Groupes symétriques & déterminant (5h)

Marc SAGE

mercredi 7 et samedi 25 janvier

Table des matières

1 Groupes symétriques

def groupe $\mathfrak{S}_E$, lemme Cauchy (universalité des $\mathfrak{S}_E$)

$E \simeq F \Longrightarrow \mathfrak{S}_E \simeq \mathfrak{S}_E$ par conjugaison –> l'action des permutation est la même à réétiquetage près.

def $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ cardinal $n!$.

réalisation de $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$ comme symétries du segment (de $\mathbf{R}$) et du riangel équil (de $\mathbf{R}^2$), observer les transformation qui conerdvent/inversent l'orientation

def cycle (longueur $\neq 1$), transposition, support, orbite (abus cycle<->orbite). $\quad S\sigma \cap S\rho = \emptyset \Longrightarrow \sigma\rho = \rho\sigma$

$\mathfrak{S}_E$ pas abélien : $(a,b)(b,c) = (a,b,c) \neq (c,b,a) = (c,b)(b,a) = (b,c)(a,b)$

★PT : conjuguaison d'un l-cycle

★TH : décomposition en cycles à suports disjoints

preuve par un exemple ($n = 4$)

déf partition associée, diagramme de Young

COR 1 : deux permutation sont conjuguées ssi même daig de Young

=> $\varphi\sigma\varphi^{-1} = \prod \varphi\gamma_i\varphi^{-1}$ $\quad$ <= admis (on construit φ pas à pas)

COR 2 : les transpositions engendrent (lemme $(a,b,c,\ldots,z) = (a,b)(b,c)\ldots(c,z)$). Autre générateurs en TD

Question : caractères multiplicatifs de $\mathfrak{S}_n$?

Analkyse : Soit χ un tel (autre que Id).

χ est déterminé par les $\chi(\tau)$

τ involutin =>$\chi(\tau)$ invouluti de $\mathbf{C}^*$ donc ± 1

tranpo ttes conjuguées (même diag de Young) donc (car $\mathbf{C}^*$ abéline) le signe est le même.

ainsi $\chi(\sigma) = \prod \chi(\gamma) = \prod (-1)^{l(\gamma)-1} = (-1)^{n-\#\operatorname{Orb}\sigma}$.

Synthèse : def de signature $\varepsilon(\sigma) := (-1)^{n-\#\operatorname{Orb}\sigma}$.

PT : ε est un morphisme de groupes vlant -1 sur les transpo

LEMME cut and join. $\quad$ Soit σ, soit τ transpo. Si τ échange deux el d'une mêe orbite, alors $\sigma\tau$ a une orbite de plus, sinon une de moins. Notons $\tau = (a,b)$. CUT : Notons alors l'orbite $(a, a_2, \ldots, a_p, b, b_2, \ldots, b_q) := \gamma$. Alors $\gamma(a,b) = (ab_2\ldots b_q)(ba_2\ldots a_p)$. JOIN : notons les orbites $(aa_2\ldots a_p)$ et $(bb_2\ldots b_q)$. Alors $\gamma\tau = (b, a_2, \ldots, a_p, a, b_2, \ldots, b_q)$.

Def pair / impair, rapport avec orientation préservée ou non pour réalisation géomatrique, groupa alterné $\mathfrak{A}_n$. Cardinal $\frac{n!}{2}$ (composer par une translation, ou bien factoriser le morphisme $\varepsilon \twoheadrightarrow Z/2$)

Réalisation matricielle. $\quad P_\sigma := \left(\delta_i^{\sigma(j)}\right)$. Eg cyclique $\begin{matrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{matrix}$, agit en faisant tourner les coordonée d'un vecteur.

PT : $\sigma \mapsto P_\sigma$ morphisme (calcul direct). D'où l'implication $\sigma \sim \rho \Longrightarrow P_\sigma \sim P_\rho$ (réciproque plus tard : gros th de Brauer)

COR : toute P_σ est conjugée à un $\bigoplus$ de matrices cycliques comme ci-dessus.

EXO : nb orbites de de σ^r ? $\quad$ pour un l-cycle γ, si $r \mid l$, on trouve r orbites de ongueur $\frac{l}{r}$; pgcd donne $l \wedge r$ orbites de longueurs $\frac{l}{l\wedge r}$ (car $\langle \gamma^r \rangle = \langle \gamma^{l\wedge r} \rangle$) . Donc pour un σ on trouve $\sum_l c_l(\sigma) \cdot (l \wedge r)$ orbites.

2 Déterminant

PRoblème : formaliser le volume d'un parallélépipède ds $\mathbf{K}^n$.

Axiomes : volume *signé*, linéair en chaque vecteur, nulle si parall plat (ie si vecteurs liés.

Soit $v : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ multilinéaire et nulle sur les famille liée. En particulier, nulle si répéte (alternée), donc antisym, donc $v(\sigma \cdot \overrightarrow{e}) = \varepsilon(\sigma)\, v(\overrightarrow{e})$. Alors $v(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_i a_i^{\sigma(i)}\right) v(e_1, \ldots, e_n)$. Donc les forme volume sont déterminée à une constante près (choix d'un volume unité) : elles consitutent une droite linéaire.

Def $\det A = |A| = \sum_{\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_i a_i^{\sigma(i)}$ pour $A \in M_n(K)$: somme alternée de serpents $\quad$ Expliciter $n = 2, 3$ (Sarrus)

(rq : qd $n = 0$, on a $\mathfrak{S}_0 = \{\emptyset\}$ d'où $\det \emptyset = 1$)

PT $\quad |{}^tA| = |A| \quad$ (réindex $\rho := \sigma^{-1}$)
PT : multlinéaire en les colonnes et en les lignes, alternée, antisym, nulle si lié
<= les formes multilin alternée forment une droites dirigée par det

EG $\quad \det P_\sigma$, $\det I_n$, $\det \begin{matrix} & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & \end{matrix}$, det(cycliqu), det triangluire

★ PT : $|AB| = |A|\,|B|$ par le calcul pur (<= vraie modulo les caractère de K, cf TD)

exos : $\det i \wedge j$, fin Brauer, $\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|\,|B|$

★ COR $|A| \neq 0$ ssi A inversible $\quad$ <= clair ; => (lemme : $A \sim J_r$, donc $|A| = (\neq 0)\,\delta_0^r\,(\neq 0)$)
COR $GL_n(\mathbf{R})$ ouvert dense
exo $GL_n(\mathbf{Q})$ dense dans $GL_n(\mathbf{R})$
exo $\sim$ sur $\mathbf{C}$ => $\sim$ sur $\mathbf{R}$
exo pour quelles A a-t-on $|A+M| = |A| + |M|$ (reparamétrer par J_r)

3 Polynôme caractérisitique

perturber par martice diagonale donne $\det(A + \operatorname{diag}(t_1, ..., t_n)) = \sum_{I \subset} |A_I| \prod_{i \in I} t_i$ (détailler le calcul si $2 \neq 0$)

Def : $\chi_A := \det(XI_n - A) = X^n - (\operatorname{tr} A)\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$.

PT $\chi : M_n \longrightarrow K[X]$ continue et est d'image les poly unitaires de degré n

DEM : toutes les composantes sont des polynômes en les coef de A.

DEM : matrice compagnon $\chi \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = X^n + \sum_{i<n} a_i X^i$ (regrouper les σ selon $\sigma(n)$). On en déduit $\chi(P_\gamma) = X^n - 1$: les mat compagnons sont aussi appelée matrices cycliques ($\exists v$ dont n première itérées forment une base)

PT : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, donc invariatn par conjugaison (on peut définir χ_f pour $f \in L(E)$ en dim finie)
d'abod ok si A inversibles. Ensuite :
1) plonger $M_n(K) \hookrightarrow M_n(K(X_{i,j}))$ puis spécialiser
2) ok si $A = J_r$ (par blocs) puis chnger de côté les facteurs de $A = PJ_rQ$
3) $\chi_{(A-t)B} - \chi_{B(A-t)} \in K[X]$ est nul pour infinité de t, donc le poly $\chi_{(A-T)B} - \chi_{B(A-T)} \in K(X)[T]$ a une infinité de racine, donc est nul en 0.
4) si $K = \mathbf{K}$, continuité de χ et densité de GL

TH : Cayley Hamiton : $\chi_A(A) = 0$

App *Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer les polynômes P de $K[X]$ tels que $Z(P) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \;;\; P(A) = 0\}$ soit compact.*

Pour $n = 1$, tout polynôme convient, l'ensemble $Z(P)$ s'identifiant alors à l'ensemble (fini) des racines de P. On peut supposer $n \geq 2$.

Les poynômes $X - \lambda$ conviennent car n'annulent que la matrice scalaire λ. Montrons que ce sont les seuls.

Soit un tel P. $Z(P)$ est stable par conjugaison, donc ne peut contenir que des matrices dont la classe de similitude est bornée, à savoir des matrices scalaires. Or la matrice compagnones de P est annulée par P, ce qui force $n = 1$.

Non traité :

★ développment lignes/colonnes
exos $\quad$ Vandermonde, Hurwitz, dérangement pair ou impairs plus nombreux
COR : $A\,{}^t\operatorname{com} A = |A|\,I = ({}^t\operatorname{com} A)\,A$
exo $t \mapsto P(t)$ de $C \longrightarrow GL_n(C)$ dont toutes composantes sont poly : mq $t \mapsto P(t)^{-1}$ aussi
exo Dans $M_n(\mathbf{Z})$, Si $|A| \wedge |B| = 1$, mq $\exists U, V$ tq $AU + BV = I_n$

PT : action de det par opération élémentaire
det $\binom{n+i}{j}_{0\leq i,j\leq p}=1$ (rec)
si $AB=BA$ dans$\mathbf{R}$, mq $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}\geq 0$. (introduire du i)
formulle de Miller (via astruce de Bruno).

EXO $\operatorname{com} A$ est la driection depuis A dans laquelle det augemnt le plus (gradient) : $\nabla \det = \operatorname{com}$.

démo CH (par les séries) : $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(re^{i\theta}\right)^{k+1}}{re^{i\theta}-A}\frac{d\theta}{2\pi}=A^k$, d'où $\chi_A(A)=\int re^{i\theta}\underbrace{\operatorname{com}\left(re^{i\theta}-A\right)}_{\text{polynôùe en } re^{i\theta}}=0$.