$

Un domaine fondamental pour cette action est décrit par

$$\left\{ |\text{Re } z| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1 \right\}$$

où le bord (comprenant les deux lignes  $\text{Re } z = \pm \frac{1}{2}$  et les points sur le cercle unité) est recollé selon une symétrie d'axe imaginaire. Géométriquement, on obtient un cylindre dont l'un des bouts est pincé et l'autre part à l'infini, appelé *courbe modulaire*. De même, il n'y a pas compacité.

### 3.1.3 Structure d'orbifold sur $\mathcal{M}_{g,n}$

Bien que ce soit le cas en genre nul, il n'est généralement pas possible de munir  $\mathcal{M}_{g,n}$  d'une structure de variété. On peut cependant lui associer une structure un peu plus générale, où les ouverts de notre atlas sont en plus quotients par l'action d'un groupe fini. On fait donc un mélange de « manifold » et d'« orbites » de groupes finis, d'où le terme d'*orbifold*.

Nous renvoyons à [13] pour les définitions précises d'un orbifold et nous contenterons d'exemples pour nous familiariser avec la notion.

Considérons la sphère de Riemann modulo l'action de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  définie par multiplication par  $i$ . Notons  $O$  l'orbifold obtenu. À l'exception de deux points (0 et  $\infty$ ), tout point de  $O$  a un voisinage homéomorphe à un disque ouvert avec action triviale du groupe trivial. Quant à nos deux « pôles », ils admettent tous deux un voisinage du type disque unité quotienté par l'action de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Il faut retenir que ces points se retrouvent ainsi « pliés » en 4, où quatre est l'ordre de leur stabilisateur.

Autre exemple : la courbe modulaire  $\mathbb{H} / SL_2(\mathbb{Z})$ . Cela est un bon exemple, puisque nous avons montré précédemment qu'il correspond à l'espace  $\mathcal{M}_{1,1}$  des modules des courbes elliptiques à un point marqué. Géométriquement, on obtenait un cylindre dont l'un des bouts était pincé et l'autre bout partait à l'infini. Cela montre que tous ses points, à l'exception de  $i$  et  $e^{\frac{\pi i}{3}}$ , admettent des voisinages « euclidiens ». Le point  $i$  se retrouve plié en 4 par l'action de  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{-1}{z}$  (on trouve le stabilisateur en résolvant  $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ ), tandis que le point  $e^{\frac{\pi i}{3}}$  se voit plié en 6 par l'action de  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : z \mapsto 1 - \frac{1}{z}$ . Observer ici que, la matrice  $-I_2$  fixant tout le monde, tous les points (sauf  $i$  et  $e^{\frac{\pi i}{3}}$ ) admettent en fait un voisinage euclidien modulo action triviale du groupe  $\{\pm I_2\}$  : on prendra donc garde à ne pas oublier les divisions par 2.

On peut généraliser la notion de caractéristique d'Euler d'une variété à un orbifold.

#### Définition.

La *caractéristique d'Euler* d'un orbifold  $O$  décomposé en cellules  $\mathbb{R}^k / G$  est définie par

$$\chi(O) = \sum_{\text{cellules}} \frac{(-1)^k}{|G|}.$$

Appliquons cela à notre sphère modulo  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  : on recolle une cellule de dimension 0 modulo  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  (le pôle plié en 4) et une cellule de dimension 2 (son complémentaire) modulo  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , ce qui donne

$$\chi = \frac{(-1)^0}{4} + \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Noter bien que, même si l'action sur le pôle est triviale, il *faut* tenir compte du fait que ce point est plié en quatre. On pourrait tout aussi bien partir des deux points pliés en quatre, les joindre par deux arêtes pour former un équateur, puis rajouter les hémisphères ouverts manquant. On trouverait de même

$$\chi = 2 \frac{1}{4} - 2 + 2 = \frac{1}{2}.$$

Calculons également la caractéristique d'Euler de la courbe modulaire  $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ . On part des deux points pliés en 4 et 6, on les joint par une arête, on rajoute une arête infinie le long du cylindre, et on enveloppe ce qui reste avec une 2-cellule. On trouve (en n'oubliant pas de diviser par 2 quand il le faut)

$$\chi = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}.$$

Une autre manière de définir la caractéristique d'Euler est de découper notre orbifold en sous-varités  $O_G$  où  $O_G$  désigne l'ensemble des points admettant un voisinage du type  $\mathbb{R}^k/G$ , et de sommer  $\frac{\chi(O_G)}{|G|}$  sur tous les groupes finis. En regroupant tous les points pliés  $k$  fois en un ensemble  $O_k$ , on peut écrire

$$\chi(O) = \sum_{k \geq 1} \frac{\chi(O_k)}{k}.$$

Par exemple, pour la sphère modulo  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , on trouve pour  $O_1$  une sphère privée de deux points (*i.e.* un cylindre) dont le  $\chi$  vaut 0, et on doit rajouter les deux points pliés en 4 (dont le  $\chi$  vaut 2), d'où

$$\chi = \frac{0}{1} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour la courbe modulaire, on isole les deux points pliés en 4 et 6, le reste (plié en 2) étant un cylindre semi-infini privé de deux points, *i.e.* une sphère privée de trois points, dont le  $\chi$  vaut  $-1$ . On retrouve

$$\chi = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Le théorème principal de structure, que nous admettrons (*cf.* [6]), confère à  $\mathcal{M}_{g,n}$  une structure d'orbifold de dimension  $3g - 3 + n$ . Il vient avec une *courbe universelle*  $\mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  qui paramètre les surfaces de Riemann via leur module.

### **Théorème.**

*Fixons  $(g, n)$  un couple stable.  $\mathcal{M}_{g,n}$  est alors un orbifold de dimension  $3g - 3 + n$ , qui devient (à  $g$  fixé) une variété pour  $n$  assez grand (en particulier quel que soit  $n$  pour  $g = 0$ ).*

*Il y a de plus une famille  $\mathcal{C}_{g,n}$  de courbes de genre  $g$  à  $n$  points marqués, munie d'une structure d'orbifold de dimension  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{g,n} + 1$ , venant avec une projection  $\mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ , appelé courbe universelle, telle que la fibre au-dessus d'une courbe est la courbe en question (toutes étant prises à isomorphismes près).*

*On dispose également de  $n$  sections  $s_i : \mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathcal{C}_{g,n}$  correspondant aux points marqués.*

*Toute courbe à  $n$  points marqués (modulo isomorphisme) apparaît ainsi une et une seule fois dans les fibres.*

Rappelons ici le sens du mot *famille*. Contrairement à la définition standard « une famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  est une application de  $I$  dans  $E$  » qui ne permet pas de parler de famille d'ensembles, nous regarderons plutôt les applications d'un *espace total*  $E$  vers un *espace de base*  $B$ , la fibre au-dessus de chaque



point  $b \in B$  correspondant à l'objet de notre « famille » associé à l'« indice »  $b$  : noter bien que la famille n'est plus à valeurs dans  $E$ , mais dans  $\mathfrak{P}(E)$ .

Par exemple, si l'on regarde l'espace tangent à un cercle en un point donné, on obtient une droite. Pour avoir une famille de telles droites, on les met **toutes** ensemble dans un même espace (c'est l'espace **total**), de sorte que lorsque l'on se déplace le long du cercle, on se déplace de droite en droite dans cet espace total. Dans notre exemple, il suffit de prendre pour  $E$  un cylindre de section orthogonale le cercle qui nous intéresse. Un autre avantage de cette définition de famille est qu'elle permet de mettre une structure sur l'espace total (ici, un cylindre, vu comme famille de droites, est naturellement muni d'une structure de variété).

Pour avoir la dimension de l'espace total, il est assez agréable de se représenter l'espace de base comme une courbe : au-dessus de chaque point de base, on a une certaine fibre  $F$ , de sorte que l'espace total se représente par le produit carthésien  $B \times F$  (c'est la *courbe universelle*), d'où sa dimension. Dans le cas de  $\mathcal{C}_{g,n}$ , la fibre est toujours une surface de Riemann, donc de dimension complexe 1, d'où

$$\dim \mathcal{C}_{g,n} = \dim \mathcal{M}_{g,n} + 1.$$

Donnons enfin une vision possible d'une section. Considérons une famille de cercles au-dessus d'une droite. L'espace total est donc un cylindre (disons allongé). Prenons notre cutter et sectionnons notre cylindre dans le sens de sa longueur (on a le droit de faire des tours et des sauts) : c'est une section (évidemment, si on s'interdit de faire des sauts, on a une section continue). Cela peut aider à visualiser la définition formelle : une *section* d'une famille  $f : E \rightarrow B$  est une application  $s : B \rightarrow E$  telle que  $f \circ s = \text{Id}$  (on se donne un point au-dessus de chaque fibre).

Essentiellement, il faut oublier que  $\mathcal{M}_{g,n}$  est un orbifold et le manipuler comme une variété, en se souvenant que les « pliures » font apparaître des rationnels là on s'attendait à des entiers.

Par exemple, Harer et Zagier ont calculé la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{M}_{g,n}$ , à partir de celle de  $\mathcal{M}_{g,1}$  pour laquelle le calcul du nombre  $\varepsilon_g(k)$  de façons d'apparier les côtés d'un  $2k$ -gone pour obtenir une surface de genre  $g$  n'était qu'un lemme. Leur résultat est le suivant :

$$\chi(\mathcal{M}_{g,1}) = \zeta(1-2g) = -\frac{B_{2g}}{2g}$$

où  $B_{2g}$  sont les nombres de Bernoulli ( $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ...). Pour  $g = 1$ , on retrouve le  $-\frac{1}{12}$  de la courbe modulaire. Pour passer à un nombre de points quelconque, on utilise le *morphisme d'oubli*  $\mathcal{M}_{g,n+1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  qui efface le dernier point : c'est un fibré dont la fibre au-dessus d'une courbe  $(C; x_1, \dots, x_n)$  est le lieu du  $(n+1)$ -ième point, *i.e.* la courbe  $C$  privé de ses  $n$  premiers points, lieu dont le  $\chi$  vaut  $2g - 2 - n$ . On en déduit la formule de récurrence

$$\chi(\mathcal{M}_{g,n+1}) = (2 - 2g - n) \chi(\mathcal{M}_{g,n}),$$

d'où le résultat général :

$$\chi(\mathcal{M}_{g,n}) = (-1)^n \frac{(2g-3+n)!}{(2g)!} (2g-1) B_{2g}.$$

Cette formule reste valable pour les courbes rationnelles :

$$\chi(\mathcal{M}_{0,n}) = (-1)^{n-1} (n-3)!.$$

Cette formule est cohérente avec les petits cas  $n = 3$  et  $4$ , pour lesquels on a, d'une part un espace réduit à un point ( $\chi = 1$ ), d'autre part une sphère privée de trois points ( $\chi = 2 - 1 - 1 - 1$ ).

### 3.2 Compactification de $\mathcal{M}_{g,n}$

Nous avons déjà remarqué que les  $\mathcal{M}_{0,n}$  et  $\mathcal{M}_{1,1}$  ne sont pas compacts. Il y a différentes manières de compactifier un espace, le but étant évidemment de contrôler certaines propriétés à la compactification. Dans le cas de l'espace des modules des courbes, on aimerait disposer d'une courbe universelle  $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  où les deux espaces sont des orbifolds. Il faut également rajouter les « courbes » correspondant aux « modules limites » : ce seront les courbes stables.

### 3.2.1 Exemples de limites manquantes dans $\mathcal{M}_{g,n}$

Comme dit précédemment, les courbes stables seront des « limites » de surfaces de Riemann à points marqués. Il est donc impossible d'éviter des singularités.

Par exemple, prenons  $\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H}/_{SL_2(\mathbb{Z})}$ . À un module  $\tau$  du domaine fondamental habituel, on associe un parallélogramme de base  $(1, \tau)$  on recolle les côtés issu de  $\tau$  pour obtenir un cylindre de « hauteur »  $\tau$ , puis on identifie les deux cercles limites.. Lorsque  $\tau$  s'échappe à l'infini, le cylindre obtenu devient infini, de sorte qu'identifier ses bords revient à identifier deux points à l'infini : on obtient un tore où l'on a contracté un cercle tranverse en un point, *i.e.* une sphère dont on a attaché deux points.

Autre exemple :  $\mathcal{M}_{0,4}$ , que nous savons être  $\mathbb{S} \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Un module  $t$  dans  $\mathcal{M}_{0,4}$  correspond à la sphère de Riemann marquée par les points  $(0, 1, \infty, t)$ . Lorsque  $t$  tend vers 0, les points  $x_1$  et  $x_4$  se confondent. Mais notre module correspond également, modulo changement de coordonnée  $\frac{x}{t}$ , à la sphère marquée par  $(0, \frac{1}{t}, \infty, 1)$ , de sorte qu'à la limite quand  $t \rightarrow 0$  ce sont cette fois  $x_2$  et  $x_3$  qui deviennent confondus. Comme il n'y a pas de raison de discriminer plus un choix de coordonnée que l'autre, il faut tenir compte des *deux* limites pour décrire la courbe limite. Pour ce faire, on attache deux sphères marquées chacune par les points  $(x_1, x_4)$  et  $(x_2, x_3)$  selon un point commun que nous appellerons *nœud*.

Comment une sphère peut-elle bien dégénérer en deux sphères ? On peut, afin de dépasser la surprise, regarder la famille de courbes  $xy = t$  paramétrée par  $t \in \mathbb{S}$ , sur lesquelles on marque les quatre points

$$(0, \infty), (1, t), (\infty, 0), (t, 1).$$

Pour  $t \neq 0$ , on a affaire à une courbe de  $\mathcal{M}_{0,4}$ , mais lorsque  $t$  tend vers 0, cela dégénère en une paire de sphères, chacune correspondant à un axe de coordonnée, chacune marquée de deux points, attachées par le point  $(0, 0)$ . Faire un dessin en coordonnées réelles peut aider à voir la dégénérescence.

### 3.2.2 Courbes stables et compactification de Deligne-Mumford

Ayant aperçu ce qui ce qui nous attend si l'on cherche à compactifier  $\mathcal{M}_{g,n}$ , on peut à présent formuler une définition raisonnable des courbes stables.

#### Définition.

Un nœud est un point d'une courbe (algébrique complexe) admettant un voisinage homéomorphe à une paire de disques reliés par leur centre.

Un nœud est dit résolu lorsque l'on a remplacé la paire de disques par un cylindre recollé le long des cercles bordant les disques, normalisé lorsque l'on a séparé la paire de disques attachés en deux disques disjoints.

Une courbe stable (sous-entendu : à  $n$  points marqués) est une courbe algébrique complexe munie de  $n \geq 0$  points distincts dont

1. les seules singularités sont des nœuds ;
2. les nœuds ne sont pas des points marqués ;
3. l'automorphie est **finie** (condition de stabilité).

Le genre d'une courbe stable est le genre de la courbe obtenue en résolvant tous les nœuds.

Les composantes d'une courbe stables sont les composantes irréductibles de sa normalisation.

On notera  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  l'ensemble des courbes stables à  $n$  points marqués modulo biholomorphisme.

Reformulons tout d'abord la condition de stabilité de manière plus maniable. En appelant *point spécial* tout point marqué ou tout point provenant d'un nœud après normalisation (noter bien qu'un nœud dont les deux extrémités sont sur la même composante donne lieu à deux points spéciaux, *cf.* la courbe limite de  $\mathcal{M}_{1,1}$ ), il s'agit de vérifier que chaque composante, marquée par ses points spéciaux, est stable. En d'autres termes, chaque composante sphérique doit avoir au moins trois points spéciaux et chaque composante torique doit en avoir au moins un.

C'est un fait remarquable que les courbes stables suffisent à compactifier l'espace des modules des courbes (*cf.* [12]).

#### Théorème (Deligne-Mumford).

Pour tout couple  $(g, n)$  stable,  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est un orbifold compact de dimension  $\dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g - 3 + n$  dans lequel  $\mathcal{M}_{g,n}$  est Zariski-dense : on l'appelle la compactification de Deligne-Mumford de l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}$  (c'est même une variété pour  $n$  assez grand à  $g$  fixé).

Il vient avec une courbe universelle  $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  prolongeant la courbe  $\mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  dont la fibre au-dessus d'une courbe stable est la courbe stable en question, ainsi que  $n$  sections  $s_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$  correspondant aux points marqués.

Les courbes singulières de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  forment son bord .

Donnons quelques exemples pour illustrer la compacité de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

- $\mathcal{M}_{0,3}$  consiste en un seul point, donc est déjà compact, d'où  $\mathcal{M}_{0,3} = \overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ . Cela se voyait déjà : il n'y a pas de courbe singulière dans  $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$  (pas assez de points marqués pour stabiliser d'éventuelles composantes multiples).

- Comme vu précédemment,  $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$  contient une courbe singulière formé de deux sphères attachées séparant les points  $\{x_2, x_3\}$  et  $\{x_1, x_4\}$ . Évidemment, n'importe répartition des quatre points sur les deux sphères ferait l'affaire ; il faut donc rajouter  $\{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$  et  $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$ , ce qui fait au final trois courbes sur le bord. Or, si on souvient de la description de  $\mathcal{M}_{0,4}$  comme la sphère de Riemann privée des trois points  $\{0, 1, \infty\}$ , on s'aperçoit qu'on vient de trouver les trois courbes correspondant à ces trois trous.

- La courbe modulaire  $\mathcal{M}_{1,1}$  est un cylindre semi-infini. La courbe singulière trouvée plus-haut (qui se résoud en un tore à trois points spéciaux) correspond à ce qui se passe vers le côté infini du cylindre.

- Soit une courbe de genre 2 avec deux points marqués tendant l'un vers l'autre. À quoi ressemble la limite ? On devrait avoir une courbe (de genre 2) avec un point marqué correspondant à la fusion des deux points précédents. Mais, en prenant un système de coordonnées local qui fixe nos deux points, les deux trous de notre 2-tore se voient rejetés à l'infini et on ne voit plus qu'une sphère à deux points marqués. En prenant en compte les deux comportements comme nous l'avons fait pour la sphère marquée par  $(0, 1, \infty, t)$ , on obtient notre limite en attachant les deux courbes sus-décrites le long du point limite sur le 2-tore.

- On prend à présent la sphère de Riemann marquée par cinq points  $(0, 1, \infty, t, t^2)$ . Que se passe-t-il lorsque  $t$  tend vers 0 ? Dans notre système de coordonnées, les points  $x_1, x_4$  et  $x_5$  fusionnent à la limite. Mais on peut faire d'autres changements de coordonnées, ce qui donne les systèmes de points

$$\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto tx : (0, t, \infty, t^2, t^3) \longrightarrow (0, 0, \infty, 0, 0) \\ x \mapsto x : (0, 1, \infty, t, t^2) \longrightarrow (0, 1, \infty, 0, 0) \\ x \mapsto \frac{x}{t} : (0, \frac{1}{t}, \infty, 1, t) \longrightarrow (0, \infty, \infty, 1, 0) \\ x \mapsto \frac{x}{t^2} : (0, \frac{1}{t^2}, \infty, \frac{1}{t}, 1) \longrightarrow (0, \infty, \infty, \infty, 1) \\ x \mapsto \frac{x}{t^3} : (0, \frac{1}{t^3}, \infty, \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t}) \longrightarrow (0, \infty, \infty, \infty, \infty) \end{array} \right. .$$

La deuxième sphère, correspondant à  $(0, 1, \infty, 0, 0)$ , a trois points marqués. Les troisième et quatrième, associées à  $(0, \infty, \infty, 1, 0)$  et  $(0, \infty, \infty, \infty, 1)$ , également. Les autres, en revanche, ne sont marquées que de deux points et sont donc instables : il faut les rejeter. On obtient ainsi trois sphères collées bout à bout, la sphère centrale contenant un point marqué tandis que les deux sphères flanquantes en contiennent deux – chaque sphère possédant ainsi trois points spéciaux. Cet exemple a l'avantage de montrer que, si l'on autorise les composantes instables, alors il n'y a plus unicité de la limite.

Signalons à titre culturel un moyen de relier le calcul de la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{M}_{0,n}$  à celle de son compactifié (cf. [8]). Getzler affirme que les séries formelles

$$x - \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n!} \chi(\mathcal{M}_{0,n+1}) \text{ et } y + \sum_{n \geq 2} \frac{y^n}{n!} \chi(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})$$

sont inverse l'un de l'autre pour la composition. On trouve ainsi les premières valeurs (en commençant à  $n = 3$ ) :

$$\chi(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}) = 1, 2, 7, 34, 213, 1630, \dots$$

### 3.2.3 Morphismes d'oubli

L'idée derrière les morphismes d'oubli est d'« oublier » un certain nombre de points sur une courbe stable. Le problème est que la courbe résultante n'est pas forcément stable (imaginer que l'on retire l'un des deux points

marqués d'une sphère attachée à autre chose). En rappelant que les deux seules obstructions à la stabilité sont une sphère ayant moins de deux points spéciaux et un tore sans points spéciaux, expliquons pourquoi la seconde n'est pas pertinente pour ce qui nous intéresse : l'absence de points spéciaux implique l'absence de nœuds, donc toute composante torique instable doit être toute seule, mais on tombe alors dans  $\mathcal{M}_{1,0}$  que l'on a préféré écarter (on évite ce cas en s'arrêtant juste avant, *i.e.* interdiction d'oublier des points sur  $\mathcal{M}_{1,1}$ ). La seule obstruction réside donc dans les sphères instables. Pour s'en débarasser, on les contracte tant que cela est possible. Le nombre de points spéciaux décroissant à chaque étape, on finit par aboutir par une courbe stable (ou alors on tombe dans  $\mathcal{M}_{0,n}$  avec  $n \leq 2$ , mais on évite cet écueil en s'interdisant d'oublier un point sur  $\mathcal{M}_{0,3}$ ). Évidemment, si un point marqué *non oublié* se trouve dans une sphère instable, il laisse une trace là où cette dernière se contracte.

**Définition.**

Soit  $(g, n)$  un couple stable et  $p \geq 1$  un entier.

La stabilisation d'une courbe  $C$  marquée de  $n$  points obtenue en oubliant  $p$  points d'une courbe de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+p}$  est la courbe de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  obtenue en contractant les sphères devenues instables tant que cela est possible.

Le morphisme d'oubli (de  $p$  points) associe à une courbe  $(C; x_1, \dots, x_{n+p})$  la stabilisation de la courbe  $(C; x_1, \dots, x_n)$  :

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n+p} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}.$$

L'intérêt des morphismes d'oubli est de pouvoir « passer » d'un espace des modules à un autre par des transformations simples. Ceci nous permettra d'obtenir des formules de récurrence lorsque nous intégrerons des classes de cohomologie (nous en avons déjà fait usage quand nous avons parlé de  $\chi(\mathcal{M}_{g,n})$ ).

### 3.3 Intégration sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

Dans tout ce qui suit,  $(g, n)$  désignera toujours un couple stable.

#### 3.3.1 Rappels de cohomologie

Étant donné un espace topologique  $X$ , on dispose d'un  $A$ -module  $H_*(X, A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k(X, A)$ , appelé *cohomologie de  $X$*  (à coefficients dans l'anneau  $A$ ). Les éléments de  $H_k(X, A)$  sont les  $A$ -combinaisons linéaires formelles d'applications continues du simplexe de dimension  $k$  à valeurs dans  $X$  (les  $k$ -cycles) modulo certains cycles particuliers (les  $k$ -bords)<sup>8</sup>. Noter que  $H_0(X, A) \simeq A$ .

Lorsque  $X$  est une variété, on peut remplacer les  $k$ -cycles par des combinaisons linéaires de sous-variétés de dimension  $k$ . Si  $X$  est de dimension finie  $n$ , sa *classe fondamentale* est la classe d'homologie  $[X]$  du  $n$ -cycle  $X$ .

On ne s'intéressera par la suite qu'à de l'homologie à coefficients *rationnels* (ce qui revient à prendre  $A = \mathbb{Q}$ ).

La *cohomologie* (rationnelle) de  $X$  est le dual de l'homologie<sup>9</sup>. On peut la munir d'un produit (le *cusp*) qui en fait une algèbre graduée anti-commutative  $H^*(X, \mathbb{Q})$ .

On peut pousser en avant et tirer en arrière les éléments de cohomologie au sens où, si l'on se donne un morphisme d'espaces topologiques  $f : X \longrightarrow Y$ , on lui associe deux morphismes d'algèbres

$$f_* : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y) \text{ et } f^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X).$$

On prendra garde à ne pas écrire  $f_*([A]) = [f(A)]$ <sup>10</sup>.

Si  $X$  est une variété compacte, orientée, de dimension  $n$ , on dispose d'une dualité de Poincaré

$$H_k(X) \simeq H^{n-k}(X).$$

<sup>8</sup> On renvoie à l'ouvrage Algebraic topology de Hatcher pour plus de précision. Essentiellement, l'homologie permet de voir les trous d'un espace : par exemple, le  $H^1$  (réel) d'un  $g$ -tore est  $\mathbb{R}^{2g}$ .

<sup>9</sup> Attention, cette définition est à adapter si l'anneau  $A$  n'est plus un corps.

<sup>10</sup> Pour définir  $f_*$ , on revient à la définition des cycles et on compose les applications simpliciales par  $f$ . La formule  $f_*([A]) = [f(A)]$  a le malheur de ne pas prendre en compte les coefficients des combinaisons linéaires.

Intuitivement, à un  $k$ -cycle  $C$ , on associe l'application qui compte le nombre d'intersection d'un  $(n - k)$ -cycle avec  $C$ .

La dualité de Poincaré implique la nullité des groupes d'homologie et de cohomologie au-delà de la dimension de  $X$  :

$$H_i(X) \text{ et } H^i(X) = 0 \text{ pour } i > \dim X.$$

Elle nous dit aussi que  $H^n(X, \mathbb{Q}) \simeq H_0(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$  est une droite, dont un générateur est la forme  $\lambda[X] \mapsto \lambda$ .

La dualité de Poincaré reste valable si  $X$  est un orbifold compact.

L'intégrale d'une classe de cohomologie  $\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$  (avec  $\xi_i \in H^i$ ) est définie par

$$\int_X \xi := \xi_n([X])$$

(on filtre les degrés  $< n$  puis on évalue en la classe fondamentale). Nous aurons de deux de ses propriétés.

Si  $A$  est une sous-variété de  $X$ , en notant  $\alpha$  la classe de cohomologie Poincaré duale de la classe d'homologie  $[A]$ , on a la propriété

$$\int_X \alpha\beta = \int_A \beta \text{ pour tout } \beta \in H^*.$$

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue et si  $\beta \in H^*(Y)$ , alors

$$\int_X f^*(\beta) = \int_{f_*(X)} \beta.$$

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , en tant qu'orbifold, et donc en tant qu'espace topologique, possède une algèbre graduée anti-commutative de cohomologie  $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  à coefficients rationnels. La compacité de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  permet de parler de dualité de Poincaré sur ce dernier.

La formule ELSV donne une expression des nombres de Hurwitz à l'aide d'intégrales de certaines classes de cohomologie sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Nous ne chercherons pas à comprendre ce que ces classes signifient au juste, mais nous donnerons cependant quelques éléments pour appréhender leur comportement.

### 3.3.2 Quelques classes de cohomologie

Avant d'introduire les  $\psi$ -classes, qui seront principalement les seules classes que nous intégrerons, il nous faut parler un peu des classes de Chern.

Les premières classes de Chern sont des classes dans le  $H^2$  d'une variété complexe  $X$ , définies à partir d'un fibré en droites  $\lambda$  sur  $X$ <sup>11</sup>. Pour les définir, on prend une section méromorphe de ce dernier et on regarde les lieux de ses zéros et de pôles. Un résultat classique (que nous admettrons) affirme que ce sont chacun un  $(n - 2)$ -cycle<sup>12</sup>, donc par dualité de Poincaré il leur correspond un élément dans le  $H^2(X)$  : leur différence [zéros] - [pôles] est appelée *première classe de Chern* du fibré  $\lambda$  et est notée  $c_1(\lambda)$ .

Dans le cas d'un fibré sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  (qui est de dimension 2), les classes de Chern sont codées par la différence du nombre de zéros et de pôles de toute section méromorphe. Expliquons cela.  $H_2(X)$  est engendré par la classe fondamentale  $[X]$  et  $H^2(X)$  est engendré par la forme  $\lambda[X] \mapsto \lambda$ . Ainsi, en notant  $[Z]$  la classe d'homologie du 0-cycle défini par les zéros de notre section, la 2-forme Poincaré duale de  $[Z]$  va compter le nombre de points d'intersection d'un 2-cycle  $\lambda X$  avec  $Z$ , ce qui n'est guère difficile à évaluer :  $\lambda|Z|$ . Ceci montre que la forme Poincaré duale de  $Z$  vaut  $\lambda[X] \mapsto \lambda|Z|$ . En prenant la différence avec le nombre de pôles, on a gagné.

<sup>11</sup>Rappelons qu'un *fibré en droites* (sur  $X$ ) est une application holomorphe  $\lambda : L \rightarrow X$  où  $L$  est une variété complexe et où la fibre en tout point  $x \in X$  est une droite (incluse dans  $L$ ).

<sup>12</sup>Le lieu des zéros est donné par une seule équation complexe, i.e. par deux équations réelles, donc est de dimension réelle  $n - 2$ . Or, l'homologie est une notion purement topologique, et la dimension topologique de  $\mathbb{R}$  est 1.

<sup>13</sup>ou sur toute surface de Riemann

Par exemple, on a un *fibré tautologique* sur la sphère de Riemann défini par  $\lambda : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 / \mathbb{C}^*$ . En prenant la section méromorphe  $(a, b) \mapsto (\frac{a}{b}, 1)$ , on voit qu'elle ne s'annule jamais mais possède un pôle en  $b = 0$ , d'où

$$c_1(\text{fibré tautologique}) = -1.$$

Sur  $\mathcal{M}_{g,n}$ , on dispose, pour chaque point marqué, d'un *fibré cotangent*, dual du fibré tangent. On admettra qu'il s'agit d'un fibré en droites<sup>14</sup>.

**Notation.**

On notera  $\mathcal{L}_i$  le fibré cotangent au point  $i$ , et  $\psi_i$ <sup>15</sup> sa première classe de Chern :

$$\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i).$$

On aura également besoin, pour formuler complètement ELSV, d'un autre fibré, cette fois non en droites mais vectoriel (chaque fibre est un espace vectoriel de dimension  $g$ ). Pour le définir, il nous faut tout d'abord prolonger la notion de 1-forme holomorphe aux courbes stables

**Définition.**

Une différentielle abélienne sur une courbe stable  $C$  est une 1-forme  $\alpha$  sur chaque composante de  $C$  dont

1. les pôles éventuels sont nécessairement des nœuds ;
2. les pôles éventuels sont tous d'ordre 1 ;
3. les résidus des deux pôles situés au nœud d'attache de deux composantes sont opposés.

Considérons par exemple la courbe singulière  $C$  de  $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$ , correspondant à une sphère dont deux points ont été attachés. Choisissons une coordonnée  $z$  telle que le point marqué soit 1 et que le nœud attache 0 et  $\infty$ . Alors la 1-forme  $\frac{dz}{z}$  est une différentielle abélienne, dont les résidus en 0 et  $\infty$  sont respectivement 1 et  $-1$ . La proposition suivante montre que toute différentielle abélienne sur  $C$  s'obtient à partir de  $\frac{dz}{z}$ .

**Proposition - Définition.**

Les différentielles abéliennes sur une surface de genre  $g$  forment un espace vectoriel (complexe) de dimension  $g$ .

Ces espaces forment un fibré vectoriel de rang  $g$  au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , appelé fibré de Hodge, et noté  $\Lambda_{g,n}$ .

Il existe d'autres classes de Chern que les  $c_1$ . On pourra ainsi considérer

$$\begin{aligned} c(\Lambda_{g,n}) &= c_0(\Lambda_{g,n}) + c_1(\Lambda_{g,n}) + \dots + c_g(\Lambda_{g,n}) \\ &= 1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_g \end{aligned}$$

où  $\lambda_i \in H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  est la  $i$ -ième classe de Chern du fibré  $\Lambda_{g,n}$ .

On sera amené à considérer les classes de Chern du fibré dual :

$$c(\Lambda_{g,n}^*) = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + (-1)^g \lambda_g.$$

<sup>14</sup>On en est droit de se demander pourquoi prendre le dual alors que l'on est déjà de dimension 1. Le fait est que ce n'est pas parce que les fibres de deux fibrés sont isomorphes que les espaces totaux des fibrés le sont.

<sup>15</sup>La notation  $\psi$  ne semble pas avoir plus de signification que cela : nous suivrons néanmoins la tradition.

### 3.3.3 Chevron $\langle \cdot \rangle$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

Donnons-nous  $n$  indices  $d_1, \dots, d_n$  entiers et formons le produit  $\psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}$  (produit commutatif vu que tous les  $\psi_i$  sont de degré pair). C'est une classe de degré  $2d_1 + \dots + 2d_n$ . Son intégrale, symétrique en les indices  $d_i$ , est notée

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}.$$

On l'appellera *chevron de Witten*<sup>16</sup>. Noter bien que le  $n$  de l'intégrande est le même que le  $n$  du  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  sur lequel on intègre.

Observer qu'il n'y a aucune ambiguïté sur le genre : pour obtenir autre chose que 0, il faut que le degré total  $2(d_1 + \dots + d_n)$  vaille la dimension  $2(3g - 3 + n)$  de l'espace.

Intuitivement, on pourra penser cette intégrale comme le nombre de points d'intersection de  $d_1$  copies de  $\psi_1$  (comprendre : son diviseur associé),  $d_2$  copies de  $\psi_2$ , ...,  $d_n$  copies de  $\psi_n$ , même si ce « nombre » d'intersections peut s'avérer être rationnel.

Par exemple, sur  $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$  qui est de dimension nulle (c'est un point !), le seul chevron non nul est

$$\langle \tau_0^3 \rangle = \langle \tau_0, \tau_0, \tau_0 \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} \psi_1^0 \psi_2^0 \psi_3^0 = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} 1 = 1.$$

### 3.3.4 Relation des cordes et du dilaton, chevrons sphériques et toriques

Comme annoncé, les morphismes d'oubli vont nous permettre d'obtenir des relations de récurrence sur les chevrons de Witten. Les deux principales sont celles dites *des cordes* et *du dilaton*. Leurs noms proviennent de la physique et sont reliés aux modèles topologiques de la gravité (cf. [9]).

La *relation des cordes* s'applique dès que l'un des indices est nul :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_{\underline{0}} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_{i-1}}, \tau_{d_i-1}, \tau_{d_{i+1}}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$$

avec la convention  $\tau_{-1} = 0$ .

La *relation du dilaton*, elle, peut être utilisée si l'un des indices atteint la valeur 1 :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_{\underline{1}} \rangle = (2g - 2 + n) \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle.$$

Ces deux relations n'ont évidemment de sens que pour un couple  $(g, n)$  stable.

Avant d'en donner une démonstration, observer que, en genre nul, la relation des cordes permet, avec la condition initiale  $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$ , de déterminer *tous* les chevrons de Witten : en effet, la condition  $d_1 + \dots + d_n = n - 3$  impose la nullité d'au moins trois des indices  $d_i$ .

#### Proposition.

*Les chevrons sphériques sont donnés par la formule*

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g=0} = \binom{n-3}{d_1, \dots, d_n}.$$

#### Démonstration.

Il suffit de vérifier que la formule ci-dessus satisfait la relation des cordes et la condition initiale (cette dernière étant immédiate). En se donnant  $n + 1$  indices  $d_i$  tels que  $d_1 + \dots + d_n + 0 = n - 2$ , on trouve

$$\sum_{i=1}^n \binom{n-3}{d_1, \dots, d_i-1, \dots, d_n} = \sum_{i=1}^n \frac{(n-3)!}{d_1! \dots d_n!} d_i = \frac{(n-3)!}{d_1! \dots d_n!} \underbrace{\sum_{i=1}^n d_i}_{=n-2} = \binom{n-2}{d_1, \dots, d_n, 0}, \text{ CQFD.}$$

<sup>16</sup>On parle traditionnellement de *crochet*, mais nous préférons appeler un chat un chat.

De même, pour  $g = 1$ , on doit avoir  $d_1 + \dots + d_n = n$ , de sorte qu'au moins un des indices vaut 0 ou 1. Les deux relations ci-dessus permettent ainsi de trouver tous les chevrons toriques, modulo la condition initiale  $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$  (que nous admettrons, cf. [5] page 252 pour une démonstration, ou encore [13] page 21). La formule finale est un peu plus compliquée (mais se montre de la même manière), mettant en jeu les fonctions symétriques élémentaires moyennes des  $d_i$ , qui s'expriment – rappelons-le – par  $p_i = \frac{\sigma_i}{\binom{n}{i}}$ .

**Proposition.**

Les chevrons toriques s'expriment par

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g=1} = \frac{1}{24} \binom{n}{d_1, \dots, d_n} \left( 1 - \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{i(i-1)} \right).$$

**Démonstration.**

On trouve immédiatement la même valeur initiale  $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$ , vu que la somme  $\sum_{i=2}^n$  est réduite à 0.

• La relation des cordes étant linéaire, il suffit de vérifier que chacun des deux termes de l'expression de droite la satisfait. On part de  $n + 1$  indices  $d_1 + \dots + d_n + 0 = n + 1$ . Laissons de côté la constante  $\frac{1}{24}$ .

Le premier terme se comporte comme pour le genre sphérique :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{d_1, \dots, d_k - 1, \dots, d_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^n d_k}_{=n+1} \frac{n!}{d_1! \dots d_n!} = \frac{(n+1)!}{d_1! \dots d_n! 0!}.$$

Quant au second, en posant  $p_i^k = p_i(d_1, \dots, d_k - 1, \dots, d_n)$ , on calcule

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \binom{n}{d_1, \dots, d_k - 1, \dots, d_n} \sum_{i=2}^n \frac{p_i^k}{i(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{n+1} \binom{n+1}{d_1, \dots, d_n, 0} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{p_i^k}{i(i-1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{d_1, \dots, d_n, 0} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i(i-1)} \sum_{k=1}^n d_k p_i^k. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n d_k p_i^k \stackrel{?}{=} p_i(d_1, \dots, d_n, 0) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n d_k \sigma_i^k \frac{i!(n-i)!}{(n+1)n!} \stackrel{?}{=} \frac{i!(n+1-i)!}{(n+1)!} \underbrace{\sigma_i(d_1, \dots, d_n, 0)}_{=\sigma_i} \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n d_k \sigma_i^k \stackrel{?}{=} (n+1-i) \sigma_i. \end{aligned}$$

Partons du terme  $\sigma_i^k$  de gauche :

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= \sum_{k_1 < \dots < k_i} d'_{k_1} \dots d'_{k_i} \text{ avec } \begin{cases} d'_{k_i} = d_k - 1 \\ d'_j = d_j \text{ si } j \neq k \end{cases} \\ &= \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_1, \dots, k_i \neq k}} d_{k_1} \dots d_{k_i} + \sum_{r=1}^i \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} (d_k - 1) d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i} \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_1, \dots, k_i \neq k}} d_{k_1} \dots d_{k_i} + \sum_{r=1}^i \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} d_k d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i}}_{=\sigma_i} - \sum_{r=1}^i \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i}. \end{aligned}$$



Appliquer  $\sum_{k=1}^n d_k$  multiplie le premier terme  $\sigma_i$  par  $n+1$ . Quant au second terme, il se transforme en

$$\sum_{r=1}^i \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} d_k d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i} = \sum_{r=1}^i \sum_{k_1 < \dots < k_i} d_{k_1} \dots d_{k_i} = \sum_{r=1}^i \sigma_i = i \sigma_i, \text{ CQFD.}$$

- Passons à la relation du dilaton. On part de  $n+1$  indices  $d_1 + \dots + d_n + 1 = n+1$ .  
On regarde ce que devient  $\sigma_i$  pour  $i = 2, \dots, n$  lorsque qu'on lui rajoute un indice  $d_{n+1} = 1$  :

$$\begin{aligned} \sigma'_{i+1}(d_1, \dots, d_n, 1) &= \sum_{k_1 < \dots < k_{i+1}} d_{k_1} \dots d_{k_{i+1}} \\ &= \sum_{k_1 < \dots < k_{i+1} \leq n} d_{k_1} \dots d_{k_{i+1}} + \sum_{k_1 < \dots < k_i \leq n} d_{k_1} \dots d_{k_i} d_{n+1} \\ &= \sigma_{i+1}(d_1, \dots, d_n) + \sigma_i(d_1, \dots, d_n) \\ &= \sigma_{i+1} + \sigma_i \end{aligned}$$

avec la convention évidente  $\sigma_{n+1} = 0$ . Passant aux  $p_i$ , il vient

$$p'_{i+1} = \frac{\sigma'_{i+1}}{\binom{n+1}{i+1}} = \frac{\sigma_{i+1} + \sigma_i}{\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}} = \frac{(n-i-1)!(i+1)!}{n!} \frac{n-i}{n+1} \sigma_{i+1} + \frac{(n-i)!i!}{n!} \frac{i+1}{n+1} \sigma_i,$$

*i.e.*

$$(n+1)p'_{i+1} = (n-i)p_{i+1} + (i+1)p_i.$$

On part alors de l'expression de droite (modulo la constante  $\frac{1}{24}$ ) :

$$\binom{n+1}{d_1, \dots, d_n, 1} \left( 1 - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{p'_i}{i(i-1)} \right) = \binom{n}{d_1, \dots, d_n} (n+1) \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{p'_{i+1}}{i(i+1)} \right).$$

On veut faire sortir un facteur  $2-2g+n = n$  après le multinomial. Allons-y :

$$\begin{aligned} (n+1) \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{p'_{i+1}}{i(i+1)} \right) &= (n+1) - \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)p'_{i+1}}{i(i+1)} \\ &= (n+1) - \sum_{i=1}^n \frac{(n-i)p_{i+1} + (i+1)p_i}{i(i+1)} \\ &= n \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{p_{i+1}}{i(i+1)} \right) + 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(i+1)p_i - ip_{i+1}}{i(i+1)}. \end{aligned}$$

Le dernier terme se télescope en

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{i} - \frac{p_{i+1}}{i+1} \right) = p_1 = 1,$$

ce qui permet de conclure.

### Démonstration des relation des cordes et des dilaton.

On part d'un couple stable  $(g, n)$  et du morphisme d'oubli  $\omega : \overline{\mathcal{M}}_{g, n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ . L'idée, pour intégrer sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g, n+1}$ , est de tirer en arrière les classes venant de  $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ . Afin de distinguer les classes de départ ou d'arrivée, on mettra des ' lorsque l'on arrivera dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ . Posons  $\varphi_i := \omega^*(\psi'_i)$ .

$\omega$  identifie les fibrés  $\mathcal{L}_i$  et  $\mathcal{L}'_i$  partout sauf sur le lieu  $D_i$  des courbes contenant une sphère ayant exactement trois points spéciaux – un nœud, le points  $x_i$  et le point  $x_{n+1}$  –, d'où

$$\psi_i = \varphi_i + \Delta_i$$

où  $\Delta_i$  est la classe Poincaré duale associée à  $[D_i]$ . Ceci permet déjà de descendre d'un ordre dans le chevron  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_0 \rangle$  ou  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_1 \rangle$ . Observer que  $\omega(D_i) \simeq \overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ , le point  $i$  étant en correspondance avec la sphère le contenant avec  $n+1$ .

Par ailleurs, la sphère à trois points spéciaux est la même pour toute courbe de  $D_i$  (c'est l'unique élément de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ ), donc les fibrés cotangents  $\mathcal{L}_i$  et  $\mathcal{L}_{n+1}$  y sont constant. En prenant la section constante 1 dont le lieu

des zéros est le même que celui des pôles, on voit que les différences  $\psi_i$  et  $\psi_{n+1}$  sont nulles. Ainsi, si l'on intègre une quelconque classe de cohomologie  $\alpha$  contre le produit  $\psi_i \Delta_i$  ou  $\psi_{n+1} \Delta_i$ , on trouve 0 :

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_i \Delta_i \alpha = \int_{D_i} \psi_i \alpha = \int_{D_i} 0 \alpha = 0.$$

On résumera cette propriété en notant abusivement

$$\psi_i \Delta_i = \Delta_i \psi_{n+1} = 0.$$

De la même façon, les  $D_i$  étant deux à deux disjoints, on peut écrire

$$\Delta_i \Delta_j = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Ces remarques préliminaires étant effectuées, on peut relier les puissances de  $\psi_i$  à celles de sa tirée en arrière :

$$\begin{aligned} \psi_i^d - \varphi_i^d &= (\psi_i - \varphi_i) \cdot (\psi_i^{d-1} + \dots + \varphi_i^{d-1}) \\ &= \Delta_i \cdot (\psi_i^{d-1} + \dots + \varphi_i^{d-1}) \\ &= \Delta_i \cdot \varphi_i^{d-1} \end{aligned}$$

avec la convention  $\varphi_i^{-1} = 0$ . On réécrit en isolant la puissance de  $\psi_i$  :

$$\psi_i^d = \varphi_i^d + \Delta_i \cdot \varphi_i^{d-1}$$

Montrons alors la relation des cordes :

$$\begin{aligned} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_0 \rangle &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\varphi_1^{d_1} + \Delta_1 \varphi_1^{d_1-1}) \dots (\varphi_n^{d_n} + \Delta_n \varphi_n^{d_n-1}) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \varphi_1^{d_1} \dots \varphi_n^{d_n} + \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \varphi_1^{d_1} \dots (\Delta_i \varphi_i^{d_i-1}) \dots \varphi_n^{d_n} \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \omega^* (\psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}) + \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \omega^* (\psi_1^{d_1} \dots \psi_i^{d_i-1} \dots \psi_n^{d_n}) \\ &= \int_{\omega_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1})} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} + \sum_{i=1}^n \int_{\omega_*(D_i)} \psi_1^{d_1} \dots \psi_i^{d_i-1} \dots \psi_n^{d_n}. \end{aligned}$$

La première intégrale, prise sur  $\omega_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}) = [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]$ , s'annule pour des raisons de dimension. Quant à la seconde, le domaine  $\omega_*(D_i)$  est isomorphe à  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , ce qui conclut.

Passons à la relation du dilaton :

$$\begin{aligned} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_1 \rangle &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} \psi_{n+1} \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\varphi_1^{d_1} + \Delta_1 \varphi_1^{d_1-1}) \dots (\varphi_n^{d_n} + \Delta_n \varphi_n^{d_n-1}) \psi_{n+1} \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \varphi_1^{d_1} \dots \varphi_n^{d_n} \psi_{n+1} \text{ (car } \Delta_i \cdot \psi_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus, on se souvient que  $\varphi_i$  sont des tirés-en-arrière de choses sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , ce qui permet d'intégrer  $\psi_{n+1}$  sur les fibres en question. Or, le nombre de zéros d'une 1-forme méromorphe sur une courbe de genre  $g$  à  $n$  points marqués ayant des pôles d'ordre 1 aux moindres marqués est  $2g - 2 + n$ , *CQFD*.

### 3.4 Formule ELSV

La formule ELSV (cf. [3]) explicite les nombres de Hurwitz à l'aide d'intégrales sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  lorsque toutes les valeurs critiques – sauf une – sont simples.

Par commodité, on introduit l'entier

$$g' := g - 1.$$

#### Théorème (ELSV).

On se donne deux entiers  $g$  et  $n$  positifs ainsi qu'une partition  $\mu = d_1 + \dots + d_p$  d'un entier  $\leq n$ . Noter qu'alors nécessairement  $n \geq p + r$ .

Sous la condition de stabilité  $n - r > 2 - 2g$ , on a

$$h_{g,n;\mu} = \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{(2n + 2g' - r)!}{(n - p - r)!} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n-r}} \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - d_1 \psi_1) \dots (1 - d_p \psi_p) (1 - \psi_{p+1}) \dots (1 - \psi_{n-r})}.$$

Si  $\mu$  partitionne complètement  $n$ , i.e. si  $n = p + r$ , le dénominateur de l'intégrande ne comporte qu'un seul bout :

$$h_{g,n;\mu} = \frac{(n + p + 2g')!}{|\text{Aut } \mu|} \prod_{i=1}^p \frac{d_i^{d_i}}{d_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,p}} \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - d_1 \psi_1) \dots (1 - d_p \psi_p)},$$

la condition de stabilité devenant  $p + g' \geq 1$ .

Dans la première expression, la seconde fraction s'interprète bien : le dénominateur complète les parts de notre partition en rajoutant des points critiques d'ordre 1, tandis que le numérateur  $c(n)!$  rajoute des valeurs critiques simples pour trouver le bon genre. La troisième fraction met en jeu le terme  $\frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!}$  déjà connu de Hurwitz.

#### 3.4.1 Genre nul : la formule de Hurwitz

En genre nul, le fibré de Hodge disparaît et l'intégrale se développe pour faire apparaître les chevrons de Witten :

$$h_{0,n;\mu} = \frac{(n + p - 2)!}{|\text{Aut } \mu|} \prod_{i=1}^p \frac{d_i^{d_i}}{d_i!} \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 0} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_p} \rangle d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p}$$

(formule valable pour  $p \geq 3$ ). Le paragraphe précédent nous donne la valeur  $\langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_p} \rangle = \binom{p}{k_1, \dots, k_p}$ . En ne gardant que les indices vérifiant  $k_1 + \dots + k_p = p - 3$ , on en vient finalement à développer  $(d_1 + \dots + d_p)^{p-3}$ . Le résultat obtenu, connu depuis Hurwitz (publié mais non prouvé en 1891), est le suivant.

#### Théorème (Hurwitz).

Soit  $\mu = (d_1, \dots, d_p)$  un partition d'un entier  $n \geq 1$  en  $p \geq 3$  parts. Le nombre de revêtements  $(\mu)$ -marqués à  $n$  feuillets de la sphère par elle-même est (à isomorphisme près, et comptés avec poids  $\frac{1}{|\text{Aut } \mu|}$ )

$$h_{0,n;\mu} = \frac{(n + p - 2)!}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} n^{p-3}.$$

#### Théorème (Hurwitz bis).

La formule précédente reste valable pour  $p \leq 2$ .

#### Démonstration.

Trois cas se distinguent.

- Pour  $p = 0$ , on doit avoir  $n = 0$ , d'où  $h_{0,0;\emptyset} = 1$ . Si l'on comprend le  $(-2)!$  comme un produit de trois 0 se simplifiant avec le  $0^{-3}$ , on retrouve bien 1.

- Pour  $p = 1$ , on obtient la partition  $\mu = (n)$ . Le nombre de valeurs simples supplémentaires vaut alors

$$c(n) = n + p - 2 = n - 1.$$

On cherche donc les  $n$ -constellations de type  $(\gamma, \tau_2, \dots, \tau_n)$  avec  $\gamma$   $n$ -cyle et  $\tau_i$  transposition (modulo un facteur  $\frac{1}{n!}$ ). Laissons de côté le cas  $n = 1$ , pour lequel  $h_{0,1;(1)} = 1$ . C'est le moment de se rappeler un corollaire de la formule de Riemann-Hurwitz énoncé en début de ce mémoire : *si  $k$  permutations  $g_1, \dots, g_k$  de  $\mathfrak{S}_n$  vérifiant  $\sum r(g_i) = n - 1$  engendrent un sous-groupe transitif de  $\mathfrak{S}_n$ , alors le produit  $\prod g_i$ , quel que soit l'ordre de ses facteurs, est un  $n$ -cyle*. Ceci montre que nous cherchons exactement les  $(\tau_2, \dots, \tau_n)$  qui agissent transitivement. Représentons un tel  $(n - 1)$ -uplet par un graphe à  $n$  sommets numérotés et  $n - 1$  arêtes marquées,  $i$  et  $j$  étant reliés si et seulement si la transposition  $(i, j)$  apparaît, l'arête en question étant marquée  $k$  si et seulement si  $\tau_k = (i, j)$ . La condition de transitivité revient à la connexité de notre graphe; comme son  $\chi$  vaut 1, c'est un arbre. On compte par conséquent les arbres de Cayley à  $n$  sommets dont les  $n - 1$  arêtes sont marquées. Il y en a  $n^{n-2} (n - 1)!$ . En tenant compte du facteur  $\frac{1}{n!}$ , on obtient  $n^{n-3}$ .

Or, ce que l'on souhaite avoir, c'est

$$\frac{(n + p - 2)!}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} n^{p-3} = \frac{(n - 1)!}{1} \frac{n^n}{n!} n^{-2} = n^{n-3}, \text{ CQFD.}$$

- Il reste  $p = 2$ . On se donne deux indices  $d \geq 1$  et  $n - d$ . Le nombre  $c(n)$  vaut

$$c(n) = n - p + 2 = n.$$

Ce que l'on souhaite avoir, c'est

$$\frac{(n + p - 2)!}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} n^{p-3} = (n - 1)! \frac{d^d (n - d)^{n-d}}{d! (n - d)!}.$$

Nous renvoyons à [1] pour la démonstration de ce cas qui est beaucoup plus difficile.

### **Théorème (Hurwitz ter).**

*Si  $\mu$  ne partitionne pas entièrement  $n$ , on a quand même la formule suivante :*

$$h_{0,n;\mu} = \frac{(2n - 2 - r)!}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \frac{n^{n-r-3}}{(n - p - r)!}.$$

### **Démonstration.**

On se ramène à une partition de  $n$  en complétant avec des 1. On applique donc le théorème précédent à la partition  $\mu' = (d_1, \dots, d_p, 1, \dots, 1)$ , mais il faudra faire attention lorsque l'on choisira une partie des . Si  $a_1$  désigne le nombre de 1 dans  $\mu$ , alors  $\mu'$  en contient  $a_1 + (n - p - r)$ , d'où la relation

$$h_{0,n;\mu} = \binom{a_1 + n - p - r}{a_1} h_{0,n;\mu'}.$$

Hurwitz bis nous dit alors que

$$h_{0,n;\mu'} = \frac{(n + p' - 2)!}{|\text{Aut } \mu'|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p} 1^1 \dots 1^1}{d_1! \dots d_p! 1! \dots 1!} n^{p'-3},$$

où le nombre  $p'$  de parts vaut

$$p' = p + (n - r - p) = n - r.$$

Il reste à remarquer que  $\frac{|\text{Aut } \mu|}{a_1!} = \frac{|\text{Aut } \mu'|}{(a_1 + n - p - r)!}$ , ce qui donne bien le facteur  $\frac{1}{(n - p - r)!}$  manquant.

### 3.4.2 Revêtements toriques

En genre  $g \geq 1$ , il faut tenir compte des classes de Chern du fibré de Hodge. On est ramené à calculer les intégrales dites *intégrales de Hodge* :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \lambda_i \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} \lambda_i \text{ avec } d_1 + \dots + d_n + i = 3g + n.$$

Noter que la condition de stabilité  $p > 0$  est toujours vérifiée pour une partition non vide.

Ce qui est bien, c'est que les relations des cordes et du dilaton tiennent toujours pour les chevrons  $\langle \cdot, \lambda_i \rangle$  (reprendre la même démonstration), ce qui signifie que pour vérifier la validité d'une formule il suffira de montrer que cette dernière satisfait les deux relations de récurrence et les conditions initiales. Ce qui est moins bien, c'est que l'on sait peu de choses de ces intégrales.

Pour  $i = 0$ , on sait déjà faire ; pour  $i = g$ , le théorème suivant (admis, cf. [10] page 291) permet de traiter entièrement le cas  $g = 1$ .

**Théorème.**

Pour  $d_1 + \dots + d_n = 2g - 3 + n$ , on a

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \lambda_g \rangle = \binom{2g + n - 3}{d_1, \dots, d_n} b_g$$

où  $b_g = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,1}} \psi_1^{2g-2} \lambda_g$  est une constante valant

$$b_g = \left( 1 - \frac{1}{2^{2g-1}} \right) \frac{|B_{2g}|}{(2g)!}.$$

**Corollaire.**

Soit  $\mu = (d_1, \dots, d_p)$  une partition d'un entier  $n \geq 1$  en  $p \geq 1$  parts. Le nombre de revêtements  $(\mu)$ -marqués à  $n$  feuillettes de la sphère par un tore est (à isomorphisme près, et comptés avec poids  $\frac{1}{|\text{Aut}|}$ )

$$h_{1,n;\mu} = \frac{1}{24} \frac{(n+p)!}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \left( n^p - n^{p-1} - \sum_{i=2}^p (i-2)! \sigma_i n^{p-i} \right).$$

**Démonstration du corollaire.**

On part de ELSV en genre 1 :

$$h_{1,n;\mu} = \frac{(n+p)!}{|\text{Aut } \mu|} \prod_{i=1}^p \frac{d_i^{d_i}}{d_i!} \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 0} (\langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_p} \rangle - \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_p}, \lambda_1 \rangle) d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p}.$$

Dans le second terme, on applique le théorème précédent, on somme pour  $k_1 + \dots + k_p = p-1$ , et on observe que la constante  $b_1$  dans le théorème vaut  $\frac{1}{24}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 + \dots + k_p = p-1} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_p}, \lambda_1 \rangle d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} &= \sum_{k_1 + \dots + k_p = p-1} \binom{p-1}{k_1, \dots, k_p} \frac{1}{24} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \\ &= \frac{1}{24} (d_1 + \dots + d_p)^{p-1}; \end{aligned}$$

voilà le terme  $-n^{p-1}$  dans la formule finale.

Quant au premier terme (dans ELSV), on doit sommer sur  $k_1 + \dots + k_p = p$  et on utilise la formule des chevrons toriques :

$$\sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_p} \rangle d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} = \sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \frac{1}{24} \binom{p}{k_1, \dots, k_p} \left( 1 - \sum_{i=2}^p \frac{p_i \binom{\vec{k}}{i}}{i(i-1)} \right) d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p}.$$

Le premier terme revient à développer  $(d_1 + \dots + d_p)^p = n^p$ . Regardons de plus près les autres :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \binom{p}{k_1, \dots, k_p} \sum_{i=2}^p \frac{p_i(\vec{k})}{i(i-1)} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \\
&= \sum_{i=2}^p \frac{1}{i(i-1)} \sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \binom{p}{k_1, \dots, k_p} p_i(\vec{k}) \cdot d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \\
&\stackrel{?}{=} \sum_{i=2}^p (i-2)! \sigma_i(\vec{d}) n^{p-i}.
\end{aligned}$$

En raisonnant à  $i$  fixé, on aimerait bien avoir

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \binom{p}{k_1, \dots, k_p} p_i(\vec{k}) \cdot d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} &\stackrel{?}{=} i(i-1)(i-2)! \binom{p}{i} p_i(\vec{d}) n^{p-i} \\
&\stackrel{?}{=} \frac{p!}{(p-i)!} p_i(\vec{d}) n^{p-i}, \text{ i.e. (modulo un facteur } \binom{p}{i} \text{)} \\
\sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \binom{p}{k_1, \dots, k_p} \sigma_i(\vec{k}) \cdot d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} &\stackrel{?}{=} \frac{p!}{(p-i)!} \sigma_i(\vec{d}) n^{p-i}.
\end{aligned}$$

On reconnaît à droite  $(d_1 + \dots + d_p)^{p-i}$  : en développant et en rajoutant les  $i$  autres facteurs venant de  $\sigma_i$ , on devrait retomber sur nos pieds. On y va :

$$\begin{aligned}
\frac{p!}{(p-i)!} \sigma_i(\vec{d}) n^{p-i} &= \frac{p!}{(p-i)!} \sigma_i(\vec{d}) (d_1 + \dots + d_p)^{p-i} \\
&= \frac{p!}{(p-i)!} \sum_{r_1 < \dots < r_i} d_{r_1} \dots d_{r_i} \sum_{l_1 + \dots + l_p = p-i} \binom{p-i}{l_1, \dots, l_p} d_1^{l_1} \dots d_p^{l_p} \\
&= \sum_{r_1 < \dots < r_i} \sum_{l_1 + \dots + l_p = p-i} \frac{p!}{l_1! \dots l_p!} d_{r_1} \dots d_{r_i} d_1^{l_1} \dots d_p^{l_p}.
\end{aligned}$$

À  $r_1 < \dots < r_i$  fixé, on réindexe la seconde somme par  $k_j = l_j + 1$  pour  $j = r_1, \dots, r_i$  et  $k_j = l_j$  sinon, ce qui permet de conclure :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r_1 < \dots < r_i} \sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \frac{p!}{k_1! \dots k_p!} k_{r_1} \dots k_{r_i} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \\
&= \sum_{k_1 + \dots + k_p = p} \underbrace{\left( \sum_{r_1 < \dots < r_i} k_{r_1} \dots k_{r_i} \right)}_{=\sigma_i(\vec{k})} \binom{p}{k_1, \dots, k_p} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p}, \text{ CQFD.}
\end{aligned}$$

La généralisation à une partition de somme  $< n$  semble relever de calculs fastidieux sans aboutir à une formule satisfaisante.

## 4 Une algèbre remarquable : $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} q^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} q^n \right]$

Suivant l'article [3] de D. Zvonkine, nous expliquons ici l'importance de l'algèbre de séries formelles

$$\mathcal{A} := \mathbb{Q} \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} q^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} q^n \right]$$

dans le problème de Hurwitz. La découverte de cette algèbre semble due à D. Zagier.

Essentiellement, on montre (au paragraphe 4.3.3) à partir d'ELSV que la série génératrice suivante habite dans  $\mathcal{A}$  :

$$H_{g;\mu_1, \dots, \mu_k} := \sum_{n \geq 1} \frac{h_{g,n;\mu_1, \dots, \mu_k}}{c(n)!} q^n$$

où  $c(n) = 2n + 2g' - r$  désigne le nombre de valeurs simples supplémentaires. Le point clef de cette section est un détour par la combinatoire des arbres de Cayley fournissant une très jolie interprétation « arborescente » des relations des cordes et du dilaton (*cf.* section 4.2).

Nous terminerons ce mémoire en exposant quelques corollaires d'un théorème de Kazarian (*cf.* section 4.4). En particulier, l'asymptotique des nombres de Hurwitz  $h_{g,n;\emptyset}$  se récolte au fruit du travail étudiant l'asymptotique dans  $\mathcal{A}$  du paragraphe 4.1.3.

### 4.1 Calculs dans $\mathcal{A}$

#### 4.1.1 Identités basiques

Rappelons qu'un *arbre de Cayley* est un arbre dont les  $n$  sommets sont numérotés de 1 à  $n$ . C'est un fait classique qu'il y a  $n^{n-2}$  arbres de Cayley à  $n$  sommets<sup>17</sup>. La série génératrice exponentielle associée vaut donc  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^{n-2}}{n!} q^n$ . Pour retomber sur les générateurs de  $\mathcal{A}$ , que nous appellerons

$$Y := \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} q^n \text{ et } Z := \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} q^n,$$

il suffit compter les arbres de Cayley possédant un ou deux sommets marqués : on parle d'*arbres enracinés*. On déduit de cette description l'égalité

$$Y = qe^Y.$$

En effet,  $Y$  est la série génératrice exponentielle pour les arbres de Cayley enracinés, donc  $e^Y$  est la série génératrice exponentielle pour les forêts de tels arbres. Rajoutons un nouveau sommet à notre forêt et relierons-le aux racines des arbres de cette dernière. On retombe sur un arbre enraciné. La correspondance étant clairement biunivoque, on a montré l'identité.

On remarquera que les coefficients de  $Z$  s'obtiennent à partir de ceux de  $Y$  par multiplication par  $n$ , *i.e.* en appliquant l'opérateur différentiel

$$D := q \frac{\partial}{\partial q} : (a_n) \mapsto (na_n),$$

Cela permet d'écrire

$$Z = DY.$$

En remplaçant  $Y$  par  $qe^Y$ , on obtient

$$Z = D(qe^Y) = q \cdot e^Y + q \cdot e^Y (DY) = Y(1 + Z),$$

ce qui permet de linéariser le produit

$$YZ = Z - Y.$$

<sup>17</sup>En marquant deux sommets, il s'agit de mettre en bijection ces arbres avec les applications de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Pour ce faire, Joyal associe à une telle application  $f$  une partie  $E$  maximale où  $f$  est bijective (il suffit de rechercher des cycles). En écrivant  $E = (a_0 < \dots < a_p)$  et  $f(E) = (a_{\sigma(0)}, \dots, a_{\sigma(p)})$ , on range les  $a_{\sigma(i)}$  sur une ligne, puis on relie les autres nombres en itérant  $f$ .

Cette dernière égalité permet de se débarrasser des « termes croisés » d'une série de  $\mathcal{A}$ ; en d'autres termes :

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}[Y] + \mathbb{Q}[Z].$$

Ainsi, pour calculer dans  $\mathcal{A}$ , il suffit de s'intéresser aux puissances de  $Y$  et  $Z$ .

On remarquera au passage que la relation  $YZ = Z - Y$  se réécrit  $(1 - Y)(1 + Z) = 1$ , ce qui montre que l'algèbre  $\mathcal{A}$  est formellement isomorphe à  $\mathbb{Q}[X, X^{-1}]$  avec  $X = 1 + Z$ .

#### 4.1.2 Calcul des puissances des générateurs

**Proposition.**

Les puissances de  $Y$  sont données par la formule

$$Y^k = k \sum_{n \geq k} \frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} q^n.$$

L'algèbre engendrée par  $Y$  s'exprime par

$$\mathbb{Q}[Y] = \sum_{l \leq -1} \mathbb{Q} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+l}}{n!} q^n \right).$$

**Démonstration.**

Par récurrence sur  $k \geq 1$ , le cas  $k = 1$  étant clair. On part de la relation

$$D \left( \frac{Y^{k+1}}{k+1} - \frac{Y^k}{k} \right) = (Y^k - Y^{k-1}) DY = Y^{k-1} (Y - 1) Z = -Y^k$$

qui détermine toutes les puissances  $Y^k$  puisque leur terme constant est nul. Il s'agit donc de vérifier si l'expression cherchée vérifie la même relation :

$$\begin{aligned} & D \left[ \left( \sum_{n > k} \frac{n^{n-k-2}}{(n-k-1)!} q^n \right) - \left( \sum_{n \geq k} \frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} q^n \right) \right] \\ &= D \left[ \sum_{n \geq k} \left( (n-k) - n \right) \frac{n^{n-k-2}}{(n-k)!} q^n \right] \\ &= -k \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} q^n, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

En réécrivant le coefficient  $\frac{k}{(n-k)!} n^{n-k-1}$  comme  $kn(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \frac{n^{n-k-1}}{n!}$ , i.e. comme  $\frac{n^{n-k-1}}{n!}$  par un polynôme en  $n$  de degré  $k$ , on voit que  $Y^k$  est linéairement engendrée par les  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-l}}{n!} q^n$  où  $l \leq -1$ , d'où la seconde égalité.

On peut à présent s'intéresser aux puissances de  $Z$ . À notre connaissance, il n'y a pas de formule explicite pour ces dernières. On peut cependant les exprimer comme combinaisons linéaires des séries  $Z, Z^2$ , ainsi que de leur dérivées. Il convient donc d'isoler le coefficient de  $Z^2 = \sum \frac{A_n}{n!} q^n$ ; nous le noterons

$$A_n := \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 1}} \frac{n!}{p!q!} p^p q^q.$$

**Proposition.**



Pour tout entier  $k \geq 0$ , les séries  $D^k Z$  et  $D^k Z^2$  sont des polynômes en  $Z$  à coefficients entiers strictement positif. Leurs degrés et coefficients dominants apparaissent ci-dessous :

$$\begin{aligned} D^k Z &= (2k-1)!! Z^{2k+1} + o(Z^{2k+1}), \\ D^k Z^2 &= (2k)!! Z^{2k+2} + o(Z^{2k+2}). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $Z^k$  est combinaison linéaire des  $k$  premiers termes de la liste  $(Z, DZ, Z^2, DZ^2, Z^3, DZ^3, \dots)$ , avec poids  $\frac{1}{(k-2)!!}$  pour le  $k$ -ième terme (et poids 1 pour  $k = 1, 2$ ).

**Démonstration.**

On raisonne par récurrence. Pour trouver  $DZ$  et  $DZ^2$ , on applique  $D$  à l'équation  $Z - Y = YZ$  :

$$\begin{aligned} DZ - Z &= Y DZ + Z^2, \\ DZ &= \frac{Z(1+Z)}{1-Y} = Z(1+Z)^2, \text{ d'où} \\ DZ^2 &= 2Z DZ = 2Z^2(1+Z)^2. \end{aligned}$$

Pour aller plus loin, on regarde ce qui se passe lorsqu'on applique  $D$  à un polynôme en  $Z$  :

$$D \left( \sum_{i \geq 0} a_i Z^i \right) = \sum_{i \geq 1} a_i i Z^{i-1} DZ = \sum_{i \geq 1} a_i i Z^i (1+Z^2) ;$$

le degré se trouve augmenté de 2 et le coefficient dominant multiplié par le degré. Ainsi, pour  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,  $D^k Z$  est un polynôme en  $Z$  de degré 3, 5, 7, 9, ..., de coefficient dominant 1!!, 3!!, 5!!, 7!!, ..., tandis que  $D^k Z^2$  est de degré 4, 6, 8, 10, ... et de coefficient dominant 2!!, 4!!, 6!!, 8!!, .... Ceci conduit aux expressions de  $D^k Z$  et  $D^k Z^2$  données.

La relation trouvée relie matriciellement la suite  $(Z, Z^2, DZ, DZ^2, D^2 Z, D^2 Z^2, \dots)$  à celle des puissances de  $Z$ . La matrice est triangulaire supérieure de diagonale  $(1, 1, 1!!, 2!!, 3!!, 4!!, 5!!, \dots)$ , donc s'inverse, d'où le fait annoncé.

En explicitant les termes  $D^k Z$  et  $D^k Z^2$  de la liste décrivant les puissances de  $Z$ , *i.e.* en écrivant

$$\begin{aligned} D^k Z &= \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+k}}{n!} q^n, \\ D^k Z^2 &= \sum_{n \geq 1} \frac{n^k A_n}{n!} q^n, \end{aligned}$$

on peut décrire l'algèbre des polynômes en  $Z$  :

$$\mathbb{Q}[Z] = \sum_{l \geq 0} \mathbb{Q} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+l}}{n!} q^n \right) + \sum_{l' \geq 0} \mathbb{Q} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{n^{l'} A_n}{n!} q^n \right).$$

En incorporant la description de  $\mathbb{Q}[Y]$ , on voit que l'algèbre  $\mathcal{A}$  est linéairement engendrée par les séries suivantes :

- la série constante 1,
- les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+k}}{n!} q^n$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^k A_n}{n!} q^n$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

En d'autres termes, toute série de  $\mathcal{A}$  s'écrit sous la forme

$$const + \sum_{n \geq 1} \frac{L(n) n^n + P(n) A_n}{n!} q^n$$

où  $L$  un polynôme de Laurent et  $P$  un polynôme tout simple.

Un corollaire de cette description, qui nous servira pour conclure la démonstration du théorème central (cf. paragraphe 4.3.3) est la stabilité de l'algèbre  $\mathcal{A}$  par la dérivation selon l'opérateur  $D$ .

De manière plus exotique, on peut décrire le terme général des puissances de  $Z$ , en faisant appel à la *hauteur*  $h(T)$  d'un arbre 2-enraciné  $T$ , définie comme la distance entre ses deux racines ( $T$  comme « tree »).

**Proposition.**

*Posons*

$$p_{n,k} := \sum_T \binom{h(T)}{k}$$

où la somme décrit les arbres de Cayley  $T$  à  $n$  sommets 2-enracinés. On a alors

$$Z^{k+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{p_{n,k}}{n!} q^n.$$

**Démonstration.**

Le terme de gauche compte les forêts numérotées de  $k + 1$  arbres 2-enracinés, tandis que celui de droite dénombre les arbres 2-enracinés où l'on a marqué  $k$  arêtes sur le chemin direct entre les racines. Pour voir la correspondance, on prend une forêt de  $k + 1$  arbres dont les racines sont notées  $a_i$  et  $b_i$  et on trace les arêtes  $b_1 a_2, b_2 a_3, \dots, b_k a_{k+1}$ . On obtient un arbre enraciné en  $a = a_1$  et  $b = b_k$  avec  $k$  arêtes marquées sur le plus court chemin de  $a$  à  $b$ . C'est une bijection, *CQFD*.

On en déduit, faisant  $k = 1$ , une nouvelle expression du coefficient  $A_n$  :

$$A_n = \sum_T h(T).$$

Cette dernière quantité est appelée *hauteur totale* des arbres de Cayley.

### 4.1.3 Asymptotique dans $\mathcal{A}$

Nous savons que toute série dans  $\mathcal{A}$  s'écrit comme un polynôme en  $Y$  plus un polynôme en  $Z$ . Nous allons voir que, du point de vue de l'asymptotique du terme général, seul la partie en  $Z$  compte, et – mieux – seule le terme dominant en  $Z$  compte.

**Proposition.**

*L'asymptotique du terme général de  $Y^k$  est*

$$\frac{k}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{n\sqrt{n}}.$$

**Démonstration.**

le terme général de  $\frac{Y^k}{k}$  est équivalent à

$$\frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k} n^{n-k-1} = \frac{k!}{n^k} \binom{n}{k} \cdot \frac{n^{n-1}}{n!} \sim 1 \cdot \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{n\sqrt{n}}.$$

Ainsi, le terme général de tout polynôme en  $Y$  est négligeable devant  $\frac{e^n}{n}$ . Comme nous le verrons, le comportement du terme général de  $Z^k$  est en  $\frac{e^n}{n} n^{\frac{k}{n}}$ , ce qui montre que la partie en  $Y$  est inutile pour déterminer l'asymptotique.

D'autre part, la formule  $YZ = Z - Y$  montre que multiplier un polynôme en  $Z$  par un polynôme  $Y$  ne change pas l'asymptotique de ce dernier.

Afin de déterminer l'asymptotique des polynômes en  $Z$ , on commence par un lemme décrivant le cas de  $Z^2$ .

**Lemme.**

Le coefficient  $A_n$  s'écrit sous la forme

$$\frac{A_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n^i}{i!} \sim \frac{e^n}{2}.$$

**Démonstration.**

On introduit la série génératrice du terme de droite et on se souvient de l'expression des puissances de  $Y$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{i=2}^n \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \right) q^n &= \sum_{i \geq 2} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} q^n = D \left( \sum_{i \geq 2} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-i-1}}{(n-i)!} q^n \right) = D \left( \sum_{i \geq 2} \frac{Y^i}{i} \right) \\ &= D(-\ln(1-Y) - Y) = \frac{DY}{1-Y} - DY = Z((1+Z) - 1) = Z^2 \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{n!} q^n. \end{aligned}$$

L'équivalent est laissé à titre d'exercice.

**Corollaire.**

Les termes généraux de la suite  $(Z, Z^2, DZ, DZ^2, D^2Z, D^2Z^2, \dots)$  forment une échelle de comparaison suivant les puissances de  $\sqrt{n}$ , modulo un facteur  $\frac{e^n}{\sqrt{n}}$ .

**Démonstration.**

La suite comporte deux sortes de termes : les dérivées de  $Z$  et celles de  $Z^2$ . Regardons :

$$\begin{aligned} [D^k Z]_n &= \frac{n^{n+k}}{n!} \sim \frac{n^{n+k}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} n^k, \\ [D^k Z^2]_n &= \frac{n^k A_n}{n!} \sim n^k \frac{e^n}{2}. \end{aligned}$$

Modulo  $\frac{e^n}{\sqrt{n}}$ , on obtient les asymptotiques

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{n}{\sqrt{2\pi}}, \frac{n\sqrt{n}}{2}, \dots, \text{CQFD.}$$

**Proposition.**

Le terme général de  $Z^l$  croît comme

$$C_l \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^{-l} \text{ où } C_l \text{ est une constante valant } C_l = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right) 2^{\frac{l}{2}}}.$$

**Démonstration.**

Le paragraphe précédent nous dit que

$$\begin{aligned} Z^{2k+1} &= \frac{1}{(2k-1)!!} D^k Z + \text{termes d'ordre plus bas,} \\ Z^{2k+2} &= \frac{1}{(2k)!!} D^k Z^2 + \text{termes d'ordre plus bas,} \end{aligned}$$

et le corollaire précédent permet de négliger les termes d'ordre plus bas pour étudier l'asymptotique. On comprend ainsi pourquoi l'on retombe sur une asymptotique échelonnée en  $\sqrt{n}^{-l}$ , modulo une constante en  $l$  que nous allons déterminer. Il est bon pour ce faire d'explicitier  $\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)$  pour  $l = 2k+1$  impair en utilisant  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  :

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \dots \left(k - \frac{2k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}.$$

Reprenons l'asymptotique. Pour une puissance  $l = 2k + 1$  impaire, on regarde

$$[Z^{2k+1}]_n \sim \frac{1}{(2k-1)!!} [D^k Z]_n \sim \frac{1}{(2k-1)!!} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} n^k = \frac{n^k e^n}{\Gamma(k + \frac{1}{2}) 2^k \sqrt{2n}} = \frac{n^{\frac{1}{2}-1} e^n}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}}}, \text{ CQFD.}$$

Pour une puissance paire  $l = 2k + 2$ , on regarde

$$[Z^{2k+2}]_n \sim \frac{1}{(2k)!!} [D^k Z^2]_n = \frac{1}{2^k k!} \frac{n^k A_n}{n!} \sim \frac{n^k}{\Gamma(k+1)!} \frac{e^n}{2} = \frac{n^{\frac{1}{2}-1} e^n}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}}}, \text{ CQFD.}$$

Nous pouvons donc déterminer l'asymptotique de n'importe quelle série de  $\mathcal{A}$ , pourvu que l'on sache la décomposer selon les générateurs  $Y$  et  $Z$ . Mieux : si on l'on connaît à l'avance les degrés en  $Y$  et  $Z$  de notre série, il suffit d'un nombre fini de ses termes pour reconstituer les coefficients du polynôme qui la détermine. On en déduit le fait remarquable : les premiers termes d'une série de  $\mathcal{A}$  fixent son asymptotique !

## 4.2 Chevrons $\langle \cdot \rangle$ sur les graphes simples

Un *chevron*  $\langle \cdot \rangle$  est une application qui à une suite finie  $(d_1, \dots, d_n)$  d'entiers positifs associe un rationnel  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$ . Nous avons déjà vu les chevrons de Witten, lesquels vérifient la relation des cordes et la relation du dilaton. Nous allons interpréter ces deux relations comme des opérations sur des graphes numérotés. Les sommets considérés seront de degré  $d_i + 1$ . La relation des cordes nous permettra de tuer une feuille (sommets de degré 1) tout en décrémentant le degré du sommet auquel elle est attachée, tandis que la relation du dilaton va effacer un sommet de degré 2 en fusionnant les deux arêtes incidentes. Nous allons nous arranger pour que nos graphes aient  $2g' + n$  arêtes afin de prendre en compte le facteur  $2g' + n$  de la relation du dilaton. Le fait remarquable est que ces chevrons « graphiques » vont engendrer n'importe quel chevron vérifiant la relation des cordes et la relation du dilaton, *a fortiori* ceux de Witten. Comme certaines séries génératrices exponentielles associées à ces chevrons vont se trouver dans notre algèbre  $\mathcal{A}$ , on va pouvoir dire des choses sur l'asymptotique des nombres de Hurwitz en faisant appel à ELSV.

### 4.2.1 Graphes décorés et graphes simples

Tous les graphes considérés seront non orientés, non nécessairement connexes. Les arêtes multiples et les boucles sont autorisées.

#### Définition.

L'opération (C) consiste à effacer une feuille et son arête adjacente (C comme « corde »)

L'opération (D) consiste à effacer, si ses deux arêtes adjacentes sont distinctes, un sommet de degré deux et à fusionner ces dernières (D comme « dilaton »).

Concrètement, (C) permet de tuer les arbres, tandis que (D) permet d'effacer les sommets qui traînent sur une « longue » arête :

$$\bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet.$$

La restriction pour appliquer (D) empêche de détruire une boucle isolée :

$$\bullet \circlearrowleft.$$

Nous allons maintenant appliquer les opérations (C) et (D) à une famille particulière de graphes.

#### Définition.

Un *graphe n-décoré* est un graphe à  $n + 1$  sommets, un étiqueté  $*$  et les autres numérotés de 1 à  $n$ .

La simplification d'un graphe décoré  $G$  est le graphe  $S$  obtenu en appliquant les opérations (C) et (D) autant de fois que possible sans toucher ni au sommet  $*$  ni à son degré. Les sommets de  $S$  ne sont plus numérotés. On dira aussi que  $G$  est une extension de  $S$  (ou *n-extension* si  $G$  est *n-décoré*).

Une symétrie ou automorphisme d'un graphe décoré est une permutation des demi-arêtes incidentes à chaque sommet qui ne casse pas les arêtes. On note  $\text{Aut } G$  le groupe de symétrie d'un graphe décoré  $G$ . Si l'on connaît les multiplicités  $m(a)$  des arêtes de  $G$ , on a

$$|\text{Aut } G| = \prod_{a \text{ arête}} m(a)!$$

Il est utile de remarquer que, pour simplifier un graphe décoré, on peut d'abord tuer tous les arbres, puis éliminer les éventuels sommets traînant sur des « longues » arêtes (inutile d'appliquer  $(D)$  à l'intérieur d'un arbre voué à l'extinction). Ceci permet de décrire les extensions d'un graphe insimplifiable : on plante un arbre au pied de chaque sommet (sauf  $*$ ), et on enrachine des arbres le long de chaque arête.

Pour définir nos nouveaux chevrons, nous allons justement compter les extensions de graphes dits *simples*, au sens où nous ne pourrions plus leur appliquer l'opération  $(C)$  ou  $(D)$ .

**Définition.**

Un graphe simple est un graphe possédant un sommet marqué  $*$  de degré quelconque, ainsi que plusieurs autres sommets chacun de degré  $\geq 3$ .

On se donne un entier  $g \geq 2$ . Pour  $S$  graphe simple de caractéristique d'Euler<sup>18</sup>  $3 - 2g$  on définit le  $S$ -chevron par le nombre  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_S$  de  $n$ -extensions de  $S$  telles que le sommet  $i$  soit de degré  $d_i + 1$ , comptées avec poids  $\frac{1}{|\text{Aut}|}$ .

**Proposition.**

Les  $S$ -chevrons satisfont la relation des cordes et la relation du dilaton.

**Démonstration.**

*Relation des cordes.* Supposons  $d_{n+1} = 0$ . Si l'on prend une extension de  $S$  comptée par le  $S$ -chevron, son sommet  $n + 1$  sera de degré 1. Il ne peut être relié au sommet  $*$ , sinon il serait préservé par les opérations  $(C)$  et  $(D)$ , donc ferait partie de  $S$  et serait de degré  $\geq 3$ , ce qui est absurde. Le sommet  $n + 1$  est donc relié à un sommet  $i$  et l'on peut le simplifier. Cette opération  $(C)$  est clairement une bijection entre les extensions comptées par  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_0 \rangle_S$  et les extensions (toutes distinctes!) comptées par les  $n$  chevrons  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_i-1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_S$ . Passer au cardinal fournit la relation des cordes. On n'oubliera pas de vérifier que les poids sont les bons : rajouter une feuille ne change pas le nombre de symétries.

*Relation du dilaton.* Supposons  $d_{n+1} = 1$ . Comme ci-dessus, le sommet  $n + 1$  d'une extension comptée par  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_1 \rangle_S$  est de degré 2. Ce n'est pas une boucle, sinon elle serait préservée par les opérations  $(C)$  et  $(D)$  et donnerait un sommet de  $S$  de degré  $< 3$ . On peut donc appliquer  $(D)$ , ce qui fournit une surjection des extensions comptées par  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_1 \rangle_S$  sur celles de  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_S$  à condition de marquer l'arête (simple) fusionnée. Le défaut d'injectivité vient du fait que, si  $a$  est une arête multiple de degré  $k$ , il y a  $k$  façon de marquer une arête (simple) sur  $a$ . C'est là que vont intervenir nos poids<sup>19</sup> : là où notre arête multiple contribuait d'un facteur  $k!$  aux symétries, sa contribution n'est plus que de  $(k - 1)!$ . En comptant, on retrouve bien le facteur  $\frac{1}{k} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{k!}$ . Il reste à compter le nombre d'arêtes de nos extensions, et c'est le moment de comprendre pourquoi  $\chi(S)$  vaut  $3 - 2g$  :  $\chi$  est invariante par  $(D)$ , donc toutes les extensions ont même  $\chi = 3 - 2g$ . Le nombre d'arêtes d'une  $n$ -extension est ainsi donné par

$$(n + 1) - \chi = 2g - 2 + n.$$

### 4.2.2 Représentation des chevrons de genre $g$

**Définition.**

Soit  $\langle \cdot \rangle$  un chevron satisfaisant la relation des cordes et la relation du dilaton.

Le genre du chevron est le nombre  $g$  apparaissant dans la relation du dilaton.

Le chevron est dit de degré pur  $b$  s'il s'annule à moins que  $b + \sum d_i = 3g - 3 + n$ , i.e. si

$$b + \sum (d_i - 1) = 3g'.$$

<sup>18</sup>On rappelle que la caractéristique d'Euler d'un graphe est la somme  $\chi := S - A$  où  $S$  est le nombre de sommets et  $A$  le nombre d'arêtes.

<sup>19</sup>Ils ne sont d'ailleurs là que pour ça.

Le chevron est dit de degré positif s'il est combinaison linéaire de chevrons à degré pur positif.

Prenons les chevrons de Witten pour éclairer la terminologie. Si on se donne  $\beta$  une classe de cohomologie de degré  $2b$ , le chevron  $\langle \beta, \dots \rangle$  est de degré pur  $b$  (se souvenir que  $3g' + n$  représente la dimension de  $\overline{M}_{g,n}$ ). Si  $\beta$  est une classe quelconque, disons  $\beta = \sum \beta_i$  où chaque  $\beta_i$  est de degré pur, alors  $\langle \beta, \dots \rangle$  reste de degré positif comme somme des chevrons  $\langle \beta_i, \dots \rangle$ .

**Théorème.**

Soit  $\langle \cdot \rangle$  un chevron invariant par permutation de ses variables, qui vérifie la relation des cordes et la relation du dilaton pour un genre  $g \geq 2$ , et qui est de degré positif. Alors il existe des graphes simples  $S_1, \dots, S_k$  tels que  $\langle \cdot \rangle$  soit combinaison linéaire des chevrons  $\langle \cdot \rangle_{S_1}, \dots, \langle \cdot \rangle_{S_k}$ .

**Lemme.**

On se donne  $g' \geq 1$ ,  $b \geq 0$  et  $n$  entiers  $d_i \geq 2$  liés par la relation

$$b + \sum (d_i - 1) = 3g'.$$

Alors il existe un graphe simple  $S$  connexe à  $n + 1$  sommets de degré  $d_i + 1$  tel que  $\chi(S) = 3 - 2g$ .

**Démonstration du lemme.**

La condition sur  $\chi$  se réécrit

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A} &= 2|\text{sommets}| - 2\chi \\ \sum \text{deg} &= 2(n + 1) - 2(3 - 2g) \\ \sum (d_i + 1) + \text{deg} (*) &= 2(n + 1) - 2(1 - 2g') \\ (3g' - b + 2n) + \text{deg} (*) &= 2n + 4g' \\ \text{deg} (*) &= b + g'. \end{aligned}$$

On procède par récurrence sur la somme des  $d_i$ .

Si tous les  $d_i$  valent 2, la relation de liaison devient  $b + n = 3g'$ , de sorte que le sommet étoilé est de degré

$$b + g' = 4g' - n.$$

On raisonne alors par récurrence descendante sur  $n \leq 3g'$ . Pour  $n = 3g'$ , on veut  $\text{deg} (*) = g'$ . On regroupe les  $3g'$  sommets par paquets de trois comme suit, en reliant chacun des  $g'$  paquets au sommet  $*$  :

$$* \longleftrightarrow \bullet \iff \bullet \longleftrightarrow \bullet \cup .$$

Pour descendre d'un cran, il s'agit de tuer un sommet tout en incrémentant le degré de  $*$ . La seule subtilité est de le faire tout restant connexe. Prenons un sommet au hasard autre que  $*$ . S'il est bouclé, *i.e.* avec une seule arête vers le reste du graphe, on le fait sauter et on relie l'arête balante au  $*$ . S'il est étoilé, par connexité l'une de ses arêtes incidentes est reliée à  $*$ , mettons  $a$ ; en appelant  $b$  et  $c$  les deux autres arêtes, on tue notre sommet, on fusionne les arêtes  $a$  et  $b$  tandis que l'on relie l'arête  $c$  au sommet  $*$ , ce qui a le bon goût de préserver la connexité de notre graphe.

Supposons à présent que l'un des  $d_i$ , disons  $d_1$ , soit  $\geq 3$ . On le décrémente dans la relation de liaison afin de pouvoir récurre. En posant  $d'_i = d_i$  sauf pour  $d'_1 = d_1 - 1$ , on obtient

$$(b + 1) + \sum (d'_i - 1) = 3g'.$$

Par hypothèse de récurrence, on dispose d'un graphe simple connexe tel que  $\text{deg}(1) = d_1$  et  $\text{deg} (*) = b + 1 + g'$ . Pour rééquilibrer les degrés, on va décrocher une arête incidente à  $*$  pour l'envoyer sur 1, sans oublier de rester connexe. Si  $*$  comporte une boucle, c'est gagné. Dans le cas contraire, le sommet  $i$  est relié à  $*$  par connexité selon un chemin qui comporte une arête  $a$  incidente à  $*$ . Puisque  $*$  est de degré  $b + 1 + g' \geq 2$ , on peut décrocher une autre arête que  $a$ , ce qui permet de conserver la connexité.

**Démonstration du théorème.**

Il suffit de montrer le résultat pour un chevron de degré pur  $b$ . L'idée est de regarder les familles  $(d_1, \dots, d_n)$  d'indices pour lesquelles la valeur  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$ , non nulle, ne peut pas se simplifier à l'aide de la relation des

cordes ou de la relation des cordes. Une telle famille vérifie  $d_i \geq 2$  pour tout  $i$ ; la relation  $b + \sum (d_i - 1) = 3g'$  permet alors de majorer  $n$  par  $3g'$ , et comme les  $d_i$  sont tous majorés par  $\sum (d_i - 1) + 1 \leq 3g' + 1$ , le nombre de familles que l'on regarde est **fini**. Ces familles seront dites *familles initiales*, les valeurs associées *valeurs initiales*. Elles déterminent entièrement notre chevron, modulo la relation des cordes et la relation du dilaton.

Considérons une famille initiale  $f = (d_1, \dots, d_n)$  avec  $d_i \geq 2$  pour tout  $i$ . On lui associe par le lemme un graphe simple  $S_f$  de caractéristique d'Euler  $3 - 2g$  avec  $n$  sommets de degré  $d_i + 1$ . On affirme alors que notre chevron peut être représenté par la combinaison suivante

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{f \text{ famille initiale}} \langle f \rangle |\text{Aut } S_f| \langle \cdot \rangle_{S_f} .$$

Puisque les deux termes de l'égalité satisfont la relation des cordes et la relation du dilaton, il suffit de vérifier qu'ils ont mêmes valeurs initiales. Pour ce faire, il suffit de montrer l'identité

$$\langle f' \rangle_{S_f} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq f' \\ \frac{1}{|\text{Aut } S_f|} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Soit donc une extension de  $S_f$  associée à une valeur initiale  $f'$ . Les condition sur les  $d'_i$  montre que l'extension n'est pas simplifiable, donc coïncide avec sa simplification  $S_f$ , ce qui impose les égalités des degrés, d'où  $f = f'$ . Pour les même raisons, il n'y a qu'une seule extension de  $S_f$  ayant même degré, comptée avec poids  $\frac{1}{|\text{Aut } S_f|}$ .

Pour illustrer ce résultat, on peut regarder le genre 2 en degré zéro. Il y a alors trois familles initiales : (4), (2, 3) et (2, 2, 2). Il leur correspond respectivement les graphes simples (ou d'autres ayant mêmes degrés)

$$\begin{aligned} S_{(4)} & : * \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \quad \circ \\ \circ \end{array} \quad (8 \text{ symétries}), \\ S_{(2,3)} & : * \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \quad \circ \quad (4 \text{ symétries}), \\ S_{(2,2,2)} & : * \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \quad \circ \quad (4 \text{ symétries}). \end{aligned}$$

On en déduit que le chevron de Witten en genre 2 est représenté par

$$\langle \cdot \rangle_{g=2} = 8 \langle \tau_4 \rangle \langle \cdot \rangle_{S_{(4)}} + 4 \langle \tau_2, \tau_3 \rangle \langle \cdot \rangle_{S_{(2,3)}} + 4 \langle \tau_2^3 \rangle \langle \cdot \rangle_{S_{(2,2,2)}} .$$

## 4.3 Série génératrice des nombres de Hurwitz

### 4.3.1 Premiers résultats en lien avec l'algèbre $\mathcal{A}$

#### Proposition.

Soit  $S$  un graphe simple. Notons  $s$  le nombre de ses sommets (sans compter  $*$ ) et  $a$  celui de ses arêtes. On a alors l'identité

$$F_S(q) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{n!} \sum_{d_1, \dots, d_n} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_S = \frac{1}{|\text{Aut } S|} Y^s (1 + Z)^a .$$

En particulier, la fonction génératrice  $F_S$  est dans  $\mathcal{A}$ .

#### Démonstration.

$F_S$  est la série génératrice exponentielle comptant les  $n$ -extensions de  $S$ . C'est le moment de se rappeler de la description précise de ces extensions. On commence par choisir pour chaque sommet un arbre enraciné, d'où le  $Y^s$ . Ensuite, il faut tenir compte de ce qui a disparu sur les arêtes. Pour le décrire, fixons une arête  $\alpha$ . On choisit alors : ou bien l'arbre vide à 0 sommets (s'il n'y avait rien à simplifier sur  $\alpha$ ), ou bien un arbre 2-enraciné que l'on relie (selon ses racines) aux deux sommets de  $\alpha$  (le choix binaire qui s'impose peut être rendu unique en fixant une orientation des arêtes). Ce procédé fournit le  $(1 + Z)^a$ . Mais il faut tenir compte des symétries de notre graphe de départ qui induisent autant de symétrie sur ses extensions, d'où le facteur  $\frac{1}{|\text{Aut}|}$ .

#### Corollaire.

On se donne un genre  $g \geq 2$  et  $\beta$  une classe de cohomologie sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,0}$ . Alors, en désignant par  $\beta$  les tirées en arrière de  $\beta$  dans les  $\mathcal{M}_{g,n}$  via les morphismes d'oubli, la série suivante se trouve dans  $\mathcal{A}$  :

$$F_{g,\beta}(q) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \frac{\beta}{(1-\psi_1) \dots (1-\psi_n)}.$$

**Démonstration.**

On développe notre série  $F_{g,\beta}$  pour faire apparaître les chevrons de Witten :

$$F_{g,\beta} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{n!} \langle \beta, \psi_1, \dots, \psi_n \rangle_g.$$

On décompose les chevrons sus-cités selon des chevrons associés à des graphes simples, et la proposition précédente permet de conclure.

On se propose de généraliser ce corollaire afin de pouvoir l'appliquer à ELSV.

### 4.3.2 Une généralisation

On fixe pour cela un entier  $p \geq 0$  et  $\beta$  dans  $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,p})$ . On se donne  $p$  entiers  $d_i \geq 0$  correspondant à une partition  $\mu$  et on note  $r = \sum (d_i - 1)$  le degré de ramification de notre partition, de sorte que  $d_1 + \dots + d_p = p + r$ .

**Théorème.**

Pour tout genre  $g$  tel que  $2g - 2 < p$ , la série suivante réside dans  $\mathcal{A}$  :

$$F_{g,\beta;\mu} := \sum_{n \geq p+r} \frac{q^n}{(n-p-r)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n-r}} \frac{\beta}{(1-d_1\psi_1) \dots (1-d_p\psi_p) (1-\psi_{p+1}) \dots (1-\psi_{n-r})}.$$

Il s'agit de reprendre la démonstration précédente en généralisant les objets utilisés.

**Définition.**

Un graphe  $p$ -simple est un graphe possédant un sommet marqué  $*$  de degré quelconque,  $p$  sommets numérotés de 1 à  $p$  également de degré quelconque, ainsi que plusieurs autres sommets chacun de degré  $\geq 3$ .

La  $p$ -simplification d'un graphe décoré  $G$  est le graphe  $S$  obtenu en appliquant les opérations (C) et (D) autant de fois que possible sans toucher ni au sommet  $*$  ni à son degré, ni aux sommets 1, ...,  $p$ . On dira aussi que  $G$  est une extension de  $S$  (ou  $n$ -extension si  $G$  est  $n$ -décoré).

Étant donné un graphe  $p$ -simple  $S$ , le  $S$ -chevron  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_S$  compte le nombre de  $n$ -extensions de  $S$  telles que le sommet marqué  $i$  soit de degré  $d_i + 1$  et tel que les  $n - p$  sommets non marqués restant soient de degré  $d_i + 1$  pour  $i > p$ .

Parmi les nouvelles subtilités au rendez-vous, on s'autorise à effacer des sommets adjacents aux  $p$  sommets marqués, lesquels ne sont pas forcément de degré  $\geq 3$ .

**Proposition.**

Les  $S$ -chevrons (pour  $S$   $p$ -simple) vérifient la relation des cordes et la relation du dilaton pour  $n \geq p$ .

**Démonstration.**

La même que pour  $p = 0$ .

**Proposition.**

Soit  $\langle \cdot \rangle$  un chevron invariant par permutation de ses  $n - p$  dernières variables, qui vérifie la relation des cordes et la relation du dilaton pour  $n \geq p$ , de genre  $g \geq 0$ , et de degré  $b$  positif. Alors, sous la condition  $(b, g) \neq (0, 0)$ , il existe des graphes  $p$ -simples  $S_1, \dots, S_d$  tels que  $\langle \cdot \rangle$  soit combinaison linéaire des chevrons  $\langle \cdot \rangle_{S_1}, \dots, \langle \cdot \rangle_{S_d}$ .

**Lemme.**



On se donne  $b \geq 0$  et  $g \geq 0$  tels que  $b + g' \geq 1$ ,  $n \geq p \geq 0$  entiers  $d_i$  dont les  $n - p$  derniers sont  $\geq 2$ , liés par la relation

$$b + \sum (d_i - 1) = 3g'.$$

Alors il existe un graphe  $p$ -simple  $S$  connexe à  $n + 1$  sommets de degré  $d_i + 1$  tel que  $\chi(S) = 3 - 2g$ .

Si  $b + g' = 0$ , un tel graphe existe encore mais perd sa connexité, le sommet  $*$  étant alors de degré nul. On peut cependant supposer que le reste du graphe reste connexe si les  $d_i$  ne sont pas tous minimaux ou si  $g > 0$ .

Si  $b + g' = -1$ , il n'est pas possible de construire un tel graphe.

### Démonstration du lemme.

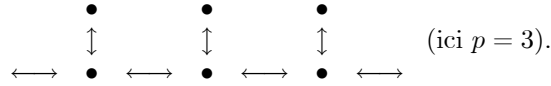
On notera que, comme pour  $p = 0$ , la condition sur  $\chi$  se réécrit  $\deg(*) = b + g'$ . Pour avoir la connexité, il est par conséquent nécessaire que ce nombre soit  $\geq 1$ , d'où la condition supplémentaire (qui était automatiquement vérifiée lorsque  $p$  valait 0 vu que l'on prenait  $g \geq 2$ ).

On procède encore par récurrence sur la somme des  $d_i$ , l'hérédité se prouvant exactement de la même manière.

Pour l'initialisation, *i.e.* pour  $\begin{cases} d_1 = \dots = d_p = 0 \\ d_{p+1} = \dots = d_n = 2 \end{cases}$ , la relation de liaison devient  $b + (-p) + (n - p) = 3g'$ , d'où

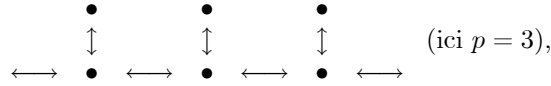
$$\deg(*) = 4g' + 2p - n.$$

Une récurrence descendante sur  $n \leq 3g' + 2p$  permet encore de conclure. Pour  $n = 3g' + 2p$ , *i.e.* pour  $b = 0$ , on veut  $\deg(*) = g'$ . On regroupe  $3g'$  sommets de degré 3 par paquets de trois comme pour  $p = 0$ , puis on rajoute les  $p$  sommets de degré 1 en intercalant la configuration suivante entre  $*$  et un paquet :

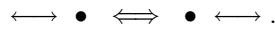


Pour descendre d'un cran, il s'agit de tuer un sommet tout en incrémentant le degré de  $*$ . Puisqu'on récurse sur  $n \geq p$ , on peut (pour descendre) prendre un sommet autre que  $*$  ou les  $p$  sommets numérotés. On fait alors comme pour  $p = 0$ .

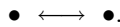
Regardons à présent le cas  $b + g' = 0$ . Récurrenons encore sur  $\sum d_i$ . Pour l'hérédité, on part d'un graphe **connexe** grâce au cas précédemment traité, et on détache l'arête incidente à  $*$  pour la rattachier au sommet dont il faut incrémenter le degré. Pour initialiser, on dispose de  $n = 4g' + 2p$  sommets : on regroupe chaque sommet numéroté avec un non-numéroté dans une configuration



puis on rajoute le long d'un cercle  $2g'$  configurations



Ceci n'est pas possible pour  $g' = -1$ , auquel cas  $n = 2p - 4 = p + (p - 4)$  ; la condition  $n \geq p$  impose  $p - 4 \geq 0$  ; on met alors  $p - 4$  sommets non numérotés le long d'un cercle en leur attachant chacun un sommet numéroté, puis on rajoute à côté les quatre sommets numérotés manquants en configuration



### Démonstration de la proposition.

On reprend celle du cas  $p = 0$ . Les familles initiales sont les  $(d_1, \dots, d_p, d_{p+1}, \dots, d_n)$  pour lesquelles  $d_i \geq 2$  pour tout  $i > p$ , ce qui impose

$$3g' = b + \sum_{i=1}^p (d_i - 1) + \sum_{i>p}^n (d_i - 1) \geq 0 - p + (n - p), \text{ d'où la majoration } n \leq 3g' + 2p.$$

On a ainsi un nombre fini de familles initiales.

À chacune  $f$  d'entre elles, on associe un graphe  $p$ -simple  $S_f$  de caractéristique d'Euler  $3 - 2g$  avec  $n$  sommets de degré  $d_i + 1$ . On montre alors comme pour  $p = 0$  que notre chevron s'écrit

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{f \text{ valeur initiale}} \langle f \rangle |\text{Aut } S_f| \langle \cdot \rangle_{S_f} .$$

### Démonstration du théorème.

La série génératrice exponentielle  $F_{g,\beta;\mu}$  se développe en

$$F_{g,\beta;\mu} = \sum_{n \geq p+r} \frac{q^n}{(n-p-r)!} \sum_{k_1, \dots, k_{n-r}} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \langle \beta, \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_{n-r}} \rangle_g.$$

On va appliquer la proposition précédente, mais il y a un cas particulier dont il faut tenir compte :  $g = 0$  et  $\deg \beta = 0$ . On s'en débarrasse dès maintenant. Puisque  $\beta = 1$ , la valeur du chevron sphérique est connue (cf. paragraphe 3.3.3) :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, \dots, k_{n-r}} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_{n-r}} \rangle_{g=0} &= \sum_{k_1, \dots, k_{n-r}} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \binom{n-r-3}{k_1, \dots, k_{n-r}} \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_{n-r} = n-r-3} \binom{n-r-3}{k_1, \dots, k_{n-r}} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} 1^{k_{p+1}} \dots 1^{k_{n-r}} \\ &= (d_1 + \dots + d_p + 1 + \dots + 1)^{n-r-3} \\ &= ((p+r) + (n-r-p))^{n-r-3} \\ &= n^{n-r-3}. \end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} F_{g=0,\beta=1;\mu} &= \sum_{n \geq p+r} \frac{q^n}{(n-p-r)!} n^{n-r-3} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{q^n}{n!} n(n-1) \dots (n-p-r+1) n^{n-r-3} \\ &\in \mathbb{Q} \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+l}}{n!} q^n \right]_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Dans tous les autres cas, le chevron de Witten se décompose selon des  $S$ -chevrons. Il suffit donc de montrer que, pour tout  $p$ -graphe simple  $S$ , la série suivante tombe dans  $\mathcal{A}$  :

$$F_{g,S;\mu} = \sum_{n \geq p+r} \frac{q^n}{(n-p-r)!} \sum_{k_1, \dots, k_{n-r}} d_1^{k_1} \dots d_p^{k_p} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_{n-r}} \rangle_S.$$

Quitte à intervertir les  $\sum$ , on peut réécrire

$$F_{g,S;\mu} = \sum_{n \geq p+r} \frac{q^n}{(n-p-r)!} \sum_E d_1^{a_1-1} \dots d_p^{a_p-1}$$

où  $a_i = a_i(E)$  est le degré du sommet  $i$  d'une  $(n-r)$ -extensions  $E$  de  $S$ . Nous allons dénombrer un certain type d'objets de deux manières différentes, l'une qui nous redonnera la série  $F_{g,S;\mu}$ , l'autre qui montrera que la série génératrice exponentielle associée habite dans  $\mathcal{A}$ .

On considère  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble des objets formés de ( $\mathcal{E}$  comme « extension ») : un graphe  $\widehat{E}$  dont l'ensemble des sommets est  $\{1, \dots, n\} \cup \{*\}$ ; une  $p$ -liste  $(D_1, \dots, D_p)$  de parties disjointes de  $\{1, \dots, n\}$  vérifiant  $|D_i| = d_i$  telles que, si l'on fusionne les sommets de  $\widehat{E}$  tombant dans une même partie  $D_i$  en un sommet numéroté  $i$ , on obtienne une  $p$ -extension  $E$  de  $S$ . Bien observer que  $E$  est un graphe  $p$ -décoré et non  $(n-r)$ -décoré comme le domaine de la somme  $\sum_E$  le laisse entendre.

Pour compter  $\varepsilon_n := |\mathcal{E}_n|$  à  $n$  fixé, on commence par choisir les  $D_i$ , ce qui se fait en  $\frac{n!}{d_1! \dots d_p!}$  choix. Ensuite, il s'agit de choisir notre graphe  $\widehat{E}$ . Pour cela, on commence par choisir un graphe  $(n-r)$ -décoré  $E$ , d'où le  $\sum_E$ . On oublie ensuite les sommets numérotés  $i$  pour  $p < i \leq n-r$ , d'où un facteur  $\frac{1}{(n-p-r)!}$  pour ne pas compter plusieurs fois les  $E$  obtenus à partir d'un  $\widehat{E}$  par permutation des  $n-p-r$  dernier sommets. Il reste à casser chaque sommet  $i$  en  $d_i$  sommets de  $E$  : chaque arête incidente à  $i$  va alors vers un des  $d_i$  sommets engendré par  $i$ , d'où  $d_i^{\deg(i)} = d_i^{a_i}$  choix pour chaque  $i$ . Mettant tout cela bout à bout, on trouve

$$\varepsilon_n = \frac{n!}{d_1! \dots d_p!} \sum_E \frac{1}{(n-p-r)!} d_1^{a_1} \dots d_p^{a_p},$$

d'où une expression de  $F_{g,S;\mu}$  en fonction des  $\varepsilon_n$  :

$$\frac{F_{g,S;\mu}}{(d_1 - 1)! \dots (d_p - 1)!} = \sum_{n \geq p+r} \frac{\varepsilon_n}{n!} q^n.$$

En remarquant que  $\varepsilon_n$  s'annule pour  $1 \leq n < p + r$ , on ainsi est ramené à prouver que la série génératrice exponentielle des  $\varepsilon_n$  est dans  $\mathcal{A}$ . On procède comme suit. Pour choisir les  $D_i$ , on construit  $\sum d_i$  arbres enracinés à racines marquées dans  $\{1, \dots, n\}$  que l'on regroupe en  $p$  forêts de  $d_i$  arbres. On choisit ensuite une extension  $E$  de  $S$  : nous l'avons déjà fait, il s'agit de prendre un arbre par sommet et un arbre 2-enraciné (ou vide) par arête, une orientation des arêtes de  $S$  ayant été fixée au préalable. Enfin, pour obtenir  $\widehat{E}$ , on éclate le sommet  $i$  en la forêt de  $d_i$ -arbres associée à  $D_i$ , puis, pour tout arête  $\alpha$  de  $E$  incidente à  $i$ , au lieu de relier l'ancien sommet  $i$  à la racine  $r_\alpha$  correspondante de l'arbre 2-enraciné associé à notre arête  $\alpha$ , on relie cette fois la racine d'un arbre de la  $i$ -ième forêt (choisi au hasard) à  $r_\alpha$ . En passant aux séries génératrices exponentielles, cela s'écrit

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n!} q^n = Y^{\sum d_i} \left( \sum_{d_1, \dots, d_p}^{d_i} \right) Y^s (1 + Z)^a \sum_{i \text{ sommet de } S} \sum_{\substack{\alpha \text{ arête} \\ \text{incidente à } i}} d_i,$$

série qui tombe clairement dans  $\mathcal{A}$ . Ce qui fait marcher la chose, c'est que les deux dernières opérations ne dépendent pas de  $n$  mais *uniquement* du nombre et des degrés des sommets du graphe  $p$ -simple  $S$  fixée au départ, ce qui multiplie tous les choix par la constante  $\sum_{i=1}^p d_i \deg(i)$ .

### 4.3.3 Le théorème central

Nous avons enfin tous les outils nécessaires pour montrer que la série génératrice exponentielle associée aux nombres de Hurwitz réside dans  $\mathcal{A}$ .

#### Théorème central.

Soit un genre  $g \geq 0$ . Pour toutes partitions  $\mu_1, \dots, \mu_k$ , la série suivante habite dans  $\mathcal{A}$  :

$$H_{g;\mu_1, \dots, \mu_k} = \sum_{n \geq 1} \frac{h_{g,n;\mu_1, \dots, \mu_k}}{c(n)!} q^n.$$

Ce résultat tombe cependant en défaut en genre 1 pour des partitions vides.

#### Démonstration.

On raisonne par récurrence sur le nombre  $k$  de partitions.

• Pour  $k = 0$ , on applique ELSV à une partition vide (*i.e.*  $p = r = 0$ ), la condition de stabilité étant alors toujours vérifiée en genre  $g \geq 2$  :

$$H_{g;\emptyset} = \sum_{n \geq 1} \frac{q^n}{n!} \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \frac{c(\Lambda_{g,n}^*)}{(1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_n)}.$$

Le corollaire du paragraphe 4.3.1 permet de conclure.

En genre sphérique ou torique, la section 3.4 nous donne une expression explicite des nombres de Hurwitz.

Pour  $g = 0$ , on obtient

$$H_{g=0;\emptyset} = \sum_{n \geq 1} \frac{h_{0,n;\emptyset}}{c(n)!} q^n = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-3}}{n!} q^n$$

qui réside bien dans  $\mathcal{A}$ .

Pour  $g = 1$ , on applique la formule des revêtements toriques

$$h_{1,n;\mu} = \frac{1}{24} \frac{(n+p)!}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \left( n^p - n^{p-1} - \sum_{i=2}^p (i-2)! \sigma_i n^{p-i} \right)$$

à la partition  $\mu = (1, \dots, 1)$  : le nombre de parts devient  $p = n$ , d'où

$$h_{1,n;\emptyset} = \frac{1}{24} \frac{(2n)!}{n!} \left( n^n - n^{n-1} - \sum_{i=2}^n (i-2)! \binom{n}{i} n^{n-i} \right).$$

On peut expliciter un peu plus en travaillant la somme de droite :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n (i-2)! \binom{n}{i} n^{n-i} &= \sum_{i=2}^n \frac{(i-2)! n!}{i! (n-i)!} n^{n-i} \\
&= n! \sum_{i=2}^n \left( \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= n! \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \frac{n^{n-i-1}}{(n-i-1)!} - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \right] \\
&= n! \left[ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{n^{n-i-1}}{(n-i)!} \frac{1}{i} ((n-i) - n) + \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{n} \right] \\
&= n! \left( -\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} - \frac{1}{n} \right) + n(n-1) n^{n-2} \\
&= n! \left( -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n^i}{i!} \right) + n^n - n^{n-1} \\
&= n^n - n^{n-1} - \frac{A_n}{n}.
\end{aligned}$$

On vient ainsi de montrer que

$$h_{1,n;\emptyset} = \frac{1}{24} \frac{(2n)!}{n!} \frac{A_n}{n}.$$

On en déduit

$$H_{g=1;\emptyset} = \sum_{n \geq 1} \frac{h_{1,n;\emptyset}}{c(n)!} q^n = \frac{1}{24} \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{n} \frac{q^n}{n!}.$$

Si cette série était dans  $\mathcal{A}$ , on pourrait écrire pour tout  $n$

$$\frac{A_n}{n} = L(n) n^n + P(n) A_n$$

où  $L$  est un polynôme de Laurent et  $P$  un polynôme tout court, d'où

$$A_n = \frac{L(n) n^{n+1}}{1 - nP(n)} \sim F(n) n^n$$

où  $F$  est une fraction rationnelle ; or, l'on sait que  $A_n \sim \frac{e^n}{2}$ , d'où contradiction.

- Pour  $k = 1$ , on applique encore ELSV, valable pour  $n - r > 2 - 2g$ , en particulier dès que  $p > 2 - 2g$  :

$$H_{g;\mu} = \sum_{n \geq p+r} \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \frac{q^n}{(n-p-r)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n-r}} \frac{c(\Lambda_{g,n-r}^*)}{(1-d_1\psi_1) \dots (1-d_p\psi_p) (1-\psi_{p+1}) \dots (1-\psi_{n-r})}.$$

Le théorème du paragraphe 4.3.2 permet alors de conclure pour  $g \geq 2$ .

En genre 1, la condition devient  $p > 0$  ; par conséquent, seul échappe au théorème 4.3.2 le cas d'une partition vide. Mais nous avons déjà traité ce cas plus haut.

En genre 0, on peut appliquer la formule d'Hurwitz :

$$H_{g=0;\mu} = \sum_{n \geq 1} \frac{h_{0,n;\mu}}{c(n)!} q^n = \sum_{n \geq p+r} \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} \frac{n^{n-r-3}}{(n-p-r)!} q^n.$$

On a déjà rencontré cette série : il s'agit de  $F_{g=0,\beta=1;\mu} \in \mathcal{A}$ .

- Supposons le résultat montré pour  $k = 0$  et 1. Nous allons raisonner en terme de constellations, l'idée étant de fusionner les deux dernières permutations d'une constellation pour décrémenter l'ordre (*cf.* [5] pages 35-37 d'où est tirée la preuve qui suit).

On part d'un passeport  $(\mu_1, \dots, \mu_{k+1})$  avec  $k \geq 1$  ; quitte à compléter par des 1, on suppose que les  $\mu_i$  partitionnent  $n$ . La série  $H_{g;\mu_1, \dots, \mu_{k+1}}$  compte les objets formés de  $k+1$  permutations de passeport  $(\mu_1, \dots, \mu_{k+1})$  auxquelles on rajoute  $c(n)$  transpositions, *i.e.* les constellations  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k+1}, \tau_1, \dots, \tau_{c(n)})$ .

Regardons ce qui se passe lorsque l'on fait le produit  $\sigma_k \sigma_{k+1}$ . On obtient  $k + c(n)$  permutations dont le produit fait l'identité, mais on perd généralement la condition de transitivité. Notons  $\Omega^1, \dots, \Omega^N$  les orbites de notre nouveau groupe cartographique ( $\Omega$  comme « orbite ») et  $n^j = |\Omega^j|$  les cardinaux des orbites – lesquels partitionnent  $\{1, \dots, n\}$ . Pour un  $i < k$  fixé, les cycles de  $\sigma_i$  se répartissent dans les  $\Omega^j$  et reforment  $N$  permutations  $\sigma_i^j \in \mathfrak{S}(\Omega^j)$ , chacune agissant sur une orbite; de même pour les  $\tau_i$ , dont chacun va dans le  $\Omega^j$  contenant son support. On obtient ainsi  $N$  constellations  $(\sigma_1^j, \dots, \sigma_{k-1}^j, [\sigma_k \sigma_{k+1}]^j, \tau_1^j, \dots, \tau_{c(n)}^j)$  de degré  $n^j$  (avec  $\tau_i^j = \text{Id}$  presque toujours). Donnons une importance particulière aux points fixes de  $\sigma_k \sigma_{k+1}$  qui rencontrent le support de  $\sigma_k$  ou celui de  $\sigma_{k+1}$ . On obtient ainsi la décomposition cyclique de  $\sigma_k \sigma_{k+1}$  où l'on a exclu les points fixes qui étaient déjà fixes par  $\sigma_k$  ou  $\sigma_{k+1}$ . Prenons la partition associée : il est important de noter que, à  $(\mu_k, \mu_{k+1})$  fixés, il n'y qu'un nombre fini de telles partitions, leur somme étant majorée par celles de  $\mu_k$  et  $\mu_{k+1}$ .

Finalement, on a récupéré les données suivantes : une partition de  $\{1, \dots, n\}$  en  $N$  parties de cardinal  $n^1, \dots, n^N$ , un cassage (pour  $i < k$ ) de chaque  $\mu_i$  en  $N$  sous-partitions  $\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^N$ , de même pour la partition associée au produit  $\sigma_k \sigma_{k+1}$ , ainsi qu'un certain nombre  $f^j$  de points fixes sur la  $k$ -ième permutation  $[\sigma_k \sigma_{k+1}]^j$  de chacune de nos  $N$  constellations (le  $\mu$  devient  $\lambda$  pour homogénéiser les notations à venir). On va calculer  $h_{g,n;\mu_1,\dots,\mu_{k+1}}$  en sommant sur ces données.

On part donc d'un cassage des  $k - 1$  premières partitions de notre passeport  $(\mu_1, \dots, \mu_{k+1})$  en  $N$  sous-partitions, de partitions  $\lambda_k^j$  de somme totale majorée par celles de  $\mu_k$  et  $\mu_{k+1}$ , et d'un comptage d'un nombre  $f^j$  de parts égales à 1 dans  $\lambda_k^j$ . Une telle situation initiale peut être représentée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_k^1 & f^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 & f^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^N & \lambda_2^N & \dots & \lambda_k^N & f^N \end{array}$$

Bien observer la **finitude** des tableaux ci-dessus une fois le passeport  $(\mu_1, \dots, \mu_{k+1})$  fixé : en effet, les  $\lambda_i^j$  sont (pour  $i < k$ ) des sous-partitions des  $\mu_i$ , tandis que la somme totale des partitions  $\lambda_k^j$  (a fortiori les  $f^j$ ) est bornée par la somme de  $\mu_k$  plus celle de  $\mu_{k+1}$ .

Évidemment, on va compter nos constellations avec la condition «  $\lambda_k^j$  est la partition correspondant à l'action de  $\sigma_k \sigma_{k+1}$  sur l'orbite  $\Omega^j$  obtenue en faisant l'union ensembliste des partitions de la  $j$ -ième ligne ». Notons  $n^j$  le cardinal de  $\Omega^j$ .

À chaque ligne du tableau ci-dessus, on associe le nombre  $h_{g,n^j;\lambda_1^j,\dots,\lambda_k^j}$  comptant le nombre de constellations en question. Pour tenir compte de l'information contenue dans les  $f^j$ , on choisit ensuite  $f^j$  points marqués parmi les points hors du support de  $\lambda_k^j$ , d'où un facteur  $\binom{n^j - s^j}{f^j}$  en notant  $s^j$  le cardinal du support de  $\lambda_k^j$ .

Que faire des  $c(n^j) = 2n^j + 2g - r^j - 2$  transpositions supplémentaires ? Les mettre ensemble donne bien le bon nombre

$$c(n^1) + \dots + c(n^N) = c(n).$$

Il suffit donc de choisir un entremêlement de ces  $N$  blocs ordonnés, ce qui se fait en le multinomial  $\binom{c(n)}{c(n^1), \dots, c(n^N)}$ .

On voit alors une seconde raison, outre le fait que le facteur  $c(n)!$  se simplifie en appliquant ELSV pour  $k = 1$ , pour que les séries  $H_{g;*}$  soient en  $\frac{q^n}{c(n)!}$  et non en  $\frac{q^n}{n!}$ .

Il reste à multiplier par le nombre  $m(T)$  de façons d'obtenir  $\lambda_k$  à partir des partitions  $\mu_k$  et  $\mu_{k+1}$ , puis à diviser par les automorphismes sur les lignes du tableau (car les orbites sont indistinguables). Nous affirmons que nous obtenons

$$H_{g;\mu_1,\dots,\mu_{k+1}} = \sum_{T \text{ tableau}} \frac{m(T)}{|\text{Aut } T|} \prod_{j=1}^{N(T)} \binom{D - s^j}{f^j} H_{g;\lambda_1^j,\dots,\lambda_k^j}.$$

L'algèbre  $\mathcal{A}$  étant stable par  $D$  et les  $H_{g;\lambda_1^j,\dots,\lambda_k^j}$  dans  $\mathcal{A}$  par hypothèse de récurrence, on a une somme finie de séries de  $\mathcal{A}$ , l'ensemble des tableaux étant fini car fixé par le passeport  $(\mu_1, \dots, \mu_{k+1})$ . C'est donc terminé. Le

lecteur sceptique pourra tout développer pour retomber sur ses pieds :

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \text{ tableau}} \frac{m(T)}{|\text{Aut } T|} \prod_{j=1}^{N(T)} \binom{D-s^j}{f^j} H_{g;\lambda_1^j, \dots, \lambda_k^j} \\
&= \sum_{T \text{ tableau}} \frac{m(T)}{|\text{Aut } T|} \prod_{j=1}^{N(T)} \left[ \binom{D-s^j}{f^j} \sum_{n^j \geq 1} \frac{h_{g,n;\lambda_1^j, \dots, \lambda_k^j}}{c(n^j)} q^{n^j} \right] \\
&= \sum_{T \text{ tableau}} \frac{m(T)}{|\text{Aut } T|} \sum_{n \geq 1} q^n \left( \sum_{n^1 + \dots + n^N = n} \prod_{j=1}^N \binom{n^j - s^j}{f^j} \frac{h_{g,n;\lambda_1^j, \dots, \lambda_k^j}}{c(n^j)} \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{q^n}{c(n)!} \underbrace{\sum_{T \text{ tableau}} \frac{m(T)}{|\text{Aut } T|} \sum_{n^1 + \dots + n^N = n} \binom{c(n)}{c(n^1), \dots, c(n^N)} \prod_{j=1}^N \binom{n^j - s^j}{f^j} h_{g,n;\lambda_1^j, \dots, \lambda_k^j}}_{=h_{g,n;\mu_1, \dots, \mu_{k+1}} \text{ d'après le discours qui précède}}, \text{ CQFD.}
\end{aligned}$$

#### 4.4 Miscellanées sur un théorème de M. Kazarian

M. Kazarian a récemment trouvé une formule explicite pour la série  $H_{g;\mu}$  à l'aide des générateurs  $Y$  et  $Z$  de notre algèbre  $\mathcal{A}$ . Nous l'admettons, en donnant une esquisse de démonstration. Plusieurs de ses corollaires, outre la trivialisaton de l'initialisation  $k = 1$  du théorème central, nous semblent mériter d'être exposés dans ce mémoire.

##### **Théorème (Kazarian).**

Soit  $g \geq 2$  un genre et  $\mu = d_1 + \dots + d_p$  une partition. Alors la série  $H_{g;\mu}$  peut s'écrire

$$H_{g;\mu} = \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} Y^{d_1 + \dots + d_p} (Z+1)^{2g'+p} \varphi(Z)$$

où  $\varphi(Z)$  est le polynôme

$$\varphi(Z) := \sum_{k \geq 0} \frac{Z^k}{k!} \int_{\mathcal{M}_{g,p+k}} \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - d_1 \psi_1) \dots (1 - d_p \psi_p)} \frac{\psi_{p+1}^2 \dots \psi_{p+k}^2}{(1 - \psi_{p+1}) \dots (1 - \psi_{p+k})}$$

de degré  $d := 3g' + p$  et de terme dominant  $\frac{\langle \tau_2^d \rangle}{d!} Z^d$ .

##### **Esquisse de démonstration.**

Introduisons les séries  $F = F_{g;d_1, \dots, d_p}$  à une infinité d'indéterminées

$$F(q_0, q_1, \dots) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{q_{i_1} \dots q_{i_k}}{k!} \int_{\mathcal{M}_{g,p+k}} \frac{c(\Lambda_{g,p+k}^*) \cdot \psi_{p+1}^{i_1} \dots \psi_{p+k}^{i_k}}{(1 - d_1 \psi_1) \dots (1 - d_p \psi_p)}.$$

On peut vérifier que

$$H_{g;d_1, \dots, d_p}(q) = \frac{1}{|\text{Aut } \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} q^{d_1 + \dots + d_p} F(q, q, q, \dots).$$

D'autre part,  $F$  satisfait la relation des cordes et la relation du dilaton (pour un sens physique, se référer à [9]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial q_0} = mF + \sum_{i \geq 0} q_{i+1} \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \frac{\partial F}{\partial q_1} = \chi F + \sum_{i \geq 0} q_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} m = d_1 + \dots + d_p \\ \chi = 2g' + p \end{array} \right. .$$

Le théorème provient alors du fait suivant, issu de manipulations sur les EDP : pour toute série  $F$  satisfaisant les relation des cordes et relation du dilaton ci-dessus, on a

$$q^m F(q, q, q, \dots) = Y^m (1+Z)^X F(0, 0, Z, Z, Z, \dots).$$

$\varphi$  est bien un polynôme pour des raisons de dimensions. En effet, l'intégrande est de degré  $\geq 2+2+\dots+2 = 2k$ , mais ce degré doit valoir la dimension  $3g' + p + k$ , d'où

$$3g' + p + k \geq 2k \text{ et } k \leq 3g' + p.$$

Le cas d'égalité  $k = d$  fournit le terme dominant de  $\varphi(Z) : \frac{Z^k}{k!} \langle \tau_2^k \rangle$ .

Cette considération dimensionnelle est importante : la présence de degré toujours  $> 0$  en haut permettra faire des choses intéressantes. Il en découle en particulier l'asymptotique des  $h_{g,n;\emptyset}$  en tout genre  $\geq 2$  (donc en tout genre en utilisant les formules explicites en genres sphérique et torique), ainsi qu'un algorithme pour calculer les chevrons de Witten.

**Corollaire.**

À  $g \geq 2$  fixé, on a

$$\frac{h_{g,n;\emptyset}}{(2n+2g-2)!} \sim C_g n^{\frac{5}{2}g'-1} e^n \text{ où } C_g \text{ est une constante valant } \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')! 2^{\frac{5}{2}g'} \Gamma(\frac{5}{2}g')}.$$

**Démonstration.**

Le théorème de Kazarian montre que  $H_{g;\emptyset}$  est un polynôme en  $Z$  de terme dominant  $\frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} Z^{5g'}$ . Or, le paragraphe 4.1.3 nous donne l'asymptotique des puissances de  $Z$ , ce qui conclut.

L'on est en droit de se demander si, à l'aide de la formule de récurrence établie au théorème précédent, le théorème de Kazarian ne permettrait pas d'obtenir l'asymptotique de *tous* les nombres de Hurwitz. À creuser.

Donnons à présent une description explicite des chevrons de Witten, reposant sur les remarques dimensionnelles sus-évoquées.

**Théorème.**

Pour obtenir le chevron  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_p} \rangle$ , suivre la recette suivante.

1. Représenter chaque  $\tau_d$  par une expression du type

$$\frac{1}{0!(d+1)^d} \frac{\boxed{d+1}}{Y^{d+1}} - \frac{1}{1!d^{d-1}} \frac{\boxed{d}}{Y^d} + \dots + (-1)^d \frac{1}{d!1^0} \frac{\boxed{1}}{Y} = \sum_{i=0}^d \frac{(-1)^{d-i}}{(d-i)!(i+1)^i} \frac{\boxed{i}}{Y^{i+1}}.$$

2. Développer le produit  $\tau_{d_1} \dots \tau_{d_p}$  pour obtenir une combinaison linéaire de termes

$$\frac{\boxed{k_1} \dots \boxed{k_p}}{Y^{d_1+\dots+d_p}}.$$

3. Remplacer  $\boxed{k_1} \dots \boxed{k_p}$  par la série  $|\text{Aut } \kappa| H_{g;\kappa}$  avec  $\kappa = (k_1, \dots, k_p)$ .

4. Additionner le tout. On trouve

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_p} \rangle (Z+1)^{2g'+p}.$$

**Lemme.**

La combinaison linéaire suivante des  $\frac{1}{1-\psi}$ ,  $\frac{1}{1-2\psi}$ , ...,  $\frac{1}{1-(d+1)\psi}$  tue toutes puissances de  $\psi$  jusqu'à  $\psi^{d-1}$  inclus :

$$\sum_{i=0}^d \frac{(-1)^{d-i} \binom{d}{i}}{d!} \frac{1}{1-(i+1)\psi} = \psi^d + O(\psi^{d+1}).$$

**Démonstration du lemme.**

En développant le terme de gauche, on voit qu'il s'agit donc de montrer que la quantité

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \binom{d}{i} (i+1)^n$$

s'annule pour  $n < d$  (et vaut  $d!$  pour  $n = d$ ).

La nullité cherchée revient à montrer  $\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \frac{P(i)}{i!(d-i)!} = 0$  pour tout polynôme  $P$  de degré  $< d$ . On le montre sur la base

$$P_k = X(X-1)\dots(X-k+1) \text{ pour } 0 \leq k < d.$$

En effet, en observant que  $P_k(i) = \frac{i!}{(i-k)!}$  est nul pour  $i < k$ , on trouve

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \frac{P_k(i)}{i!(d-i)!} = \sum_{i=k}^d (-1)^{d-i} \frac{1}{(i-k)!(d-i)!} = \sum_{p+q=d-k} (-1)^p \frac{1}{p!q!} = (1-1)^{d-k} = 0.$$

Quant au terme  $n = d$ , on le trouve prenant n'importe quel polynôme de degré  $d$  : en effet, les degrés inférieurs ont une contribution nulle par ce qui précède. On prend naturellement le polynôme  $P_d$  qui annule les  $i < d$ ; il reste

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \binom{d}{i} P_d(i) = P_d(d) = d!, \text{ CQFD.}$$

### Démonstration du théorème.

Introduisons le polynôme

$$\varphi_{k_1, \dots, k_p}(Z) = \sum_{k \geq 0} \frac{Z^k}{k!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g, p+k}} \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - k_1 \psi_1) \dots (1 - k_p \psi_p)} \frac{\psi_{p+1}^2 \dots \psi_{p+k}^2}{(1 - \psi_{p+1}) \dots (1 - \psi_{p+k})}.$$

Nous allons considérer des combinaisons linéaires de ces polynômes afin de tuer toutes les puissances de  $Z$  à l'exception du terme constant – qui se trouvera être  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_p} \rangle$ .

Dans l'expression de Kazarian

$$|\text{Aut } \mu| H_{g; \mu} = (Z+1)^{2g'+p} Y^{k_1 + \dots + k_p} \frac{k_1^{k_1} \dots k_p^{k_p}}{k_1! \dots k_p!} \varphi(Z),$$

l'intrégrand  $\frac{1}{1 - k_i \psi_i}$  apparaît avec un facteur additionnel  $Y^{k_i} \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}$  devant l'intégrale. Pour compenser cela, on multiplie les coefficients du lemme par l'inverse  $\frac{k_i!}{k_i^{k_i} Y^{k_i}}$ , ce qui donne

$$\tau_d \text{ " = } \int \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^d \frac{(-1)^{d-i}}{(d-i)!(i+1)^i} \frac{\boxed{i+1}}{Y^{i+1}}.$$

C'est précisément la description donnée par l'énoncé.

Multiplier de telles expressions pour  $d = d_1, \dots, d_p$  et séparer les intégrandes afin de refactoriser pour utiliser le lemme fournit

$$(Z+1)^{2g'+p} \sum_{k \geq 0} \frac{Z^k}{k!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g, p+k}} \left( \psi_1^{d_1} \dots \psi_p^{d_p} + \text{t.o.s.} \right) \cdot \psi_{p+1}^2 \dots \psi_{p+k}^2 \cdot \frac{1 - \lambda_1 + \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - \psi_{p+1}) \dots (1 - \psi_{p+k})}$$

où « t.o.s. » signifie « termes d'ordre supérieur ». Ceci permet de tuer tout le monde à l'intérieur de l'intégrale pour  $k > 0$  : en effet, le degré de l'intrégrand est minoré par

$$d_1 + \dots + d_p + 2k = (3g' + p) + 2k \geq 3g' + p + k = \dim \overline{\mathcal{M}}_{g, p+k},$$

avec égalité si et seulement si  $k = 0$ . Il ne reste alors que le chevron  $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_p} \rangle$  comme souhaité.

### Proposition.



Les nombres de Hurwitz permettent de reconstituer tous les chevrons de Witten :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_p} \rangle = \sum_{\substack{0 \leq k_1 - 1 \leq d_1 \\ \dots \\ 0 \leq k_p - 1 \leq d_p}} \left( \prod_{i=1}^p \frac{(-1)^{d_i - k'_i}}{(d_i - k'_i)! k'_i} \right) |\text{Aut } \kappa| \frac{h_{g,n;\kappa}}{c(n)!}$$

où  $\kappa$  désigne la partition  $k_1 + \dots + k_p$  du nombre  $n$  de feuilletts avec  $c(n) = n + p - 2g'$  et  $k'_i = k_i - 1$ .

**Démonstration.**

On part du membre de droite et on va faire des considérations de dimensions. L'idée est de casser la liaison des indices  $k_i$  du  $h_{g,n;\kappa}$  en utilisant ELSV :

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1 - 1 \leq d_1 \\ \dots \\ 0 \leq k_p - 1 \leq d_p}} \prod_{i=1}^p \frac{(-1)^{d_i - k'_i}}{(d_i - k'_i)! k'_i} \prod_{i=1}^p \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \int_{\mathcal{M}_{g,p}} \frac{c(\Lambda_{g,p}^*)}{(1 - k_1 \psi_1) \dots (1 - k_p \psi_p)}.$$

En passant tout dans l'intégrale, on factorise un produit de  $p$  termes de la forme

$$\sum_{0 \leq k' \leq d} \frac{(-1)^{d - k'}}{(d - k')! k'^{k'}} \frac{k^k}{k!} \frac{1}{1 - (k' + 1) \psi_i}.$$

Pour reconnaître la forme du lemme, on réécrit le coefficient de la sommande comme

$$\frac{(-1)^{d - k'}}{(d - k')!} \frac{k^{k - k'}}{k!} = \frac{(-1)^{d - k'}}{k'! (d - k')!} = \frac{(-1)^{d - k'}}{d!} \binom{d}{k'}.$$

Ceci nous dit que l'on intègre  $(\psi_1^{d_1} \dots \psi_p^{d_p} + \text{t.o.s.}) c(\Lambda^*)$ , et la condition de dimension ne laisse passer que le chevron cherché.

Il est illusoire de chercher à inverser une telle formule. En effet, il s'agirait d'exprimer les nombres de Hurwitz à l'aide de chevrons de Witten ne mettant pas en jeu le fibré de Hodge, et ELSV nous dit que cela est vraiment très improbable.

Finissons ce mémoire en citant une conjecture de Witten, prouvée depuis par Konsevitch, qui permet, à l'aide de l'équation des cordes et de celle du dilaton, de déterminer *tous* les crochets de Witten. On renvoie à la fin du chapitre 4 dans [7] pour plus de détails.

**Théorème (Konsevitch).**

La série suivante, codant tous les crochets de Witten, vérifie l'équation différentielle ci-dessous, en notant  $\frac{\partial}{\partial t_d}$  par un indice  $d$  :

$$F(t_0, t_1, \dots) := \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ n > 2g - 2}} \sum_{d_1, \dots, d_n} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle \frac{t_{d_1} \dots t_{d_n}}{n!}.$$

$$F_{0,1} = \frac{1}{2} F_{0,0}^2 + \frac{1}{12} F_{0,0,0,0}.$$

## 5 Bibliographie

1. **V. I. Arnold**, *Topological classification of complex trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges* : Functional Analysis and its Applications, 1996, vol. 30, no. 1, 1 – 14.
2. **P. Deligne, D. Mumford**, *The irreducibility of the space of curves of given genus* : I.H.E.S., Publ. Math., 1969, vol. 36, 75-109.
3. **T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein**, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves* : arxiv :math.AG/0004096.
4. **C. Faber, R. Pandharipande**, *Hodge integrals and Gromov-Witten theory* : Invent. Math., 2000, vol. 139, no. 1, 173-199.
5. **E. Getzler**, *Operads and moduli spaces on genus 0 Riemann surfaces* : The Moduli spaces of Curves, Birkhäuser, Boston, 1995, 199-230.
6. **J. Harris, L. Morrison**, *Moduli of curves* : Springer, 1998.
7. **S. Lando, A. Zvonkin**, *Graphs on surfaces and their applications* : Springer, 2004.
8. **G. Ringel**, *Map Color Theorem* : Springer, 1974 (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 209).
9. **E. Witten**, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space* : Journal of differential geometry, 1 (1991), 243-310.
10. **D. Zvonkine**, *Counting ramified coverings and intersection theory on Hurwitz spaces II* : arxiv :math.AG/003044251, 2003.
11. **D. Zvonkine**, *An algebra of power series arising in the intersection theory of the moduli spaces of curves and in the enumeration of ramified coverings of the sphere* : arxiv :math.AG/0402092, 5 novembre 2004.
12. **D. Zvonkine**, *Enumeration of ramified coverings of the sphere and 2-dimensional gravity* : arxiv :math.AG/0506248, 28 août 2006.
13. **D. Zvonkine**, *Intersection theory of moduli spaces of stable curves* : Cours donné lors des *Journées mathématiques de Glanon*, 1 mars 2007.