Devoir surveillé

samedi 11 octobre 2014

Mise en bouche.

1. *Soit M un monoïde. Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} M^\times & \longrightarrow & M^\times \\ m & \longmapsto & m^{-1} \end{array}\right.$ *est bien définie, involutive et "inverse" la loi de M.* **On ne supposera connues uniquement les définitions d'un monoïde et d'un inversible ainsi que les notations $M^\times$ et m^{-1}.**
2. *Soit G un groupe. On définit* $i : \left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}\right.$. *Montrer que G est abélien ssi i est un automorphisme de groupes. Montrer que G* est *abélien ssi sa loi de composition est un morphismes du groupe G^2 vers G.*
3. *Soit G un groupe. Soit $a \in G$. On note* $\delta_a : \left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xa \end{array}\right.$ *et* $\gamma_a : \left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & ax \end{array}\right.$. *Montrer que δ_a et γ_a induisent des bijections sur leurs images et en exhiber les réciproques. Est-ce δ_a ou γ_a est un automorphisme de G ? un endomorphisme de G ? Déterminer tous les $g \in G$ tel que $\delta_g \in \operatorname{Aut} G$.*

Sous-groupes cycliques. Soient a et b dans $\mathbf{N}^*$.

1. *Montrer que $\mathbf{U}_a$ est un sous-groupe de $\mathbf{U}_b$ ssi $a \mid b$.*
2. *Montrer qu'il y a un unique morphisme $\varphi : \mathbf{U}_a \times \mathbf{U}_b \longrightarrow \mathbf{U}_{ab}$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} & \subset & \mathbf{U}_{ab} & \supset & \\ \mathbf{U}_a & & \uparrow \varphi & & \mathbf{U}_b \\ & \hookrightarrow & \mathbf{U}_a \times \mathbf{U}_b & \hookleftarrow & \end{array}$$

où les flèches $\hookrightarrow$ désignent les injections canoniques vers un produit de groupes depuis l'un de ses facteurs.

Décrire de manière simple l'action de ce morphisme sur son groupe source.

3. *Montrer que ce morphisme est un isomorphisme ssi a et b sont étrangers.*

Isomorphismes.

1. *Est-ce que les monoïdes $(\mathbf{N}^*, \times)$ et $(\mathbf{N}, +)$ sont isomorphes ? Exhiber le cas échéant un isomorphisme. Même question pour les groupes $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{C}^*$.*
2. *Déterminer lesquels groupes parmi $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, ${}^{\mathbf{Z}}\!/_{6}$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_6$ sont isomorphes.*
3. *Déterminer lesquels groupes parmi $GL_{42}(\mathbf{Q})$, $GL_{42}(\mathbf{R})$ et $GL_{42}(\mathbf{C})$ sont isomorphes.* (on pourra admettre pour tout corps K que le centre de $GL_n(K)$ est formé des matrices scalaires)
4. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et K un corps où $2 \neq 0$.
   (a) *Exhiber un plongement du groupe K^{*n} dans $GL_n(K)$ dont l'image est formée des matrices diagonales.*
   (b) On admettra qu'un sous-groupe de $GL_n(K)$ dont tous les éléments sont involutifs est nécessairement d'ordre $\leq 2^n$. *Réaliser l'égalité.*
   (c) *Conclure à l'implication $\forall a, b \in \mathbf{N}^*,\ GL_a(K) \simeq GL_b(K) \Longrightarrow a = b$.*

Entremets. On note @ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} \end{array}\right.$. Montrer que $(\mathbf{R}, @)$ est un groupe abélien tel que $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \exists r \in \mathbf{R},\ a = r^{@n}$.

Commutants. Soit G un groupe fini. On note $Z := Z(G)$. On muni l'ensemble G^2 de la mesure de probabilité uniforme (tous les (a,b) ont même probabilité). On note p la probabilité que deux éléments de G commutent. On suppose $p < 1$.

1. *Montrer l'égalité $p = \frac{1}{|G|^2} \sum_{a \in G} \# \operatorname{Comm}\{a\}$, en déduire la comparaison $|G|^2 p \leq |Z|\,|G| + (|G| - |Z|) \frac{|G|}{2}$.*
2. Pour tout $g \in G$, on note $\overline{g} := gZ$. *Rappeler pourquoi l'ensemble ${}^{G}\!/_{Z} := \{\overline{g}\ ;\ g \in G\}$ est un groupe pour la loi $(\overline{a}, \overline{b}) \mapsto \overline{ab}$. Montrer que ce groupe ne peut être cyclique. En déduire $\frac{|Z|}{|G|} \leq \frac{1}{4}$.*
3. *Conclure $p \leq 62,5\%$. Peut-on réaliser le cas d'égalité ?* (hint : quaternions).