Devoir surveillé

(samedi 22 novembre 2014)

Solution proposée. (47 pts)

Continuité. (7 pts)

1. **(1 pt)** Soit A une algèbre normée. Notons $m : (a, b) \mapsto ab$. Montrons que m est continu par le critère séquentiel. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de A convergentes. Notons a et b leurs limites respectives. On a alors les comparaisons et tendance

$$\|ab - a_n b_n\| = \|a(b - b_n) - (a_n - a) b_n\| \leq \underbrace{\|a\|}_{\text{bornée}} \underbrace{\|b - b_n\|}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\|a_n - a\|}_{\longrightarrow 0} \underbrace{\|b_n\|}_{\text{bornée}} \longrightarrow 0.$$

2. **(2 pts)** Le caractère fermé de F est un leurre et ne sert à rien ! Notons δ l'application considérée. Montrons que δ est 1-lipschitzienne. Soient a et b dans E. Soit $f \in F$. On a les comparaisons

$$\delta(a) = d(a, F) \leq d(a, f) \leq d(a, b) + d(b, f),$$

donc $\delta(a) - d(a, b)$ est un minorant de l'ensemble $\{d(b, f)\}_{f \in F}$, donc est plus petit que le plus grand minorant de cet ensemble, ce qui s'écrit

$$\delta(a) - d(a, b) \leq \inf_{f \in F} d(b, f) = d(b, F), \text{ ou encore } \delta(a) - \delta(b) \leq d(a, b).$$

Échanger les rôles de a et b permet de mettre une valeur absolue à gauche, ce qui conclut.

3. **(2 pts)** Notons f l'application considérée. Elle est continue comme la composée des applications continues

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc}]0, 1] & \xrightarrow{\ln} & \mathbf{R} & \xrightarrow{\times i} & \mathbf{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \ln t & \longmapsto & i \ln t & \longmapsto & e^{i \ln t} \end{array} \right. .$$

Montrons qu'elle n'est pas uniformément continue en niant le critère séquentiel. (Elle ne sera *a fortiori* pas lipschitizienne.) Intuitivement, f oscille de plus en plus vite autour de 0 : précisons cela. Définissons deux suites $a := \left(e^{-2n\pi}\right)$ et $b := \left(e^{-(2n+1)\pi}\right)$. Pour tout naturel n, on a alors d'une part $a_n - b_n = e^{-2n\pi}\left(1 - e^{-\cancel{2}\pi}\right) = o(1)\, O(1) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, d'autre part $f(a_n) - f(b_n) = e^{i2n\pi} - e^{i(2n+1)\pi} = 2$, ce qui conclut.

4. **(2 pts)** Les côtés d'un triangle sont des droites, donc sont fermés[1], donc la fonction "distance à un côté donné" est continue[2], donc leur somme également. Par ailleurs, un triangle "plein" est clairement borné (il est inclus dans son disque circonscrit) et fermé (comme intersection de trois demi-plans fermés), donc compact (le plan est de dimension finie). La fonction considérée atteint par conséquent ses bornes sur le triangle, en particulier son *infimum*, ce qui conclut.

Comparaison de normes. (9 pts)

1. **(2 pts)** Soient $f \in E$, $v \in V$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Notons $M := \sup_{a \neq b} \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a - b\|}$. Montrons la séparation. Supposons $\|f(u)\| + M = 0$. La nullité du second terme équivaut à la constance de f et la nullité du premier terme implique alors la nullité de f. Montrons la positive homogénéité. On a d'une part les égalités $\|[\lambda f](u)\| = \|\lambda f(u)\| = |\lambda| \|f(u)\|$, d'autre part pour tous $a, b \in E$ les égalités

$$\begin{aligned} \|[\lambda f](a) - [\lambda f](b)\| &= \|\lambda f(a) - \lambda f(b)\| = \|\lambda (f(a) - f(b))\| = |\lambda| \|f(a) - f(b)\|, \text{ d'où} \\ \sup_{a \neq b} \frac{\|[\lambda f](a) - [\lambda f](b)\|}{\|a - b\|} &= \sup_{a \neq b} \left(|\lambda| \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a - b\|} \right) = |\lambda| \sup_{a \neq b} \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a - b\|} = |\lambda| M. \end{aligned}$$

[1] Soit D une droite vectorielle (le cas affine s'en déduit par translation). Soit u un vecteur directeur de D. Soit $(\lambda_n u) \in D^{\mathbf{N}}$ convergente. La suite $(\lambda_n u)$ est alors bornée, donc $\left(\frac{\lambda_n u}{\|u\|}\right)$ aussi, donc (λ_n) aussi, d'où une sous-suite $\left(\lambda_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Alors la suite $\left(\lambda_{\varphi(n)} u\right)$ converge d'une part (par continuité de $\lambda \mapsto \lambda u$) vers $\left(\lim \lambda_{\varphi(n)}\right) u$, d'autre part (en tant que sous-suite) vers $\lim (\lambda_n u)$, ce qui conclut.

[2] autre argument plus direct : pour tous réels a, b, c avec $(a, b) \neq (0, 0)$, la fonction $(u, v) \mapsto \frac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (qui est clairement continue) exprime la distance euclidienne d'un point variable à la droite d'équation $ax + by + c = 0$

Le cours montre enfin la comparaison triangulaire.

(1 pt) Soit v dans V. Notons $\|\cdot\|_u$ et $\|\cdot\|_v$ les normes associées et montrons qu'elles sont équivalentes. On a les comparaisons

$$\begin{array}{rcl} \|f(u)\| & = & \|f(v)+f(u)-f(v)\| \leq \|f(v)\|+\|f(u)-f(v)\| \leq \|f(v)\|+M\|u-v\|, \text{ d'où} \\ \|f\|_u & \leq & \|f(v)\|+M(\|u-v\|+1) \leq (\|u-v\|+1)\|f\|_v, \end{array}$$

ce qui montre que la norme $\|\cdot\|_v$ est plus fine que $\|\cdot\|_u$; par échange des rôles de u et v, on conclut à l'équivalence voulue.

2. **(1 pt)** L'ensemble E n'est autre que l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 41 : étant de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes. Il ne reste donc plus qu'à montrer que les application $S : f \mapsto \sup_{[7,8]}|f|$ et $N : f \mapsto \sqrt[18]{f(2)^{18}+f'(6)^{18}}+\int_3^5|f''|$ sont des normes sur E.

   (1 pt) Pour S, la positive homogénéité et la sous-additivité sont immédiates. Par ailleurs, si un $f \in E$ annule S, alors ce f est un polynôme nul sur l'ensemble infini $[7,8]$, donc est le polynôme nul.

   (2 pts) Pour N, les caractères positivement homogène et sous-additif découlent d'une part de ceux de la norme 18 sur $\mathbf{K}^2$ et de la norme L^1 sur $C^0([3,5],\mathbf{K})$, d'autre part de la linéarité[3] de $f \mapsto \begin{pmatrix} f(2) \\ f'(6) \end{pmatrix}$ et de $f \mapsto f''$. Soit par ailleurs $f \in E$ annulant N. Les deux termes de $N(f)$ étant positifs, ils sont nuls. De la nullité de $\int_3^5|f''|$ vient la nullité du polynôme f'', ce qui montre que f est affine, mettons de la forme $f = \lambda(X-2)+\mu$ pour certains scalaires $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. De la nullité de $\sqrt[18]{f(2)^{18}+f'(6)^{18}}$ vient d'une part celle de $f(2)$, d'où l'on tire $\mu = 2$, d'autre par celle de $f'(6)$, d'où l'on tire $\lambda = 0$. Finalement, f est nulle comme souhaité.

3. **(1 pt)** Notons D l'ensemble des fonctions dérivables de $E := C^0([0,1],\mathbf{K})$. Cette partie contient les polynômes, lesquels sont denses dans E d'après Stone-Weierstrass, d'où $\overline{D} = E$. Montrons $\mathring{D} = \emptyset$, ce qui montrera $\partial D = E$.

   (1 pt) Soit par l'absurde $d \in \mathring{D}$. Soit $r > 0$ tel que $d + r\mathbf{B} \subset D$. On observera que la fonction $p := \left|\operatorname{Id}-\frac{1}{2}\right|$ est dans E sans être dérivable et est de norme $\frac{1}{2}$, donc est dans $\mathbf{B} \backslash D$. On en déduit que D contient $d + r\mathbf{B} \ni d + rp$, donc (étant stable par différence) contient $(d+rp)-d = rp$, ce qui est absurde.

Anneaux et compacité. (13 pts)

1. **(1 pt)** Les fonctions inversibles (pour le produit) sont celles qui ne s'annulent jamais, *i. e.* (par continuité) qui gardent un signe strictement constant.

2. **(1 pt)** Soit $s \in S$. L'évaluation en s est un morphisme d'anneaux, donc son noyau $\mathfrak{m}_s$ est un idéal de A.

   (0,5 pt) Soit I un idéal de A tel que $\mathfrak{m}_s \subsetneq I \subset A$: on veut montrer $I = A$. Soit $i \in I \backslash \mathfrak{m}_s$. Montrons que la fonction $i^2 + (\operatorname{Id}-s)^2$ reste dans I et ne s'annule pas, ce qui donnera un inversible dans I et montrera l'égalité $I = A$ recherchée.

   (1 pt) Puisque la fonction $\operatorname{Id}-s$ s'annule en s, elle appartient à $\mathfrak{m}_x \subset I$, donc son carré reste dans $II \subset I$ puisque I est stable par multiplication. Ce dernier étant par ailleurs stable par addition, il contiendra $i^2 + (\operatorname{Id}-s)^2$.

   (1 pt) Soit par l'absurde $t \in S$ annulant $i^2 + (\operatorname{Id}-s)^2$. La nullité de la somme des réels positifs $i(t)^2 + (t-s)^2$ implique d'une part celle de $(t-s)^2$, laquelle équivaut à $t = s$, d'autre part celle de $i(t)$, laquelle équivaut à $i \in \mathfrak{m}_t$, d'où la contradiction vu que $i \notin \mathfrak{m}_s$.

3. Supposons par l'absurde $\forall s \in S,\ \mathfrak{M} \neq \mathfrak{m}_s$.

   (a) **(1 pt)** Soient I et J deux idéaux maximaux. L'égalité impliquant les deux inclusions, il suffit de montrer l'implication $I \subset J \Longrightarrow I = J$ (l'autre implication suivra en échangeant les rôles de I et J). Supposons donc $I \subset J$. Si par l'absurde l'inclusion était stricte, on aurait $I \subsetneq J \subset A$, d'où (par maximalité de I) l'égalité $J = A$, contredisant la maximalité de J.

   (1 pt) Par conséquent, l'hypothèse peut se réécrire $\forall s \in S,\ \mathfrak{M} \not\subset \mathfrak{m}_s$, *i. e.* $\forall s \in S,\ \exists a \in \mathfrak{M} \backslash \mathfrak{m}_s$, ou encore $\forall s \in S,\ \exists a \in A,\ a \in \mathfrak{M} \backslash \mathfrak{m}_s$ *i. e.* (par l'axiome du choix) $\exists a \in A^S,\ \forall s \in S,\ a_s \in \mathfrak{M} \backslash \mathfrak{m}_s$.

[3] une application linéaire est additive et homogène, donc préserve (par composition à droite) les caractères sous-additif et positivement homogène

(b) **(1,5 pts)** Soit $s \in S$. Puisque $a_s \notin \mathfrak{m}_s$, la fonction a_s ne s'annule pas en s, donc (par continuité) ne s'annule pas sur un certain ouvert de $[0,1]$ contenant s. Par définition de la topologie induite sur S, un tel ouvert s'écrit $O \cap S$ où O est un ouvert de $\mathbf{R}$ contenant s, donc contient[4] $]\alpha,\beta[\cap S$ pour certains réels α et β. La densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ nous donne alors deux rationnels u et v dans respectivement $]\alpha,s[$ et $]s,\beta[$: l'intervalle $]u,v[$ convient. On en déduit (par l'axiome du choix[5]) une famille d'intervalles répondant à la question.

(c) **(1 pt)** La fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \hookrightarrow & \mathbf{Q}^2 \\ I & \longmapsto & (\inf I, \sup I) \end{array}\right.$ est clairement injective, d'où (vu la dénombrabilité de $\mathbf{Q}^2$) l'au-plus-dénombrabilité cherchée.

(1 pt) Soit i une injection $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathbf{N}$ (on vient d'en exhiber une). Les intervalles I_s ayant même image par i étant tous égaux, il suffira de n'en garder qu'un seul parmi eux pour reconstituer $\mathcal{I}$: on va donc envoyer cette image (un certain naturel n) sur n'importe quel $s \in S$ tel que $I_s \overset{i}{\mapsto} n$. Précisons cela. Soit c une fonction de choix sur S. On définit une suite $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & S \\ n \in \operatorname{Im} i & \longmapsto & c\left(\{s \in S \ ; \ i(I_s) = n\}\right) \\ n \notin \operatorname{Im} i & \longmapsto & c(S) \end{array}\right.$.

Montrons l'inclusion $\mathcal{I} \subset \{I_{s_n} \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$ (celle $\supset$ est triviale). Soit $I \in \mathcal{I}$. Notons $n := i(I)$ et $\sigma := s_n$. L'égalité $i(I_\sigma) = n$ se réécrit $i(I_{s_n}) = i(I)$, *i. e.* (par injectivité de i) $I_{s_n} = I$, ce qui conclut.

(d) **(2 pts)** Puisque tout s tombe dans I_s, on a l'inclusion $S \subset \bigcup_{s\in I} I_s = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_{s_n}$. Supposons par l'absurde $\forall N \in \mathbf{N},\ S \subsetneq \bigcup_{n=0}^{N} I_{s_n}$. Soit c une fonction de choix sur S. On peut alors définir une suite $(\sigma_n) \in S^{\mathbf{N}}$ par $\sigma_0 = c(S)$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ \sigma_{n+1} = c(S \backslash \bigcup_{i=0}^{n} I_{\sigma_i})$. Par compacité de S, on peut extraire une sous-suite $(\sigma_{\varphi(n)})$ tendant vers un certain $\sigma \in S$. Alors tous les $\sigma_{\varphi(n)}$ tombent dans l'ouvert I_σ pour n suffisamment grand. Soit N tel que $I_\sigma = I_{s_N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\sigma_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^{n} I_{\sigma_i}$, d'où $\forall n > N,\ \sigma_n \notin I_{s_N} = I_\sigma$, ce qui montre qu'à partir d'un certain rang *aucun* σ_n ne peut tomber dans I_σ : contradiction.

(e) **(1 pt)** L'élément $\sum_{n=1}^{N} a_{s_n}^2$ reste dans $\mathfrak{M}$ mais ne peut s'annuler (un éventuel zéro tomberait dans S, donc dans un certain I_{s_n}, donc ne pourrait annuler a_{s_n}), donc est inversible, ce qui montre que $\mathfrak{M}$ est l'idéal plein, contredisant sa maximalité.

Un anneau métrisé où la relation de divisibilité est totale. (18 pts)

Une notation très utile : pour tout $(n,a) \in \mathbf{N} \times A$, on notera $[a]_n$ le n-ième terme de la suite a.

Une observation très utile : pour tout $(n,a,b) \in \mathbf{N} \times A^2$, le n-ième coefficient du produit ab ne dépend que des $a_{i\leq n}$ et des $b_{i\leq n}$, il vaut plus précisément celui du polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi^i \sum_{i=0}^{n} b_i\xi^i$ (on a noté ξ l'indéterminée des polynômes pour la distinguer de l'élément $X \in A$). On va donc pouvoir utiliser ce que nous savons des polynômes sans avoir à le redémontrer.

1. **(4 pts)** Montrons que $(A,*)$ est un monoïde abélien distributif sur $+$. Soient $a,b,c \in A$ et $n \in \mathbf{N}$. Notons $\alpha := \sum_{i=0}^{n} a_i\xi^i$, $\beta := \sum_{i=0}^{n} b_i\xi^i$, $\gamma := \sum_{i=0}^{n} c_i\xi^i$, u le polynôme 1 et U l'élément $(1,0,0,0,...)$ de A. L'observation préliminaire montre $[ab]_n = [\alpha\beta]_n = [\beta\alpha]_n = [ba]_n$, d'où la commutativité de $*$. On a de même $[aU]_n = [\alpha u]_n = [\alpha]_n = a_n$, d'où la neutralité de U (pas besoin de vérifier l'autre sens puisque A est commutatif) et

$$\begin{aligned}
[a(b+c)]_n &= \left[\alpha \sum_{i=0}^{n} [b+c]_i \xi^i\right]_n = \left[\alpha\left(\sum_{i=0}^{n} (b_i+c_i)\xi^i\right)\right]_n = \left[\alpha\left(\sum_{i=0}^{n} \left(b_i\xi^i + c_i\xi^i\right)\right)\right]_n \\
&= \left[\alpha\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\xi^i + \sum_{i=0}^{n} c_i\xi^i\right)\right]_n = [\alpha(\beta+\gamma)]_n = [\alpha\beta+\alpha\gamma]_n = [\alpha\beta]_n + [\alpha\gamma]_n \\
&= [ab]_n + [ac]_n = [ab+ac]_n\,,
\end{aligned}$$

[4] Il faut faire attention aux cas $s = \min S$ et $s = \max S$ où seul un côté de s est "utilisable". Notre présentation englobe ces cas pathologiques.

[5] On pourrait ici s'en passer. La préimage par a_s des réels strictement du signe de $a_s(s)$ est un ouvert de $[0,1]$ (comme préimage continue d'un ouvert), donc est l'intersection de $[0,1]$ avec un ouvert de $\mathbf{R}$. Or (description des ouverts de $\mathbf{R}$) un tel ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Puisque s appartient à cette réunion, l'unique intervalle de cette réunion contenant s fait sens (appelons-le O_s) et l'on peut alors (en notant c un fonction de choix sur $\mathbf{Q}$) définir I_s comme l'intervalle ouvert d'*infimum* $c(]\inf O_s, s[)$ et de *supremum* $c(]s, \sup O_s[)$.

d'où la distributivité du produit sur l'addition. Il reste l'associativité :

$$\begin{aligned}[a\,(bc)]_n &= \left[\alpha\sum_{i=0}^{n}[bc]_i\,\xi^i\right]_n = \left[\alpha\left(\sum_{i=0}^{n}[\beta\gamma]_i\,\xi^i\right)\right]_n \overset{\text{n'interviennent pas les}}{\underset{\text{coefficients d'indice }>n}{=}} \left[\alpha\left(\sum_{i=0}^{2n}[\beta\gamma]_i\,\xi^i\right)\right]_n \\ &= [\alpha\,(\beta\gamma)]_n = [(\alpha\beta)\,\gamma]_n = [\gamma\,(\alpha\beta)]_n \overset{\text{même}}{\underset{\text{calcul}}{=}} [c\,(ab)]_n = [(ab)\,c]_n\,,\ c.\ q.\ f.\ d.\end{aligned}$$

(1 pt) Montrons enfin la compatibilité des deux multiplications, ce qui montrera que A est une K-algèbre. Soit $\lambda \in K$. On a les égalités

$$\begin{aligned}[(\lambda a)\,b]_n &= \left[\sum_{i=0}^{n}[\lambda a]_i\,\xi^i\beta\right]_n = \left[\sum_{i=0}^{n}\lambda a_i\xi^i\beta\right]_n = [\lambda\,(\alpha\beta)]_n = \lambda\,[\alpha\beta]_n = \lambda\,[ab]_n = [\lambda\,(ab)]_n \\ \text{et }\ [a\,(\lambda b)]_n &= [(\lambda b)\,a]_n \overset{\text{même}}{\underset{\text{calcul}}{=}} [\lambda\,(ba)]_n = [\lambda\,(ab)]_n\,,\ c.\ q.\ f.\ d.\end{aligned}$$

2. **(2 pts)** Soient k et n deux naturels. Puisque $[X]_n = \left[\sum_{i=0}^{n}[X]_i\,\xi^i\right]_n = \left[\sum_{i=0}^{n}\delta_i^1\xi^i\right]_n = [\xi]_n$, l'associativité et l'observation préliminaire permettent de calculer $\left[X^k\right]_n = \left[\xi^k\right]_n = \delta_n^k$. Il en résulte $v\left(X^k\right) = k$.

   (1 pt) On a directement $v(0) = \inf_{\overline{\mathbf{N}}}\{n \in \mathbf{N}\ ;\ [0]_n \neq 0\} = \inf_{\overline{\mathbf{N}}}\{n \in \mathbf{N}\ ;\ 0 \neq 0\} = \inf_{\overline{\mathbf{N}}}\emptyset = \max\overline{\mathbf{N}} = \infty$.

3. **(1 pt)** Montrons la séparation. Soient $a, b \in A$. On a les équivalences

$$d(a,b) = 0 \iff 42^{-v(a-b)} = 0 \iff v(a-b) = \infty \iff a - b = 0 \iff a = b.$$

   (0,5 pt) La symétrie est évidente puisque la valuation est inchangée par opposition de son argument.

   (1,5 pt) Montrons la comparaison triangulaire. On utilisera la comparaison $v(\alpha+\beta) \geq \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$ valide pour tous $\alpha, \beta \in A$. Soient $a, b, c \in A$. On a les comparaisons

$$\begin{aligned}d(a,c) &= 42^{-v(a-c)} = 42^{-v((a-b)+(b-c))} \leq 42^{-\min\{v(a-b),v(b-v)\}} = \max\left\{42^{-v(a-b)}, 42^{-v(b-c)}\right\} \\ &= \max\{d(a,b), d(b,c)\} \leq d(a,b) + d(b,c)\,,\ c.\ q.\ f.\ d.\end{aligned}$$

   (1 pt) Soit $a \in A$. Soit $N \in \mathbf{N}$. Vu la nullité de $\left[a - \sum_{n=0}^{N} a_n X^n\right]_k$ pour tout naturel $k \leq N$, la valuation de $a - \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ est supérieure à N, d'où les comparaisons et tendance

$$d\left(\sum_{n=0}^{N} a_n X^n, a\right) = 42^{-v\left(a - \sum_{n=0}^{N} a_n X^n\right)} \leq 42^{-N} \longrightarrow 0.$$

   (1 pt) Supposons que d découle d'une norme. Alors la distance à 0 est une norme $a \mapsto 42^{-v(a)}$, donc est positivement homogène, ce qui n'est pas le cas puisque la valuation est inchangée par homothétie de rapport 2.

4. **(1,5 pts)** $K[X]$ est clairement un sous-espace vectoriel de A. L'observation préliminaire montre que le produit restreint à $K[X]$ est le produit de cette algèbre. Ainsi $K[X]$ est-elle une partie de A qui est une K-algèbre pour les lois induites, donc est une sous-K-algèbre. La question précédente montre qu'elle dense puisque tout $a \in A$ est limite de la suite de polynômes $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n X^n\right)_N$.

5. **(1,5 pt)** Soit $b \in A$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}ab = 1 &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ [ab]_n = [1]_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ a_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} = \delta_n^0 \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ b_n = \frac{\delta_n^0 - \sum_{0 \leq j < n} a_{n-j} b_j}{a_0}.\end{aligned}$$

Or les dernières égalités définissent une unique suite (b_n) par récurrence, d'où l'existence d'un inverse pour a et l'appartenance $a \in A^\times$.

6. **(1 pt)** Soit $a \in A$. Par définition de la valuation, on peut écrire $a = X^{v(a)}u$ où $u_0 \neq 0$ (*i. e.* $u \in A^\times$ d'après la question précédente), ce qui montre que a et $X^{v(a)}$ sont associés. Soit $b \in A$. Puisque les valuations sont totalement ordonnées (elles sont dans $\mathbf{N}$), on a : ou bien $v\,(a) \leq v\,(b)$, auquel cas $a \sim X^{v(a)} \mid X^{v(b)} \sim b$, ou bien $v\,(b) < v\,(a)$, auquel cas $b \mid a$.
7. **(1 pt)** Invoquons une telle norme. Soit $a \in A$. Notons $s : n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Par hypothèse, la suite (s_n) converge (vers a), donc la suite $(a_n X^n) = (s_n - s_{n+1})$ tend vers $a - a = 0$. Si l'on impose $a := \left(\frac{1}{\|X^n\|}\right)$, la suite $(a_n X^n)$ reste sur la sphère unité, ce qui contredit sa tendance vers 0.