Devoir maison

(à rendre le lundi 6 octobre 2014)

On note $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\overline{\mathbf{N}} := \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.
On définit $G := \{z \in \mathbf{C} \ ; \ \exists n \geq 1, \ z^n = 1\}$ l'ensemble des racines de l'unité.
Pour tout $(p, n) \in \mathbf{P} \times \mathbf{N}$, on note $G_{p^n} := \mathbf{U}_{p^n}$. Pour tout $p \in \mathbf{P}$, on note $G_{p^\infty} := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} G_{p^n}$.

On appelle ***support*** d'une famille $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{P}}$ la partie $\{p \in \mathbf{P} \ ; \ \alpha_p \neq 0\}$. On note $\overline{\mathbf{N}}^{(\mathbf{P})}$ la partie de $\overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{P}}$ formée des familles à support fini[1].

Le lecteur aura besoin du théorème de Bézout et du lemme de Gauss concernant l'arithmétique des entiers.

1. *Montrer que G est un groupe isomorphe au groupe additif ${}^{\mathbf{Q}}\!/\!_{\mathbf{Z}}$.*
   On utilisera désormais, afin d'alléger le discours, la notation additive modulo $\mathbf{Z}$.

2. Soit $(p, n) \in \mathbf{P} \times \overline{\mathbf{N}}$. *Que vaut G_{p^0} ? Montrer que G_{p^n} est un groupe. Quel est son cardinal ? Combien possède-t-il d'éléments d'ordre p ? Si $n < \infty$, montrer que G_{p^n} est monogène et expliciter un générateur. Est-ce que G_{p^∞} peut être engendré par un nombre fini d'éléments ?*

3. Soit H un sous-groupe de G. *Montrer que l'ensemble D_H des dénominateurs des éléments de H écrits sous forme irréductible s'écrit $\left\{d \in \mathbf{N}^* \ ; \ \frac{1}{d} \in H\right\}$.*
   En déduire que la correspondance ci-après est bien définie et est bijective :
$$\left\{\begin{array}{ccc} \{\text{sous-groupes de } G\} & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \{\text{parties de } \mathbf{N}^* \text{ stables par p. p. c. m. et diviseurs}\} \\ H & \longmapsto & D_H \\ \left\langle \frac{1}{d} \ ; \ d \in D \right\rangle =: H_D & \longleftarrow & D \end{array}\right. .$$
   Décrire simplement l'image par cette correspondance des sous-groupes finis.

4. *Montrer que l'application suivante est bijective :*
$$\left\{\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{N}}^{(\mathbf{P})} & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \{\text{parties de } \mathbf{N}^* \text{ stables par p. p. c. m. et diviseurs}\} \\ \alpha & \longmapsto & D_\alpha := \left\{\prod_{p \in \mathbf{P}} p^{e_p} \ ; \ \forall p \in \mathbf{P}, \ e_p \in \mathbf{N} \text{ et } v_p \leq \alpha_p\right\} \end{array}\right. .$$
   Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{N}}^{(\mathbf{P})}$, on note $H_\alpha := H_{D_\alpha}$.

5. Soient $(p \neq q, k, \ell) \in \mathbf{P}^2 \times \overline{\mathbf{N}}^2$. *Montrer que le groupe $G_{p^k} \times G_{q^\ell}$ est isomorphe à H_β où β est la famille de support $\{p, q\}$ qui envoie p sur k et q sur ℓ.*
   *En déduire pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{N}}^{(\mathbf{P})}$ que H_α est une somme directe (*i. e. *isomorphe à un produit fini) de sous-groupes de la forme G_{p^n} que l'on explicitera.*

6. Soit $(p, n) \in \mathbf{P} \times \overline{\mathbf{N}}$. Soient A et B deux groupes dont le produit $A \times B$ est isomorphe à G_{p^n}. *En dénombrant les éléments d'ordre 1 ou p, montrer que A ou B est le groupe trivial*[2].

[1] Par exemple, le théorème de factorisation en produit de premiers s'énonce en disant que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^{(\mathbf{P})} & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \mathbf{N}^* \\ \alpha & \longmapsto & \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{\alpha_p} \end{array}\right.$ est bijective.

[2] On dit que G_{p^n} est ***indécomposable*** (analogue chez les groupes du caractère premier chez les entiers)