Devoir maison

(à rendre le lundi 3 novembre 2014)

Dans tout ce qui suit, les anneaux seront unitaires, non nuls, associatifs, commutatifs et intègres.

Soit A un anneau. On notera $|$ la relation de divisibilité, $\sim$ la relation "être associé" et $(a) := Aa = aA$ l'idéal principal engendré par un $a \in A$. On dit qu'un idéal est ***de type fini***[1] s'il est somme finie d'idéaux principaux.

On dit que A est :

1. ***principal*** si tout idéal est principal ;
2. ***maximalement principal*** si chaque idéal maximal[2] est principal ;
3. ***noethérien***[3] si toute suite croissante d'idéaux stationne ;
4. ***principalement noethérien*** si toute suite croissante d'idéaux principaux stationne ;
5. ***bézoutien*** si la somme de deux idéaux principaux est toujours un idéal principal ;
6. ***factoriel*** si tout élément non nul s'écrit comme produit d'une unité par un produit d'irréductibles, avec unicité *modulo* $\sim$ à l'ordre des facteurs près ;
7. ***euclidien*** s'il y a une application $s : A^* \longrightarrow \mathbf{N}$ (appelé ***stathme***[4] euclidien) telle que, pour tout $(a, b) \in A \times A^*$, il y a un $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $s(r) < s(b)$;
8. ***fortement euclidien*** s'il est euclidien et si le couple (q, r) ci-dessus est toujours unique.

On donne par ailleurs quelques noms d'énoncés (chacun quantifié universellement sur des $a, b, c, p \in A$) :

1. **théorème de Gauss 1** : si a divise bc et si a et b sont étrangers, alors a divise c ;
2. **théorème de Gauss 2** : si a et b divisent c et si a et b sont étrangers, alors ab divise c ;
3. **lemme d'Euclide** : si p est irréductible et divise ab, alors p divise a ou divise b ;
4. **théorème de Bézout** : si a et b sont étrangers, alors il y a des λ, μ tels que $\lambda a + \mu b = 1$.

Le but du devoir est d'étudier les implications entre les notions introduites ci-dessus.

Préliminaires sur les p. g. c. d. et p. p. c. m. Soient a, b, d, m dans A.

1. *Rappeler pourquoi, si A est factoriel, alors a et b admettent un p. g. c. d. et un p. p. c. m.*
2. *Montrer que m est un p. p. c. m. de a et b ssi $(a) \cap (b) = (m)$.*
3. *Montrer que si $(a) + (b) = (d)$, alors d est un p. g. c. d. de a et de b. Montrer que, si d est un p. g. c. d. de a et b, on a alors $(a) + (b) \subset (d)$. Donner un exemple d'inclusion stricte.*
4. On suppose que m est un p. p. c. m. de a et b. *Montrer que a et b admettent un p. g. c. d. En supposant que d est l'un deux, montrer $ab \sim dm$ et que la multiplication se distribue sur $\wedge$ et sur $\vee$.*
5. On suppose que tout couple de A^2 admet un p. g. c. d. *Montrer que a et b admettent un p. p. c. m.*

Remonter depuis l'unicité des facteurs irréductibles.

1. *Montrer que le lemme d'Euclide implique l'unicité modulo $\sim$ (à l'ordre près) des facteurs irréductibles de toute décomposition de la forme $u \prod_{i=1}^{n} p_i$ où u est une unité et où les p_i sont irréductibles.*
2. *Montrer que le théorème de Gauss 1 implique le lemme d'Euclide.*

[1] Si l'on pense un idéal comme un sous-espace vectoriel, alors les idéaux de types finis sont les analogues des sous-espaces vectoriels de dimension finie. (Cela ne reste qu'une analogie.)

[2] un idéal ***maximal*** est un idéal strict maximal pour l'inclusion (l'analogue vectoriel serait un *hyperplan*, tout comme l'analogue vectoriel d'un idéal principal serait une *droite*)

[3] de *Emmy Noether*, grande algébriste allemande du début XX$^{\text{e}}$

[4] en prolongeant $s(0) := -\infty$, on pourrait s'épargner la discussion $r = 0$

3. *Montrer l'équivalence des deux théorèmes de Gauss.*
4. *Montrer que le théorème de Gauss sera vérifié dans A si tout tout couple de A^2 admet un p. g. c. d. ou si A vérifie le théorème de Bézout.*
5. *Montrer que A est bézoutien ssi A vérifie le théorème de Bézout et si tout couple de A^2 admet un p. g. c. d.*
6. *On suppose A maximalement principal. Montrer le théorème de Bézout et que tout élément non inversible admet un diviseur irréductible.* (hint : on pourra utiliser le **théorème de Krull** qui affirme que tout idéal strict est inclus dans un idéal maximal)

De la noethérianité. On pourra utiliser des fonctions de choix[5] sur A et sur $\mathfrak{P}(A)$.

1. *Montrer que les corps sont noethériens.*
2. *Montrer que A est noethérien ssi tout idéal est de type fini.*
3. *En déduire qu'un anneau est principal ssi il est noethérien et bézoutien.*
4. *Montrer que A est noethérien (resp. principalement noethérien) ssi tout ensemble non vide d'idéaux (resp. d'idéaux principaux) admet un élément maximal pour l'inclusion.*
5. *En déduire que, si A est principalement noethérien, alors tout élément non nul s'écrit comme produit d'une unité par un produit d'irréductibles. Montrer qu'un anneau factoriel est principalement noethérien.*
6. *Montrer qu'un anneau est principal ssi il est factoriel et bézoutien. Même question en remplaçant "bézoutien" par "vérifiant le théorème de Bézout".*

Sur les anneaux euclidiens.

1. Soit k un corps. *Montrer que sont des anneaux euclidiens : k, $k[X]$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}[i]$.* (hint : tout quotient $\frac{a}{b}$ complexe est à distance < 1 d'un point de $\mathbf{Z}[i]$)
2. *Montrer qu'un anneau euclidien est principal.*
   On suppose dorénavant A fortement euclidien. Soit s un stathme de A.
3. On lève pour cette question l'hypothèse d'intégrité sur A. *Montrer quand même que A est intègre.*
4. *Montrer que s croît de $(A^*, |)$ vers $(\mathbf{N}, \leq)$. En déduire que deux éléments associés ont même stathme.*
5. *Montrer que les unités de A sont les éléments de stathme minimal.*
6. *Montrer que la partie $K := A^\times \cup \{0\}$ est un sous-corps de A.*
7. *Montrer $\forall (a, k) \in A \backslash A^\times \times K,\ s(a+k) = s(a)$.*
8. *Montrer que A est : ou bien un corps ou bien un anneau de polynômes sur un corps.*

Résumé. *Dessiner un joli graphe dont les points sont les propriétés de A étudiées ci-dessus (être noethérien, vérifier le théorème de Bézout, être un anneau où tout couple d'élément admet un p. p. c. m...) et dont les arêtes serviront à représenter les implications prouvées ci-dessus.* (hint : dessiner un tel graphe au fur et à mesure qu'on l'on avance dans le devoir)

[5] Une ***fonction de choix*** sur un ensemble E est une fonction $c : \mathsf{P}(E) \longrightarrow E$ telle que $\forall P \subset E,\ P \neq \emptyset \Longrightarrow c(P) \in P$. L'existence d'une telle fonction pour tout E équivaut à l'axiome du choix (que l'on admet généralement dans la mathématique usuelle).