DM 2 à rendre le mercredi 8 janvier

Pour tout le devoir, on fixe un evn E.

Exercice 1 (projecteurs). Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note P_n l'ensemble des projecteurs de $M_n(\mathbf{K})$ (matrices idempotentes).

1. *Déterminer la frontière de P_{42}.*
2. *Trouver tout les $n \in \mathbf{N}^*$ tel que P_n soit compact.*

Exercice 2 (plus petite boule incluant un compact). *Soit K un compact de E. Montrer qu'il y a une unique boule fermée de rayon minimal contenant K.* (hint : $a \mapsto \inf \left\{r > 0 \; ; \; K \subset a + r\overline{\mathbf{B}}\right\}$)

Exercice 3 (théorème de Markov-Kakutani). Soit K un convexe compact non vide de E.

1. *Soit f une application affine continue de K dans K. En considérant la moyenne des itérés d'un point arbitraire, montrer que f admet un point fixe.*
2. *Généraliser à une famille finie d'applications affines de K dans K commutant deux à deux, puis à une famille (commutative) non nécessairement finie.*

Exercice 4 (précompacité). Une partie de E est dite ***précompacte*** si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut la recouvrir par une réunion finie de boules de rayon $\leq \varepsilon$.

1. *Montrer qu'une partie de E est compacte ssi elle est précompacte et complète.* (hint : argument diagonal)
2. *Montrer qu'une partie $A \subset E$ est précompacte ssi toute suite de $A^{\mathbf{N}}$ admet une sous-suite de Cauchy. Retrouver le point précédent.*

Exercice 5 (algèbre commutative). Soit A une algèbre de Banach commutative.

1. *Montrer que $1 - \mathbf{B} \subset A^{\times}$.*
2. *En déduire que $A^{\times}$ est ouvert.*
3. *Montrer que les idéaux maximaux de A sont fermés.*

Exercice 6 (fermés emboités).

1. *On suppose que E est un Banach. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés bornés non vides dont le diamètre tend vers 0. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est un singleton.*
2. *Donner des contre-exemples si l'on retire l'une des hypothèses.*
3. *On suppose que l'intersection de toute suite de fermés comme ci-dessus est un singleton. Montrer que E est complet.*

Exercice 7 (théorèmes de points fixes)

1. *Soit C un complet (non vide) de E. Soit $f : C \longrightarrow C$ contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.* (hint : itérer un point donné)
2. *Soit C un complet (non vide) de E. Soit $f : C \longrightarrow C$ dont une itérée est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.*
3. *Soit K un compact (non vide) de E. Soit $f : K \longrightarrow K$ telle que $\forall a, b \in K, \; \|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$. Montrer que f admet un unique point fixe.*

Exercice 8 (équations différentielles de Fredholm et de Volterra). Soit $S = [a, b]$ un segment. Soit Λ une fonction scalaire définie sur S^2. On suppose $E = C^0(S, \mathbf{K})$ muni de la norme L^∞. Soit $e \in E$.

1. Montrer que l'équation $\forall s \in S, \; x(s) = e(s) + \int_a^b \Lambda(t, s)\, x(t)\, dt$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution si $\ell(S)\, \|\Lambda\|_\infty < 1$. (hint : les solutions sont les points fixes d'un certain opérateur)
2. Montrer que l'équation $\forall s \in S, \; x(s) = e(s) + \int_a^s \Lambda(t, s)\, x(t)\, dt$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution. (hint : certaines itérées d'un opérateur sont contractantes)