Espaces vectoriels normés (18h)

Marc SAGE

vendredi 10, lundi 13, vendredi 17 octobre, lundi 3, vendredi 7, mercredi 12 novembre 2014

Table des matières

On suppose acquis un minimum d'analyse sur le corps des réels ainsi que quelques extensions au cas complexe. En voyant le module complexe $|\cdot|$ comme une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^2$, on obtient un passage naturel du module à la norme : il suffira tout simplement de réécrire toutes les définitions et démonstrations en doublant le nombre de barres ! Nous commencerons par une étude générale des valeurs absolues sur un anneau afin de continuer le fil arithmétique du chapitre précédent, les corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}_p$ pouvant tout deux servir pour faire de l'analyse (bien que la topologie ultramétrique soit déroutante).

1 Corps normés (& valués)

Soit A un anneau non nul.

Définition (normes, anneaux normés). *On appelle* ***valeur absolue*** *ou* ***norme*** *sur A toute application* $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & |a| \end{array}\right.$ *telle que*

1. $\forall a,b \in A,\ |ab| = |a|\,|b|$;
2. $\forall a \in A,\ |a| = 0 \iff a = 0$;
3. $\exists C \in \mathbf{R},\ \forall a,b \in A,\ |a+b| \leq C \max\{|a|,|b|\}$.

On dira que A est ***normé*** *si l'on s'est donné une norme sur A.*

Exemples.
$\mathbf{C}$ et tous ses sous-annneaux (dont $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$) sont normés par le module complexe (prendre $C = 2$ et utiliser l'inégalité triangulaire).
La ***norme triviale*** sur A vaut 1 partout et 0 en 0 (prendre $C = 1$).

Remarques & propriétés. On suppose A normé et on invoque un réel C comme en 3.

1. **(signes)** 1 étant idempotent dans A, sa norme l'est dans $\mathbf{R}$, donc vaut ou bien 1 ou bien 0 : le deuxième cas implique $1 = 0$ (d'après 2), d'où la nullité (absurde) de A. On en déduit $1 = |1+0| \leq C \max\{|1|,|0|\} = C$ puis (à $a \in A$ fixé) $|a| = |a+0| \leq C\,|a|$, d'où la positivité de $|\cdot|$. De même, $|\pm 1|$ est positif et de carré 1, donc vaut 1, d'où l'on déduit $|-a| = |a|$ pour tout $a \in A$. On retiendra

$$\begin{aligned} &|\pm 1| = 1\,; \\ &|-a| = |a| \geq 0 \text{ avec égalité ssi } a = 0\,; \\ &|a+b| \leq C \max\{|a|,|b|\} \text{ pour un certain } C \geq 1. \end{aligned}$$

2. **(intégrité)** S'il est commutatif, alors A est *intègre* vu les implications (à a,b fixés dans A)

$$ab = 0 \Longrightarrow |ab| = 0 \Longrightarrow |a|\,|b| = 0 \Longrightarrow \left\{ {\scriptstyle \text{ou}} \begin{array}{c} |a| = 0 \\ |b| = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ {\scriptstyle \text{ou}} \begin{array}{c} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. .$$

   On peut alors prolonger la norme de A à son corps des fractions en définissant

$$\forall (a,b) \in A \times A^*,\ \left|\frac{a}{b}\right| := \frac{|a|}{|b|}$$

   (exercice : montrer que cette définition est légitime et est la seule possible). Ainsi prolonge-t-on la valeur absolue de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Q}$.

3. **(normes équivalentes)** L'application $|\cdot|^\lambda$ est une norme pour tout réel $\lambda > 0$. Deux telles normes seront dites ***équivalentes***. (En faisant tendre λ vers 0, on peut voir la norme triviale comme le "point limite" de toute les normes.)
4. **(normes triangulaires)** Si $C \leq 2$, on peut montrer les ***comparaisons triangulaires*** $|a+b| \leq |a|+|b|$ (on a déjà vu la réciproque) d'où découlent les comparaisons $||a|-|b|| \leq |a \pm b|$. On peut toujours se ramener à ce cas en élevant la norme de A à une puissance $\leq \frac{\ln 2}{\ln C}$ (la norme obtenue reste équivalente à $|\cdot|$).

5. **(normes triangulaires ultramétrique)** Si $C = 1$, la comparaison 3 et la norme dont dites ***ultramétriques***. Dans le cas contraire, la norme est dite ***archimédienne***. On peut montrer (exercice !) les équivalences $\begin{cases} |\cdot| \text{ ultramétrique} \iff \mathbf{Z} \text{ borné par } 1 \\ |\cdot| \text{ archimédienne} \iff \mathbf{Z} \text{ pas borné} \end{cases}$, d'où la terminologie (rappelons qu'Archimède a écrit un traité sur les grands nombres). En corollaire, *si A est de caractéristique première, alors toute ses normes sont ultramétriques.*

Les normes ultramétriques se formulent plus agréablement dans le langage des valuations.

Définition (valuations). *On appelle **valuation** sur A toute application $v : A \longrightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ telle que*

1. $\forall a, b \in A,\ v(ab) = v(a) + v(b)$;
2. $\forall a \in A,\ v(a) = \infty \iff a = 0$;
3. $\forall a, b \in A,\ v(a+b) \geq \min\{|a|, |b|\}$.

*On dira que A est **valué** si l'on s'est donné une valuation sur A.*

Exemples (valuations sur un anneau factoriel). Sur $\mathbf{Z}$, toutes les valuations p-adiques pour p décrivant les premiers, qui se prolongent en autant de valuations sur $\mathbf{Q}$. Sur $K[X]$ où K est un corps, toutes les valuations P-adiques pour P décrivant les irréductibles (la valuation usuelle – indice du plus petit coefficient non nul – est la valuation X-adique).

Propriété (valuations & normes ultramétriques). *Soit $\lambda > 1$ un réel. Alors les valuations de A et les normes ultramétriques de A sont en bijection via $v \mapsto \lambda^{-v}$.*

Remarque (normes p-adiques). Soit p un premier. Il est usuel[1] de choisir $\lambda := p$ pour définir la norme p-adique $|a|_p := p^{-v_p(a)}$.

Preuve de la propriété. Soit v une valuation sur A. Vérifions que $|\cdot| := \lambda^{-v}$ est une norme ultramétrique. Soient a et b dans A. On a les égalités

$$|ab| = \lambda^{-v(ab)} = \lambda^{-(v(a)+v(b))} = \lambda^{-v(a)-v(b)} = \lambda^{-v(a)}\lambda^{-v(b)} = |a|\,|b|.$$

On a les équivalences $|a| = 0 \iff \lambda^{-v(a)} = 0 \iff v(a) = \infty \iff a = 0$. On a les comparaisons

$$|a+b| = \lambda^{-v(a+b)} \leq \lambda^{-\min\{v(a),v(b)\}} \overset{\text{car } \lambda>1}{=} \max\left\{\lambda^{-v(a)}, \lambda^{-v(b)}\right\} = \max\{|a|, |b|\}.$$

Les exemples qui précèdent épuisent les normes sur $\mathbf{Q}$ au sens suivant.

Théorème (Ostrowski) (classification des normes sur Q). *Toute norme sur $\mathbf{Q}$ non triviale est équivalente ou bien à la valeur absolue usuelle (si elle est archimédienne) ou bien à une valuation p-adique (si elle est ultramétrique).*

Reprenons à présent les outils d'analyse séquentielle. Si (c_n) est une suite de chiffres, quel sens peut-on donner à $c_0, c_1c_2c_3...$? à $...c_nc_{n-1}...c_2c_1c_0$?

Définitions (convergence, complétude, densité). *Soient $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ et $a \in A$.*

*On dit que la suite (a_n) **tend vers** a si $|a_n - a| \longrightarrow 0$. La suite (a_n) est dite **convergente** si $\exists \alpha \in A,\ a_n \longrightarrow \alpha$.*

*La suite (a_n) est dite **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p, q > N,\ |a_q - a_p| < \varepsilon$. L'anneau A est dit **complet** si toutes ses suites de Cauchy convergent.*

*Une partie $D \subset A$ est dite **dense** si tout élément de A est limite d'une suite de $D^{\mathbf{N}}$.*

Exemples (développements infinis à droite ou à gauche).

Dans l'anneau des nombres décimaux, le nombre $0,666...6$ (écrit en base 7) tend pour la valeur absolue usuelle vers 1 : on a en effet

$$\left|1 - 0,\underbrace{66...6}_{n \text{ symboles } 6}\right| = \left|0,\underbrace{00...0}_{n \text{ symboles } 0}1\right| = 7^{-n-1} \longrightarrow 0.$$

[1] Dans ce contexte, la valeur absolue usuelle est notée $|a|_\infty$, de sorte à disposer de la formule dite ***du produit*** $|a|_\infty \prod |a|_p = 1$.

Cependant, le développement "septimal" d'un irrationnel ne pourra converger et sera (comme tout développement $c_0, c_1c_2c_3...$) de Cauchy (exercice).

Dans $\mathbf{Z}$, le nombre 66...6 (écrit en base 7) tend vers -1 pour la norme 7-adique : on a en effet

$$\left|\underbrace{66...6}_{n \text{ symboles } 6} - (-1)\right| = |66...6+1| = \left|1\underbrace{00...0}_{n \text{ symboles } 0}\right| = 7^{-n} \longrightarrow 0.$$

En revanche, l'entier 11...1 ne convergera pas (exercice) et sera (comme tout développement $...c_nc_{n-1}...c_2c_1c_0$) de Cauchy (exercice)

On montre (comme dans $\mathbf{Q}$) qu'une suite convergente est de Cauchy, la réciproque étant fausse. Cependant, les suites de Cauchy ont *vraiment* envie de converger : en rajoutant leurs "limites" à l'anneau A, on va obtenir un anneau *complet* ("sans trous") dans lequel A sera dense (par définition des éléments rajoutés).

Théorème (complétion).

1. *Il existe un anneau complet $\overline{A}$ (appelé* ***complétion*** *de A) et un monomorphisme d'anneaux normés $A \hookrightarrow \overline{A}$ tel que l'image de A est dense dans $\overline{A}$.*
2. **(bonus)** *La complétion est unique au sens suivant : si $\begin{cases} i : A \hookrightarrow \overline{A} \\ j : A \hookrightarrow \widehat{A} \end{cases}$ sont deux complétions, alors il existe un unique isomorphisme d'anneaux normés $\overline{A} \overset{\alpha}{\widetilde{\longrightarrow}} \widehat{A}$ faisant commuter le diagramme* $\begin{array}{ccc} & \overset{i}{\hookrightarrow} & \widehat{A} \\ A & & \simeq\uparrow\alpha \\ & \overset{j}{\hookrightarrow} & \overline{A} \end{array}$.

Idée de preuve. Un "trou" dans A est une suite de Cauchy (non convergente), un élément de a est une suite de Cauchy (constante). On définit alors $\overline{A}$ comme l'anneau des suites de Cauchy muni d'une "égalité" $\widetilde{(a_n)} = \widetilde{(b_n)} \iff a_n - b_n \longrightarrow 0$ et le plongement $A \hookrightarrow \overline{A}$ par $a \mapsto \widetilde{(a)}$.

Exemples (complétions de Z et Q).

Les suites de Cauchy de $\mathbf{Z}$ pour la valeur absolue usuelle étant stationnaires, $\mathbf{Z}$ est complet et vaut sa propre complétion.

La complétion de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue usuelle est $\mathbf{R}$, ensemble des nombres s'écrivant (en toute base) avec un nombre fini de chiffres à gauche et un nombre *infini* de chiffres après la virgule (et un signe) : on a ainsi des plongements $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ (au passage, le plongement $\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{R}$ est croissant car l'ordre est définissable en termes annelés : $a \leq b \iff \exists \varepsilon, b - a = \varepsilon^2$).

La complétion de $\mathbf{Z}$ pour la norme p-adique est l'ensemble des nombres entiers s'écrivant en base p avec un nombre infini de chiffres à gauche. Il se note $\mathbf{Z}_p$ (à ne pas confondre avec l'anneau les entiers *modulo* p qui se note plutôt ${}^{\mathbf{Z}}\!/_{p\mathbf{Z}}$ ou ${}^{\mathbf{Z}}\!/_{p}$). Les entiers p-adiques s'additionnent et se multiplient comme en primaire[2], ce qui est beaucoup plus sympathique que les réels et ce qui permet de se passer de signe $-$ (poser la soustraction "infinie à gauche"), d'où l'on déduit la surprenante densité de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}_p$.

De même, la complétion de $\mathbf{Q}$ pour la norme p-adique est l'ensemble $\mathbf{Q}_p$ des nombres s'écrivant en base p avec un nombre infini de chiffres à gauche et avec un nombre *fini* de chiffres après la virgule. Cette complétion $\mathbf{Q}_p$ est aussi le corps des fractions de $\mathbf{Z}_p$ et l'on peut voir ce dernier comme la boule unité de $\mathbf{Q}_p$ (ensemble des éléments de norme ≤ 1) [dessin : cercles concentriques $S_k := p^k\mathbf{Z} \backslash p^{k+1}\mathbf{Z}$ (sphère de rayon k) pour tout $k \in \mathbf{Z}$, mêmes cercles en pointillés pour $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$]

Nous n'étudierons pas les nombres p-adiques et ne ferons plus d'analyse ultramétrique : ce qui précède n'est qu'un survol pour ceux qui feront de l'analyse p-adique plus tard[3]. Par ailleurs, un autre théorème d'Ostrowski[4] nous dit qu'un corps normé archimédien est nécessairement un sous-corps de $\mathbf{C}$ dont la norme est équivalente au module usuel : on en déduit qu'un corps complet pour une norme archimédienne est nécessairement $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ce qui explique que la plupart des cours sur les e. v. n. se font sur l'un de ces corps[5].

---

[2] on pourrait ainsi définir l'anneau $\mathbf{Z}_n$ pour tout naturel $n \geq 2$: cependant, l'intégrité n'a lieu que si n est premier

[3] Une comparaison intéressante est présentée dans le libre de Svetlana Katok *p-adic Analysis Compared with Real.*

[4] Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. VI (Valuations), 4., théorème 2

[5] Il y a donc, lorsque l'on présente les espaces vectoriels normés, une profonde raison mathématique pour se restreindre au cas réel ou complexe, contrairement aux espaces vectoriels où seule l'intuition (hors mathématique) réelle des scalaires pourrait justifier cette restriction du corps de base à $\mathbf{R}$.

2 Généralités sur les espaces vectoriels normés

Pour tout le cours, $\mathbf{K}$ désigne un corps complet pour une norme *triangulaire*[6] et de caractéristique nulle, par exemple : $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou un $\mathbf{Q}_p$.

Définition (normes). *Soit E un $\mathbf{K}$-e. v.. On appelle **$\mathbf{K}$-norme** sur E toute application* $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & \|a\| \end{array}\right.$ *telle que*

1. $\forall (\lambda, a) \in \mathbf{K} \times E,\ \|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \|a\|$ *(**positive homogénéité**) ;*
2. $\forall a \in E,\ \|a\| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ *(**séparation**) ;*
3. $\forall a, b \in E,\ \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ *(**comparaison triangulaire**) ;*

*Lorsque l'e. v. E est muni d'une norme, on dit qu'il est **normé** (en abrégé : **e. v. n.**).*

Remarque. *Une norme est toujours positive* ! Soit $a \in E$. On a alors d'une part $\|0\| = \|0 \cdot a\| = |0| \|a\| = 0 \|a\| = 0$, d'autre part $\|-a\| = \|(-1) a\| = |-1| \|a\| = 1 \|a\| = \|a\|$, d'où l'on tire $0 = \|0\| = \|a + (-a)\| \leq \|a\| + \|-a\| = 2 \|a\|$ et la positivité de $\|a\|$.

Exemples. Soient S un segment de $\mathbf{R}$, X un ensemble et $\gamma \geq 1$ un réel.

1. La droite vectorielle $\mathbf{K}$ est normée par la norme du corps $\mathbf{K}$ (et c'est la seule façon de faire à un scalaire positif près (**exercice**), ce qui rend la terminologie cohérente).
2. L'e. v. produit $\mathbf{K}^n$ est normé par $\|a\|_\gamma = \sqrt[\gamma]{\sum |a_i|^\gamma}$. Par exemple, pour $n = 2$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on obtient le module complexe. Lorsque $\gamma \to \infty$, le réel $\|a\|_\gamma$ tend vers $\max |a_i|$, que l'on notera par conséquent $\|a\|_\infty$.

   Démonstration. Seule l'inégalité triangulaire ne semble pas immédiate. Si l'on a traité la partie précédente, il suffit d'utiliser la forme équivalente $\|a + b\| \leq 2 \max \{\|a\|, \|b\|\}$. Donnons sinon une preuve directe.

   On rappelle la comparaison $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$ valide pour tous réels positifs u, v, α, β tels que $\alpha + \beta = 1$ (qui résulte de la concavité de ln). Déduisons-en la comparaison dite de ***Hölder***. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $a, b \in \mathbf{R}_+^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+$ tels que $\lambda + \mu = 1$. On a alors $\sum a_i^\lambda b_i^\mu \leq \left(\sum a_i\right)^\lambda \left(\sum b_i\right)^\mu$ (et on pourrait remplacer le nombre de lettres a, b par un nombre quelconque). Cette comparaison étant homogène en les a_i, on peut (quitte à diviser tous les a_i par leur somme) supposer $\sum a_i = 1$ On peut de même supposer $\sum b_i = 1$. On a alors les comparaisons

   $$\sum a_i^\lambda b_i^\mu \leq \sum \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum a_i + \mu \sum b_i = \lambda + \mu = 1 = 1^\lambda 1^\mu = \left(\sum a_i\right)^\lambda \left(\sum b_i\right)^\mu, \text{ ce qui conclut.}$$

   Montrons enfin la comparaison triangulaire voulue. Soient $a, b \in \mathbf{R}_+^n$. Hölder permer d'écrire

   $$\|a\| \|a + b\|^{\gamma - 1} = \left(\sum |a_i|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum |a_i + b_i|^\gamma\right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} \overset{\text{Hölder}}{\geq} \sum |a_i|^{\gamma \frac{1}{\gamma}} |a_i + b_i|^{\gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)};$$

   en ajoutant la comparaison $\|b\| \|a + b\|^{\gamma - 1} \geq \sum |b_i| |a_i + b_i|^{\gamma - 1}$ obtenue de même, on obtient les comparaisons

   $$\begin{aligned} (\|a\| + \|b\|) \|a + b\|^{\gamma - 1} &\geq \sum |a_i| |a_i + b_i|^{\gamma - 1} + \sum |b_i| |a_i + b_i|^{\gamma - 1} = \sum (|a_i| + |b_i|) |a_i + b_i|^{\gamma - 1} \\ &\geq \sum |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{\gamma - 1} = \sum |a_i + b_i|^\gamma = \|a + b\|^\gamma, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

3. On peut "mélanger" toutes les normes $\|\cdot\|_\gamma$ de $\mathbf{K}^n$ en définissant $\|a\| := \int_{s \in S} \|a\|_s \, ds$ si $S \subset [1, \infty[$.
4. En remplaçant $\{1, 2, ..., n\}$ par $\{0, 1, 2, ..., n\}$ puis par $\{0, 1, 2, ...\} = \mathbf{N}$, on définit de même sur l'e. v. $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})} = \mathbf{K}[X]$ des normes $\|a\|_\gamma := \sqrt[\gamma]{\sum_{n \geq 0} |a_n|^\gamma}$ et la ***norme uniforme*** $\|a\|_\infty := \max_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$. On pourrait également normer par $\|a\| := |a_0| + \left\|\left(|a_{n+1} - a_n|\right)_{n \geq 0}\right\|_\gamma$ (même si $\gamma = \infty$). Ou encore par $\left\|P\left(X^2\right) + XQ\left(X^2\right)\right\| := N(P) + N'(Q)$ où N et N' sont deux normes sur $\mathbf{K}[X]$.
5. Lorsque le support n'est plus supposé fini, afin de pouvoir normer $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ par $\|\cdot\|_\gamma$, il faut et suffit de se restreindre au s.-e. v. $\ell^\gamma(\mathbf{K}) := \left\{a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}\ ;\ \|a\|_\gamma < \infty\right\}$. On peut également normer le s.-e. v. $O(2^n)$ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}^*}$ par $\|a\| := \sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{3^n} |a_n|$.

[6] nous avons vu que cela peut toujours être réalisé quitte à prendre une autre norme qui reste équivalente à la première

6. En remplaçant l'ensemble source $\mathbf{N}$ par le segment S, on définit de même sur $C^0(S,\mathbf{K})$ des normes $\|f\|_\gamma := \sqrt[\gamma]{\int_S |f|^\gamma}$ (plus généralement appelées normes L^γ) et la ***norme uniforme*** $\|f\|_\infty := \max_S |f|$, laquelle se définit plus généralement sur $\mathcal{B}(X,\mathbf{K})$.
7. Soient E et F deux e. v. n.. Soit $x_0 \in E$. L'e. v. des fonctions lipschitiziennes de E vers F est normable par $\|f\|_{\text{lip.}} := \|f(x_0)\| + \sup_{a\neq b} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}$. (C'est l'analogue continu de $\|a\| := |a_0| + \max |a_{n+1} - a_n|$ sur $\mathbf{K}[X]$.) On verra que la dépendance en x_0 est nulle du point de vue topologique (on dira que toutes ces normes sont *équivalentes*).

   Montrons par exemple la comparaison triangulaire pour le second terme. Soient $f, g : E \longrightarrow F$ lipschitziennes. Notons $M := \sup_{a\neq b} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}$ et $N := \sup_{a\neq b} \frac{\|g(a)-g(b)\|}{\|a-b\|}$. Soient a, b dans E. On a alors

$$\begin{aligned} \|[f+g](a) - [f+g](b)\| &= \|f(a) - f(b) + g(a) - g(b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| + \|g(a) - g(b)\| \\ &\leq M\|a-b\| + N\|a-b\| = (M+N)\|a-b\|, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

8. Soit $s_0 \in S$ et soit N une norme sur $C^0(S,\mathbf{K})$. L'e. v. $C^1(S,\mathbf{K})$ est normable par $\|f\| := |f(s_0)| + N(f')$ (c'est l'analogue de $\|f\|_{\text{lip.}}$: on vérifiera d'ailleurs en **exercice** que lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ on a $\|f'\|_\infty = \sup_{a\neq b} \frac{\|g(a)-g(b)\|}{\|a-b\|}$) ou par $\|f\| := |f(s_0)| + N(f - f')$.
9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $s \in S^n$ de coordonnées *distinctes*, soient $N_1, N_2, ..., N_n$ des normes sur $C^0(S,\mathbf{K})$. Soit $m \in [0,n]$ un entier. Alors l'e. v. $C^n(S,\mathbf{K})$ est normable par $\|f\| := \sum_{k=1}^m |f(s_i)| + \sum_{k=m}^n N_k\left(f^{(k)}\right)$.

   Montrons par exemple la séparation : si $\|f\| = 0$, alors $N_m\left(f^{(m)}\right) = 0$, donc $f^{(m)} = 0$, donc f est un polynôme de degré $< m$; mais on sait aussi que $\sum_{k=1}^m |f(s_i)| = 0$, donc f s'annule en les m réels distincts s_i ; l'un dans l'autre, f est le polynôme nul.

Pour toute la suite du cours, on fixe un e. v. n. E.

Remarque (cône des normes). L'ensemble des normes sur E est stable par combinaisons linéaires à coefficients positifs (on dit que c'est un ***cône***, par analogie avec une telle partie dans le plan). On pourrait donc créer pleins de nouvelles normes à partir des quelques précédentes. On verra en T. G. une description générale des normes de E, ou plutôt des *boules unités* de E.

Remarque (axiomes d'une distance). Soit $(a,b) \in E^2$. Le réel $d(a,b) := \|a-b\|$ s'appelle la ***distance*** de a à b. Elle vérifie les trois axiomes d'un espace dit ***métrique*** :

1. $d(a,b) = d(b,a)$ *(**symétrie**)* ;
2. $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ *(**séparation**)* ;
3. $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ *(**comparaison triangulaire**)*.

Par exemple, si X est un ensemble fini, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ est métrisable pour la distance $d(A,B) := |A\Delta B|$ (**exercice !**). L'intérêt des espaces métriques est qu'ils n'ont pas besoin d'avoir une structure d'e. v. : ce sera par exemple le cas de toutes les parties d'e. v. n. (ce qui permettra par exemple de faire de l'analyse sur $GL_n(\mathbf{K})$).

On verra en T. G. que l'on peut toujours plonger les espaces métriques dans des e. v. n. les "voyant" comme des fermés.

Définitions (boules & sphères). *Soit $a \in E$ et $r > 0$. On appelle **boule ouverte** (resp. **boule fermée**, resp. **sphère**) de centre a et rayon r les ensembles*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_o(a,r) &:= \{x \in E \; ; \; d(x,a) < r\}, \\ \mathcal{B}_f(a,r) &:= \{x \in E \; ; \; d(x,a) \leq r\}, \\ \mathcal{S}(a,r) &:= \{x \in E \; ; \; d(x,a) = r\} = \mathcal{B}_f(a,r) \backslash \mathcal{B}_o(a,r). \end{aligned}$$

(selon le contexte, on pourra dire que les singletons sont des boules fermés de rayoin nul ; en tout état de cause, *une boule ouverte sera toujours non vide*).

Exemples (boules en petite dimension).
Dans $\mathbf{R}$, les boules sont les intervalles bornés (et pas semi-ouverts), les boules fermées les segments, les sphères les paires.

Dans $\mathbf{R}^2$, dessiner les boules pour les norme 2 (disque), 1 ("losange"), 4 (entre disque et carré), ∞ (carré).

Dans $\mathbf{R}^3$, on retrouve l'origine de la terminologie.

Exercice (unicité des centre et rayon d'une boule). *Montrer que l'application $(a,r) \mapsto \mathcal{B}_f(a,r)$ est injective*[7]. Soient (a,r) et (b,s) tels que $a + r\overline{\mathbf{B}} = b + s\overline{\mathbf{B}}$. Le diamètre de cette partie valant $2r = 2s$, on a $r = s$. Supposons $a \neq b$. Posons $d := \left\|\overrightarrow{ab}\right\|$ (qui est non nul) et $u := \frac{\overrightarrow{ab}}{d}$ (qui est unitaire). [dessin indispensable !] Alors le point $b + ru$ est dans $b + r\overline{\mathbf{B}} = a + r\overline{\mathbf{B}}$, d'où

$$r \geq \|(b+ru) - a\| = \|du + ru\| = \|(d+r)\,u\| = |d+r|\,\|u\| = d + r > r, \text{ d'où la contradiction.}$$

Définitions (parties bornées, diamètres, distances). *Une partie sera dite **bornée** si elle est incluse dans une boule. Le **diamètre** d'une partie P est par définition le réel (éventuellement infini) $\sup_{a,b\in P} d(a,b)$. La **distance** entre deux parties A et B est $d(A,B) := \inf_{a\in A}^{b\in B} d(a,b)$. La **distance** d'un point à une partie est $d(x,A) := \inf_{a\in A}(x,a)$.*

Exemple (diamètre d'une boule). Montrons que *le diamètre d'une boule vaut le double de son rayon.* Soient $\omega \in E$ et $r > 0$. Pour tous points a et b dans $\mathcal{B}(\omega,r)$, on a $d(a,b) \leq d(a,\omega) + d(\omega,a) \leq r + r$, ce qui montre que le diamètre de $\mathcal{B}(\omega,r)$ est $\leq 2r$. Réciproquement, si u désigne un vecteur unitaire[8], alors les deux points $\omega \pm \left(1 - \frac{1}{n}\right) ru$ sont dans $\mathcal{B}(\omega,r)$ et sont à distance $2r\left(1-\frac{1}{n}\right)$, ce qui montre que le diamètre cherché est minoré par quelque chose qui tend vers $2r$, d'où la comparaison réciproque.

Notations ($\mathbf{B}, \mathring{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{B}}, \mathbf{S}$). Dans ce cours, la boule unité ouverte $\mathcal{B}_o(0,1)$ sera notée $\mathbf{B}$ (ou $\mathring{\mathbf{B}}$), la boule unité fermée $\mathcal{B}_o(0,1)$ par $\overline{\mathbf{B}}$ et la sphère unité $\mathcal{S}(0,1)$ par $\mathbf{S}$. Dans un e. v. n., ces notations permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_o(a,r) &= a + r\mathbf{B}, \\ \mathcal{B}_f(a,r) &= a + r\overline{\mathbf{B}}, \\ \mathcal{S}(a,r) &= a + r\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Exercice (somme de boules). *Soient λ et μ deux réels positifs. Montrer l'égalité $\lambda\mathbf{B} + \mu\mathbf{B} = (\lambda+\mu)\,\mathbf{B}$.* L'inclusion $\supset$ est immédiate par distributivité, celle $\subset$ résulte d'une comparaison triangulaire.

Exercice (pas de boules dans les s.-e. v.). *Un s.-e. v. strict ne peut contenir de boule (ouverte).* Soit $a + r\mathbf{B}$ une boule ouverte dans un s.-e. v. V. Ce dernier étant stable par translation, il contient $(a + r\mathbf{B}) - a = r\mathbf{B}$. Étant stable par homothétie, V contient $\frac{\lambda}{r} r\mathbf{B} = \lambda\mathbf{B}$ pour tout scalaire λ, donc contient tout vecteur (un vecteur x appartient à la boule $\|2x\|\,\mathbf{B}$) et ne saurait être strict.

Exercice (convexité et équilibre des boules). *Toute boule est convexe*[9] *(en fait, cela équivaut à l'axiome 3) et équilibrée*[10].

(On propose une réciproque en T. G. qui décrit toutes les boules fermées d'un même e)

Corollaire. *Les application $\|\cdot\|_\gamma$ ne sont pas des normes si $\gamma \in\,]0,1[$.* Le défaut de convexité est évident sur un dessin. Montrons-le proprement. Les points $(1,0,0,...,0)$ et $(0,1,0,...0)$ sont de "norme" 1 mais leur milieu $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ...0\right)$ est de "norme"

$$\sqrt[\gamma]{\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma + \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma} = \left(2\frac{1}{2^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(2^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(2^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2^{\frac{1}{\gamma}-1} \underset{\frac{1}{\gamma}-1 \text{ est } >0}{\overset{\text{l'exposant}}{>}} 1, \text{ donc sort de la boule unité.}$$

Exercice (distances sur $\mathfrak{P}(E)$). *Donner une CNS pour que la distance entre parties de E soit une distance sur $\mathfrak{P}(E)$* La symétrie est évidente. Cependant, dans l'e. v. $\mathbf{R}$, les parties $\{0\}$, $[1,2]$ et $\{3\}$ infirment la comparaison triangulaire (contre-exemple aisément adaptable dès que E contient une droite). De même, si E contient un vecteur a non nul, alors les parties $\{0\}$ et $\{0,a\}$ infirment la séparation. Finalement la distance entre parties n'est (presque) jamais une distance.

---

[7] Cela est faux dans les métriques. Par exemple, dans la partie $\{0,1,3\}$, les boules $2\mathbf{B}$ et $1 + \frac{3}{2}\mathbf{B}$ valent toutes deux $\{0,1\}$. Autre exemple : en ultramétrique, tout point d'une boule en est le centre.

[8] cet argument ne ferait pas sens dans un espace métrique en général ; d'ailleurs, l'énoncé devient faux (dans $\mathbf{Z}$ muni de la distance usuelle, les boules de rayon < 1 sont toutes des singletons, donc sont de diamètre nul)

[9] si a et b sont dedans, alors $\lambda a + \mu b$ aussi pour tous réels positifs λ et μ de somme 1

[10] si a est dedans, alors ua est dedans pour tout scalaire u tel que $|u| \leq 1$

Produit d'e. v. n.. Soit $(E_i, N_i)_{i\in I}$ une famille d'e. v. n. et soit N une norme sur $\mathbf{R}^I$. On peut alors normer l'e. v. produit $\prod E_i$ par $\|(a_i)\| := N\left((\|a_i\|)_{i\in I}\right)$.

Sans indication contraire, on prendra (dans ce cours) la norme *uniforme*. L'intérêt est qu'alors (**exercice !**) *les boules produit sont les produits de boules.* (Par exemple, dans le plan, les boules (rectangles) seront les produits de segments.)

Définition (algèbre normée). *Une $\mathbf{K}$-algèbre est un $\mathbf{K}$-e. v. et un anneau dont les multiplications (internes et externes) sont compatibles au sens suivant : pour tout scalaire λ et pour tous vecteurs a et b, on a les égalités*

$$\lambda \cdot (a \times b) = (\lambda \cdot a) \times b = a \times (\lambda \cdot b) \text{ (noté tout simplement } \lambda ab).$$

*Une **sous-algèbre** est une partie qui est une algèbre, ce qui revient à être un sous-anneau et un s.-e. v..*

*Une **$\mathbf{K}$-algèbre normée** est une $\mathbf{K}$-algèbre munie d'une $\mathbf{K}$-norme sous-multiplicative.*

Exemples (algèbres) : $\mathbf{K}, \mathbf{K}^n, \mathbf{K}^X, \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$, $\left\{a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ a \text{ converge}\right\}$, $\left\{a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ a \text{ de Cauchy}\right\}$, $\left\{a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ a_n \longrightarrow 0\right\}$, $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{K})$, $\mathcal{D}^k(I, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}[X]$, $M_n(\mathbf{K})$, $L(E)$.

Exemple (d'algèbre normée). Montrer que *la norme euclidienne sur $M_n(\mathbf{R})$ est d'algèbre.* Soient A et B dans $M_n(\mathbf{R})$. On a les comparaisons

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \sum_{i,j} [AB]_{i,j}^2 = \sum_{i,j} \left(\sum_x a_{i,x} b_{x,j}\right)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{i,j} \left(\sum_x a_{i,x}^2\right)\left(\sum_y b_{y,j}^2\right) \\ &= \sum_{i,x} a_{i,x}^2 \sum_{j,y} b_{y,j}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 .\end{aligned}$$

Exercice (algèbre normée de Lipschitz). Montrer que *la sous-algèbre des fonctions lipschitziennes (d'un e.-v. n. vers un autre) s'annulant en 0 est normée par $f \mapsto \sup_{a\neq b} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}$.*

Ce qu'il faut retenir d'une norme :

1. une norme *sépare* : la distinction de deux vecteurs revient à celle de deux réels (leurs normes) ;
2. comportement vis-à-vis de la structure :
   (a) action scalaire : *positivement homogène* ;
   (b) addition : *sous-additive* (comparaison triangulaire) ;
   (c) multiplication : *sous-multiplicative*.

Remarque. Quitte à diviser par $\|1\|$, on pourra toujours supposer dans une algèbre normée que $\|1\| = 1$.

3 Suites, fermés, adhérence

Comme promis, on recopie les définitions en doublant les barres :
tendance, ***convergence***, ***bornée***, ***de Cauchy***, ***sous-suite***, ***valeur d'adhérence***, ***partie dense***.

On montre que forment des algèbres les suites resp. bornées, convergentes, de Cauchy et $o(1)$. Mieux : si $\begin{cases} (\lambda_n) = O(1) \\ (a_n) = o(1) \end{cases}$ ou si $\begin{cases} (\lambda_n) = o(1) \\ (a_n) = O(1) \end{cases}$, alors $\lambda_n a_n = o(1)$ (on retiendra $o(1)\,O(1) \overset{\rightarrow}{=} o(1) \overset{\leftarrow}{=} O(1)\,o(1)$). L'opérateur lim est bien défini et linéaire.

★ la convergence *dépend de la norme* : la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ de $C^0([0,1], \mathbf{R})$ tend vers la fonction nulle pour la norme L^1 mais ne converge pas pour la norme L^∞. On verra que la convergence est indépendante de la norme en dimension *finie*.

Exemple. Pour tout anneau A, on note $SO_2(A) := \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(A) \ ; \ a^2 + b^2 = 1\right\}$ (le "cercle unité" de A^2). *Montrer que $SO_2(\mathbf{Q})$ est dense dans $SO_2(\mathbf{R})$ (pour la norme ∞).* Soit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{R})$.

Idée 1. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\binom{a}{b} = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$. Puisque $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, on peut approcher $\theta = \lim \theta_n$ par une suite de rationnels. Posons $\binom{a_n}{b_n} := \binom{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}$. Alors les matrices $\begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ vérifient bien $a_n^2 + b_n^2 = 1$ et tendent bien vers $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Mais elles n'ont aucune raison d'être à coefficients rationnels cas cos et sin ne stabilisent pas $\mathbf{Q}$! Il faut donc changer de paramétrage.

Idée 2. Soit $t \in \mathbf{R}$ tel que $(a,b) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ (poser $t := \tan\frac{\theta}{2}$ (si cela ne fait pas sens, alors $(a,b) = (-1,0)$ et la matrice de départ est *déjà* rationnelle)). On approche $t = \lim t_n$ par des rationnels et on remplace dans la matrice de départ les t par des t_n, ce qui fournit bien cette fois des rationnels.

Exemple (théorème de Stone-Weierstrass). *Soit S un segment de $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathbf{K}[X]$ est dense dans $C(S, \mathbf{K})$ pour la norme uniforme.*

Quitte à appliquer une fonction affine, on peut se ramener au cas où $S = [-1, 1]$. Nous proposons une preuve par convolution (pour définir la convolée de deux fonctions continues sur S, on les prolongera par 0 en-dehors). On rappelle que $*$ est commutatif :

$$[f * g](x) = \int f(t)\, g(x-t)\, dt = \int f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

Idée. Considérons le Dirac en 0 : même si nous ne pouvons correctement le définir, c'est le neutre pour le produit de convolution. Notons-le D. On va l'approcher par une suite (D_n). Soit $f : S \longrightarrow \mathbf{K}$. On aura alors envie d'écrire $f = f * D = f * (\lim D_n) = \lim (f * D_n)$, ce qui fournira une suite approchant f.

Mise en œuvre. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note D_n le polynôme $\left\{\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ s & \longmapsto & C_n\left(1-s^2\right)^n \end{array}\right.$ où le réel $C_n := \frac{1}{\int_S (1-s^2)^n ds}$ est choisi pour que $\int D_n = 1$. Soit $f : S \longrightarrow \mathbf{K}$ continue. Notons $f_n := f * D_n$. L'écriture

$$[f * D_n](x) = \int f(t) \underbrace{D_n(x-t)}_{=\sum_{d\geq 0} a_d(t) x^d} dt = \sum_{d \geq 0} \left(\int f a_d\right) x^d$$

montre que les f_n sont des polynômes. Montrons qu'ils convergent uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in S$. On utilise l'autre écriture :

$$\begin{aligned} |f_n - f|(x) &= \left| f_n(x) - \left(\int D_n\right) f(x) \right| = \left| \int f(x-t)\, D_n(t)\, dt - \int f(x)\, D_n(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int (f(x-t) - f(x))\, D_n(t)\, dt \right| \leq \int |f(x-t) - f(x)|\, D_n(t)\, dt. \end{aligned}$$

Intuitivement, l'intégrande est petite quand t est proche de 0 (grâce au premier facteur) et est aussi petit pour n assez grand lorsque t est loin de zéro. Précisons cela. La fonction f étant continue sur un segment, elle y est uniformément continue (théorème de Heine, que l'on reverra plus tard). Soit donc $\delta > 0$ tel que $|a - b| < \delta \Longrightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale sur $|t| < \delta$ est majorée par $\int \varepsilon D_n = \varepsilon$. Soit par ailleurs M un majorant de f (existe car f est continue sur un segment). Alors l'intégrale sur $|t| > \delta$ est majorée par $2M \int_{|t|>\delta} D_n \leq 2M \cdot 2D_n(\delta)$ d'après les variations de D_n. Pour conclure, il suffit de montrer que $D_n(\delta) \longrightarrow 0$, *i. e.* que $\frac{1}{D_n(\delta)} \longrightarrow \infty$. Or on a

$$\frac{1}{D_n(\delta)} = \frac{1}{C_n(1-\delta)^n} = \int \left(\frac{1-t}{1-\delta}\right)^n dt \geq \int_{t \leq \frac{\delta}{2}} \left(\frac{1-t}{1-\delta}\right)^n dt \geq \int_{t \leq \frac{\delta}{2}} \left(\frac{1-\frac{\delta}{2}}{1-\delta}\right)^n dt = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{1-\frac{\delta}{2}}{1-\delta}\right)}_{>1}{}^n}_{\longrightarrow\infty} \underbrace{\int_{t \leq \frac{\delta}{2}} dt}_{\text{constante } >0}}_{\longrightarrow\infty}.$$

Définition (fermés). *On dira qu'une partie est (séquentiellement)* ***fermée*** *si elle est stable par passage à la limite :*

$$F \textit{ est fermé si } \forall (f_n) \in F^{\mathbf{N}},\ \forall \ell \in E,\ f_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow \ell \in F.$$

Exemples. Les intervalles fermés de $\mathbf{R}$ sont fermés, les parties finies sont fermées, les boules fermées sont fermées, les sphères sont fermées, l'e. v. E est fermé.

Propriétés (axiomes des fermés). *L'ensemble des fermés de E :*

1. *contient $\emptyset$ et E ;*

2. *est stable par intersection quelconque ;*
3. *est stable par union finie.*

Démonstration.
Il est immédiat que E est fermé. Le caractère fermé de $\emptyset$ s'écrit $\forall (f_n) \in \emptyset^{\mathbf{N}},\ \forall \ell \in E,\ f_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow \ell \in F$, donc est de la forme $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$, ce qui est tautologique (par exemple, sa négation s'écrit $\exists x \in \emptyset,\ \neg P(x)$ qui est clairement faux).

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. Notons $F := \bigcap F_i$. Soient $(a_n) \in F^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a_n \longrightarrow \ell$. Soit $i \in I$: puisque $(a_n) \in F_i^{\mathbf{N}}$, sa limite reste dans le fermé F_i ; ceci tenant pour tout i, on a bien l'appartenance $\ell \in F$.

Par récurrence, il suffit de traiter le cas de deux fermés F et G. Soit $(a_n) \in (F \cup G)^{\mathbf{N}}$. Alors l'un des ensembles $\{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \in F\}$ ou $\{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \in G\}$ est infini (car leur réunion vaut $\mathbf{N}$ qui est infini) : mettons que ce soit le premier. On peut donc extraire de (a_n) une sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ à valeurs dans F. Puisque $a_n \longrightarrow \ell$, cette sous-suite tend aussi vers ℓ et le caractère fermé de F montre qu'il contient $\lim a_{\varphi(n)} = \ell$.

★ Contre-exemple pour la réunion infinie : $\bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1]$ n'est pas fermé car $0 = \lim \frac{1}{n} \notin]0,1]$.

De même que le Vect d'une partie A d'un e. v. est un s.-e. v. obtenu en rajoutant tout ce qu'on peut faire de linéaire avec A (à savoir des combinaisons linéaires), on va construire un fermé en rajoutant tout ce qui pourrait manquer à A d'un point de vue topologique : ses limites.

Définition (adhérence). *On appelle* ***adhérence***[11] *d'une partie A l'ensemble des limites de suites de $A^{\mathbf{N}}$ convergentes. On la note*[12] $\operatorname{Adh} A$ *ou* $\overline{A}$*. Lorsqu'un point appartient à $\overline{A}$, on dit qu'il* ***adhère à*** *A ou qu'il est* ***adhérent à*** *A.*

Propriété (adhérence et fermés). *Soit $A \subset E$. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.*

Démonstration. Déjà $\overline{A}$ contient les limites de suites constantes, donc contient tout A.

Montrons que $\overline{A}$ est fermé. Soit $(\ell_n) \in \overline{A}^{\mathbf{N}}$ tendant vers un certain $\ell \in A$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, puisque ℓ_k est limite d'une suite de $A^{\mathbf{N}}$, il y a un $a_k \in A$ tel que $\|\ell_k - a_k\| < \frac{1}{k}$ [dessin indispensable !]. On en déduit les comparaison et tendance $\|a_n - \ell\| \leq \underbrace{\|a_n - \ell_n\|}_{<\frac{1}{n}\longrightarrow 0} + \underbrace{\|\ell_n - \ell\|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$, ce qui montre que ℓ est limite d'une suite[13] de $A^{\mathbf{N}}$, donc est adhérent à A.

Soit enfin F un fermé contenant A. Soit $\ell \in \overline{A}$. Soit $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ tel que $a_n \longrightarrow \ell$. Alors la suite (a_n) est à valeurs dans F, donc sa limite ℓ reste dans F, *c. q. f. d.*.

Remarque (description externe de l'adhérence). De même que $\operatorname{Vect} A$ admet pour description externe $\bigcap_{V\supset A}^{V \text{ sev.}} V$, l'adhérence d'une partie admet pour description externe $\bigcap_{F\supset A}^{F \text{ fermé}} F$ (c'est bien un fermé comme intersection de fermés).

Remarque (densité & adhérences). *Une partie est dense ssi son adhérence vaut tout l'espace :* $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R} = \overline{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$, $\overline{\mathbf{K}[X]} = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{K})$.

Exercice (adhérence d'un s.-e. v.). Montrer que *l'adhérence d'un s.-e. v. est un s.-e. v..* Soit V un s.-e. v. de E. Soient a et b dans $\overline{V}$ et λ un scalaire. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $V^{\mathbf{N}}$ tendant resp. vers a et b. Alors la suite $(\lambda a_n + b_n)$ de $V^{\mathbf{N}}$ tend vers $\lambda a + b$, ce qui montre $\lambda a + b \in \overline{V}$.

Exercice (adhérence d'un convexe). Montrer que *l'adhérence d'un convexe reste convexe.*

Proposition (adhérence et distances). *Soient $e \in E$ et $A \subset E$. On a alors l'équivalence $e \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(e, A) = 0$.* [justifie autrement la terminologie "adhérer"]

[11] ne pas confondre l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite avec l'adhérence de l'ensemble de ses termes : l'ordre et la répétition sont en effet primordiaux pour le premier et absent pour l'autres (penser à $(-1)^n$)

[12] La notation $\overline{A}$ signifie beaucoup de choses selon le contexte, très souvent que l'on rajoute quelque chose à A pour lui conférer une propriété sympathique. Ainsi $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ désigne-t-il l'achèvement de l'ordre $\mathbf{R}$ (un ordre est dit achevé lorsque toute partie admet des *extrema*) et $\overline{\mathbf{Q}}$ désigne-t-il en algèbre une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ (un corps k est algébriquement clos si toutes les solutions d'une équation polynomiale à coefficients dans k restent dans k).

[13] Le passage de $\forall k \in \mathbf{N},\ \exists a \in A,\ \|\ell_k - a\| < \frac{1}{k}$ à $\exists a \in A^{\mathbf{N}},\ \forall k \in \mathbf{N},\ \|\ell_k - a_k\| < \frac{1}{k}$ sous-entend une utilisation de l'*axiome du choix* (dénombrable). Nous avons été trompés par notre habitude de signifier une dépendance – ce qui ressort de notre interprétation – par un indice, autrement dit par une notation *fonctionnelle* (ici a_k) – ce qui ressort de la mathématique –, alors que tout le problème est précisément l'existence d'une telle fonction.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ tendant vers e. Alors $d(e,A) \leq d(e,a_n) \longrightarrow 0$. $\boxed{\Longleftarrow}$ Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il y a un a_n tel que $d(e,a_n) \leq \inf(e,A) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, d'où une suite[14] de $A^{\mathbf{N}}$ tendant vers e et l'appartenance $e \in \overline{A}$.

Propriété (produits de fermés). *Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ des e. v. n. et $A_1, A_2 ..., A_n$ des parties resp. des E_i. Alors le produit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est fermé dans l'e. v. n. $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ssi chaque A_i est fermée dans E_i.*

★ Tous les fermés de $\prod E_i$ ne sont pas des produits de fermés : par exemple, la première bissectrice du plan en est un fermé.

Exercice (adhérence d'un produit). Montrer que *l'adhérence d'un produit (fini) est le produit des adhérences.*

Définitions (convergences simple & uniforme). *Soit $(E_x)_{x \in X}$ une famille d'e. v. n.. Soit $f \in \prod E_x$ et (f_n) une suite de $\prod E_x$. On dit que (f_n) tend **simplement** ou **ponctuellement** vers f si $\forall x \in X,\ f_n(x) \longrightarrow f(x)$. On dit que (f_n) tend **uniformément** vers f si $\|f_n - f\| \overset{\text{ÀPCR}}{\longrightarrow} 0$.*

On rappelle (*cf.* cours tronc commun) que la différence de ces notions est une interversion de quantificateurs, d'où : d'une part l'implication "cv. simple. $\Longrightarrow$ cv.", d'autre part la terminologie "uniforme" (le même ε pour tous les x).

Lorsqu'il n'y a qu'un nombre *fini* d'e. v. n., convergences simple et uniforme coïncident (exercice !). En revanche, cela devient faux pour les produits infinis : dans le produit $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, la suite des Diracs $(0, .., 0, 1, 0, 0, ...)$ où le 1 est à la n-ième place converge simplement vers la suite nulle mais cette convergence n'est pas uniforme puisque tous les Diracs sont de norme 1. De même, la suite $x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$; la limite simple n'étant pas continue, la convergence ne saurait être uniforme.

4 Voisinages, ouverts, intérieur, frontière

Pour faire de l'analyse, on aura besoin d'"avoir de la marge" autour d'un point donné, afin de légitimer tout type d'opérations locales. Ceci motive les définitions suivantes.

Définition (voisinages, ouverts).
*Un **voisinage** de a est une partie qui contient une boule ouverte centrée en a.*
*Une partie est dite **ouverte** si elle est voisinage de tous ses points.*

Exemples. Les intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ sont ouverts, les boules ouvertes sont ouvertes, l'e. v. E est ouvert, le vide est (tautologiquement) ouvert.

Contre-exemple. Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. *Montrer que la classe de similitude de A n'est pas ouverte.* Puisque toutes les matrices de cette classe ont même trace, elles sont contenues dans l'hyperplan affine $\operatorname{tr}^{-1}(\{\operatorname{tr} A\})$; or nous avons montré qu'un hyperplan vectoriel ne peut contenir de boules et il est aisé d'adapter la démonstration au cas affine.

Propriété (séparation T_2). *Tout e. v. n. est **séparé** au sens d'Haussdorff (axiome[15] T_2) : étant donnés deux points distincts, il y a deux ouverts disjoints chacun contenant l'un et par l'autre.* (prendre deux boules de rayons moindre que le tiers de la distance entre les points)

Propriété (produits d'ouverts). *Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ des e. v. n. et $A_1, A_2 ..., A_n$ des parties resp. des E_i. Alors le produit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est ouvert dans l'e. v. n. $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ssi chaque A_i est ouverte dans E_i.*

★ Tous les ouverts de $\prod E_i$ ne sont pas des produits de ouvert : par exemple, le disque unité ouvert du plan n'est pas un produit d'intervalles ouverts.

Exercice (intérieur d'un produit). Montrer que *l'intérieur d'un produit (fini) est le produit des intérieurs.*

Propriété (ouverts & boules ouvertes). *Les ouverts sont les réunions de boules ouvertes.*

[14] ici encore se cache une utilisation de l'axiome du choix dénombrable

[15] La lettre T, initiale du mot allemand *Trennungsaxiom* (« axiome de séparation »), a été introduite par Pavel Aleksandrov et Heinz Hopf dans leur traité *Topologie* de 1935 (p. 58 et suivantes), où ils présentaient une liste de tels axiomes.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit O un ouvert. Pour tout $o \in O$, il y a une boule ouverte B_o incluse dans O. La réunion[16] $\bigcup_{o\in O} B_o$ reste donc incluse dans O. Réciproquement, tout $o \in O$ appartient à B_o et donc à la réunion $\bigcup_{a\in O} B_a$. $\boxed{\Longleftarrow}$ bientôt (*cf.* début section 5).

Application. *Soient $A \subset E$ et O un ouvert de E. Montrer que $A+O$ est ouverte.* Il suffit d'écrire

$$A+O=\bigcup_{a\in A}\{a\}+\bigcup_{o\in O}B_o=\bigcup_{\substack{a\in A\\ o\in O}}\underbrace{\{a\}+B_0}_{\substack{\text{translatée d'une}\\ \text{boule ouverte}}}.$$

[dessin lorsque A est le cerle de rayon R et $O := rB$: la somme $A + O$ est alors la couronne circulaire ouverte de "rayons" $R - r$ et $R + r$.]

Définition (intérieur, frontière). *Soit $A \subset E$.*
*L'**intérieur** de A est la réunion des boules ouvertes incluses dans A et est noté* $\operatorname{Int} A$ *ou* $\mathring{A}$.
*La **frontière** de A est le fermé* $\operatorname{Fr} A := \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$, *également appelée le **bord** de A et noté $\partial A := \overline{A} \Big\backslash \mathring{A}$.*
Exercice (description de l'appartenance à un intérieur). *Montrer pour tout $a \in E$ les équivalences*

$$a\in\mathring{A}\iff\exists r>0,\ a+r\mathbf{B}\subset A\iff\exists n\in\mathbf{N}^*,\ a+\frac{1}{n}\mathbf{B}\subset A.$$

Exercice (description topologique de l'intérieur). *Montrer que* $\operatorname{Int} A$ *est le plus grand ouvert inclus dans A et vaut $\bigcup_{O\subset A}^{O \text{ ouvert}} O$.*

Exemples-exercices ($\emptyset$, Z, Q, R$\setminus$Q, intervalles, boules, sphères).
Le vide a pour adhérence, intérieur et frontière lui-même : $\partial\emptyset=\overline{\emptyset}=\emptyset=\mathring{\emptyset}$.
Lorsque $E = \mathbf{R}$, on a $\left\{\begin{array}{c}\mathring{\mathbf{Z}}=\mathring{\mathbf{Q}}=\overset{\circ}{\overline{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}}=\emptyset\\ \overline{\mathbf{Z}}=\mathbf{Z},\ \overline{\mathbf{Q}}=\overline{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}=\mathbf{R}\\ \partial\mathbf{Z}=\mathbf{Z},\ \partial\mathbf{Q}=\partial(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})=\mathbf{R}\end{array}\right.$.
Soit I un intervalle réel. Alors $\left\{\begin{array}{l}\mathring{I}=]\inf I,\sup I[\\ \overline{I}=[\inf I,\sup I]\end{array}\right.$ et $\partial I=\{\inf I,\sup I\}$.
Plus généralement, on a[17] $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Int}\mathbf{B}=\operatorname{Int}\overline{\mathbf{B}}=\mathring{\mathbf{B}}\\ \operatorname{Adh}\mathbf{B}=\operatorname{Adh}\overline{\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{B}}\end{array}\right.$ et $\partial\mathbf{B}=\partial\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{S}$.
De même, $\mathring{\mathbf{S}}=\emptyset$ et $\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{S}$, d'où $\partial\mathbf{S}=\mathbf{S}$.

Propriétés-exercices (variations sur Int et Adh). *Soient A et B deux parties de E. On a les implication, égalités et inclusions*

$$A\subset B\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathring{A}\subset\mathring{B}\\ \overline{A}\subset\overline{B}\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}{}^c\mathring{A}=\overline{{}^cA}\\ {}^c\overline{A}=\overset{\circ}{{}^cA}\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\partial A=\overline{A}\cap\overline{{}^cA}\\ \partial A=\partial({}^cA)\end{array}\right.$$

$$\overset{\circ}{\mathring{A}}=\mathring{A}\ \underset{A\text{ est ouvert}}{\overset{\text{avec = ssi}}{\subset}}\ A\ \underset{A\text{ est fermé}}{\overset{\text{avec = ssi}}{\subset}}\ \overline{A}=\overline{\overline{A}}$$

Démontrons par exemple l'égalité ${}^c\mathring{A}=\overline{{}^cA}$.
$\boxed{\subset}$ Soit $b\in{}^c\mathring{A}$. Puisque $b\notin\mathring{A}$, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ la boule $b+\frac{1}{n}\mathbf{B}$ n'est pas incluse dans A, d'où un $\beta\in\left(b+\frac{1}{n}\mathbf{B}\right)\setminus A$, d'où (grâce à AC) une suite $(b_n)\in({}^cA)^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbf{N},\ \|b_n-b\|<\frac{1}{n}$. Ainsi b est-il limite de (b_n), d'où $b\in\overline{{}^cA}$.
$\boxed{\supset}$ Soit $b\in\overline{{}^cA}$. Soit $(b_n)\in\overline{{}^cA}^{\mathbf{N}}$ tel que $b_n\longrightarrow b$. Supposons $b\in\mathring{A}$, mettons $b+r\mathbf{B}\subset A$ pour un certain $r>0$: alors les b_n tombent dans cette boule à partir d'un certain rang, donc sont dans A, ce qui est absurde. Ainsi $b\notin\mathring{A}$, *i. e.* $b\in{}^c\mathring{A}$.

[16] En toute rigueur, si l'on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules ouvertes de O, il faut (afin de pouvoir parler d'une famille $(B_o)_{o\in O}\in\mathcal{B}^O$) justifier le passage de $\forall o\in O,\ \exists B\in\mathcal{B},\ B\subset O$ à $\exists B\in\mathcal{B}^O,\ \forall o\in O,\ B_o\subset O$, ce qui est le propre de l'axiome du choix.
On peut ici s'en passer. Par densité de $\mathbf{Q}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, on peut choisir une boule de rayon rationnel et utiliser la fonction min issue de $\mathbf{N}$. Explicitons. Soit $\mathbf{Q}_+\overset{\varphi}{\simeq}\mathbf{N}$ une bijection. Pour tout $o\in O$, on définit $r_o:=\varphi^{-1}\left(\min\{\varphi(r)\ ;\ r\in\mathbf{Q}\text{ et }o+r\mathbf{B}\subset O\}\right)$ puis $B_o:=o+r_o\mathbf{B}$. On pourrait même alléger en définissant $r_o:=\frac{1}{\min\left\{n\in\mathbf{N}^*\ ;\ o+\frac{1}{n}\mathbf{B}\subset O\right\}}$.
[17] Cela est faux dans les métriques : par exemple, dans $\mathbf{Z}$, la boule unité ouverte est le singleton $\{0\}$, donc est fermée, donc vaut son adhérence, donc ne vaut pas la boule fermée unité $\overline{\mathbf{B}}=\{-1,0,1\}$.

★ **Remarque (conjugaison de** Int **et** Adh **par** ^{c}**).** La seconde accolade dit que

$$\textit{les applications } \mathrm{Int} \textit{ et } \mathrm{Adh} \textit{ sont conjuguées par } X \mapsto {}^cX.$$

Cela permettra d'obtenir des identités sur Adh à partir d'identités sur Int par passage au complémentaire et ainsi de diviser le travail de moitié. Par exemple, les deux égalités de la deuxième accolade sont équivalentes. De même, la description $\mathrm{Int}\, A = \bigcup_{O\subset A}^{O \text{ ouvert}} O$ découle de celle $\mathrm{Adh}\, A = \bigcap_{F\supset A}^{F \text{ fermé}} F$.

Propriétés-exercices (Adh, Int, $\cap$ et $\cup$). Pour toutes parties A et B de E, on a les inclusions et égalités

$$\begin{array}{ll} \overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B} & \qquad \overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B} \\ \overset{\circ}{\overbrace{A\cup B}} \supset \mathring{A}\cup\mathring{B} & \qquad \overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}. \end{array}$$

(mnémo : Int et $\cap$ élaguent, Adh et $\cup$ rajoutent, on a égalité pour deux opérations "compatibles") (*cf.* exos pour les cas d'égalités)

Les inclusions peuvent être strictes : prendre $E = \mathbf{R}$ et $\begin{cases} A = \mathbf{Q} \\ B = \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \end{cases}$ ou $\begin{cases} A = [0,1[\\ B = [1,2[\end{cases}$.

Exercice (sur les bords).

Montrer qu'*une partie est fermée ssi elle contient sa frontière* et *ouverte ssi elle est disjointe de sa frontière.* En déduire que *les parties de bord vide sont les parties "fermouvertes"*[18].

Montrer que *les bords sont fermés* [réciproque en T. G.], que *les bords de fermés sont d'intérieur vide*, puis que *les fermés d'intérieur vide sont les bords des fermés. En déduire $\partial^{\circ 3} = \partial^{\circ 2}$. Est-ce que $\partial^{\circ 2} = \partial$?*

Propriété (adhérence et ouverts). *Une partie est dense ssi elle rencontre tout ouvert, ou encore ssi son complémentaire est d'intérieur vide.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit D une partie dense. Soit O un ouvert. Soit $o \in O$. Soit $r > 0$ tel que $o + r\mathbf{B} \subset O$. Soit $(d_n) \in \mathbf{D}^{\mathbf{N}}$ telle que $d_n \longrightarrow o$. Alors tous les d_n tombent dans $r\mathbf{B}$ à partir d'un certain rang, donc sont dans O. $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit D rencontrant tout ouvert. Soit $a \in E$. Pour tout entier $n \geq 1$, la partie D rencontre l'ouvert $a + \frac{1}{n}\mathbf{B}$, d'où[19] une suite $(d_n) \longrightarrow a$. Le "ou encore ssi" résulte des équivalences

$$D \text{ dense} \Longleftrightarrow \overline{D} = E \Longleftrightarrow {}^c\overline{D} = {}^cE \Longleftrightarrow \mathrm{Int}\,({}^cD) = \emptyset.$$

On pourrait affiner la propriété précédente et montrer (**exercice !**) qu'*un point $e \in E$ est adhérent à A ssi tout voisinage de e rencontre $A\backslash\{e\}$* (dessiner le lien avec l'équivalence $e \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(e,A) = 0$). Cela motive la définition suivante.

Définition (points isolés & d'accumulation). *Un point $e \in E$ est dit **isolé** dans A s'il possède un voisinage ne rencontrant A qu'en e. Sinon, le point e est adhérent à A ; alors on dit aussi que e est un **point d'accumulation** de A.*

Exercices.

Montrer qu'*un hyperplan est ou bien dense, ou bien fermé.* Soit H un hyperplan. On a vu que $\overline{H}$ était un s.-e. v.. Vu les inclusions $H \subset \overline{H} \subset E$, le s.-e. v. $\overline{H}$ vaut ou bien H (alors H est fermé) ou bien E (alors H est dense).

Montrer que *l'intérieur d'un convexe est convexe.* Soit C un convexe. Soient a et b dans $\mathring{C}$. Soit $r > 0$ tel que $\begin{cases} a + r\mathbf{B} \subset C \\ b + r\mathbf{B} \subset C \end{cases}$ (on peut prendre le même r pour a et b quitte à prendre le min de deux rayons). Soient λ et μ dans $[0,1]$ de somme 1. Alors C contient par convexité l'ensemble-barycentre

$$\lambda(a + r\mathbf{B}) + \mu(b + r\mathbf{B}) = (\lambda a + \mu b) + \underbrace{\lambda r\mathbf{B} + \mu r\mathbf{B}}_{=(\lambda t+\mu r)\mathbf{B} = r\mathbf{B}} \text{, ce qui montre l'appartenance } \lambda a + \mu b \in \mathring{C}.$$

Déterminer dans $C^0([0,1],\mathbf{R})$ l'adhérence et l'intérieur (uniformes) de $C := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue croissante$\}$. Puisque les comparaisons larges sont respectées par passage à la limite, la partie C est fermée. Montrons que son intérieur est vide. Soit $f \in \mathring{C}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f + \varepsilon\mathbf{B} \subset \mathring{C}$. On va rajouter un petit crochet à pente raide pour contredire la monotonie. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit une "marche" μ_n nulle en 0, valant $-\varepsilon$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et linéaire

[18] *en anglais : "**clopen**"*

[19] en utilisant l'axiome du choix dénombrable

sur $\left[0,\frac{1}{n}\right]$. Montrons que $f+\mu_n$ ne croît pas pour n assez grand. Soit $\delta>0$ tel que $|t|<\delta\Longrightarrow|f(t)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n>\frac{1}{\delta}$. Alors

$$[f+\mu_n]\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-\varepsilon=f(0)+\underbrace{\left[\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right)-\varepsilon\right]}_{\leq\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right|-\varepsilon\leq-\frac{\varepsilon}{2}<0}<f(0)=[f+\mu_n](0)\text{, ce qui conclut.}$$

Même question en remplaçant "croissante" par "strictement croissante".

Dans $C^1([0,1],\mathbf{R})$ normé par $\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$, montrer que les fonctions strictement monotones à signe strictement constant forment un ouvert.

Dans $C^0([0,1],\mathbf{R})$, montrer que les fonctions nulles en 0 sont denses pour la norme $\|\cdot\|_\gamma$ ssi $\gamma<\infty$.

Déterminer dans $C^0\{[0,1],\mathbf{R}\}$ les adhérences pour $\|\cdot\|_\infty$ et L^1 de la partie formée par les fonctions strictement positives.

5 Topologie, normes équivalentes

★ **Proposition (lien ouverts-fermés).** *Soit $A\subset E$. Alors A est ouverte ssi son complémentaire ${}^cA$ est fermé.*

Démonstration. On a les équivalences

$$A\text{ ouverte}\Longleftrightarrow\mathring{A}=A\Longleftrightarrow{}^c\mathring{A}={}^cA\Longleftrightarrow\overline{{}^cA}={}^cA\Longleftrightarrow{}^cA\text{ fermée.}$$

★ Contrairement aux portes, une partie peut n'être ni ouverte ni fermée ! Penser à $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$. En revanche, on montrera (**exercice !**) que les seules parties "fermouvertes" de E sont[20] $\emptyset$ et E (regarder déjà ce qui se passe si $E=\mathbf{R}$).

Corollaire (axiomes d'une topologie). *L'ensemble des ouverts de E :*

1. *contient $\emptyset$ et E ;*
2. *est stable par union quelconque ;*
3. *est stable par intersection finie.*

(**exercice** : le faire directement sans les fermés) (corollaire : les réunions de boules ouvertes sont ouvertes)

(finesse d'une topologie) L'ensemble des ouverts de E s'appelle sa ***topologie*** : elle permet de "situer" les objets, de préciser le sens de "proche de". Plus il y a d'ouverts, plus on pourra situer "finement". D'où la définition : *une topologie est dite **plus fine qu**'une autre si elle (la première) contient plus d'ouverts que la seconde (ensemblistement : si elle contient la seconde).*

Proposition (comparaison de normes et de topologies). *Soient N et N' deux normes sur E. Alors N est plus fine que N' ssi il y un réel $\alpha>0$ tel que $N'\leq\alpha N$.*

(mnémo : sont dans le même sens l'inclusion des topologies $T'\subset T$ et la comparaison des normes $N'\leq\alpha N$)

Démonstration. On notera avec des (resp. sans) primes tout ce qui associé à la norme N' (resp. N).

$\boxed{\Longrightarrow}$ La boule $\mathbf{B}'$ est ouverte pour N', donc est ouverte pour N, donc contient une boule $a+r\mathbf{B}$. Puisque $\mathbf{B}'$ est symétrique, elle contient aussi $-(a+r\mathbf{B})=-a+r\mathbf{B}$. Puisque $\mathbf{B}'$ est convexe, elle contient aussi $\frac{1}{2}(a+r\mathbf{B})+\frac{1}{2}(-a+r\mathbf{B})=0+\frac{r}{2}\mathbf{B}+\frac{r}{2}\mathbf{B}=r\mathbf{B}$. Soit $a\in E$: le vecteur $\frac{r}{2N(a)}a$ est alors dans $r\mathbf{B}$, donc dans $\mathbf{B}'$, ce qui s'écrit $N'\left(\frac{r}{2N(a)}a\right)\leq1$, *i. e.* $N'(a)\leq\frac{2}{r}N(a)$, d'où le résultat en notant $\alpha:=\frac{2}{r}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il suffit de montrer que tout fermé pour N' est fermé pour N. Soit F un fermé pour N'. Soit $(f_n)\in F^{\mathbf{N}}$ une suite convergente pour N. Notons $\ell:=\lim f_n$. Puisque $N'(f_n-\ell)\leq\alpha N(f_n-\ell)\longrightarrow0$, la suite (f_n) tend vers ℓ pour N', donc la limite ℓ reste dans F, *c. q. f. d.*.

Corollaire-définition (normes équivalentes). *Deux normes N et N' définissent la même topologique ssi il y a deux réels $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que $\alpha N\leq N'\leq\beta N$, ssi elle définissent les mêmes suites convergentes*

[20] On dit que E est ***connexe***. En général, les métriques ne sont pas connexes : dans l'espace $]0,1[\cup]2,3[$ muni de la métrique induite par la norme de $\mathbf{R}$, les deux parties $]0,1[$ et $]2,3[$ sont chacune fermouverte. Typiquement, les "composantes connexes" d'un espaces fait de "plusieurs bouts" (ce qui n'est pas le cas des e. v. n.) vont être fermouvertes.

*(**exercice !**) ou encore ssi toute boule pour l'une contient une boule pour l'autre. On dit dans ce cas qu'elles sont (topologiquement) **équivalentes**[21].*

Exemple. Sur $\mathbf{K}^n$, toutes les normes $\|\cdot\|_{\gamma\geq 1}$ sont équivalentes (dessin dans le plan : boule incrite et circonscrite à deux carrés, boules pour $\gamma = 1, 2, 4, \infty$). Cela va découler du fait suivant. *Soient $a_1, ..., a_n$ non tous égaux et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum \lambda_i = 1$. Alors la fonction $\gamma \mapsto \sqrt[\gamma]{\sum \lambda_i a_i^\gamma}$ se prolonge continûment en 0 par $\prod a_i^{\lambda_i}$ et croît strictement sur tout $\mathbf{R}$.* (Si les a_i sont tous égaux à un même a, alors cette fonction vaut constamment a.) La valeur en 0 s'obtient à l'aide de deux DLs. Montrons la croissance sur $\mathbf{R}_+^*$ (dont découle aisément celle sur $\mathbf{R}_-^*$). Soient α et β tels que $\alpha > \beta > 0$. On a les équivalences

$$\sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i a_i^\alpha} > \sqrt[\beta]{\sum \lambda_i a_i^\beta} \iff \sum \lambda_i \left(a_i^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} > \left(\sum \lambda_i \left(a_i^\beta\right)\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ ce qui découle de la stricte convexité de } t \mapsto t^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

On verra plus tard (*cf.* section 7) qu'en dimension finie E n'a qu'une seule topologie (d'e. v. n.) : toutes ses normes seront équivalentes.

Bien sûr, on a plein de contre-exemples en dimension infinie : par exemple la suite $(x \mapsto x^n)$ qui tend vers 0 sur $[0, 1]$ pour la norme L^1 mais pas pour la norme L^∞. De même, dans l'e. v. $\mathbf{K}[X]$, la suite $\left(\frac{X^n}{n}\right)$ tend vers 0 pour la norme $\max |a_i|$ mais reste sur la sphère unité pour la norme $\max |a_{i+1} - a_i|$.

Exercices. Soit S un segment de $\mathbf{R}$.

Sur l'e. v. $C^1(S, \mathbf{K})$, montrer que sont équivalentes les normes $\|f'\|_\infty + \|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty + |f(s)|$ pour tout $s \in S$.

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $s_1, ..., s_n \in S$. Sur l'e. v. $C^n(S, \mathbf{K})$, montrer que sont équivalentes les normes $\sum_{k=0}^n \left\|f^{(k)}\right\|_\infty$ et $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty + \sum_{k=1}^n \left|f^{(k-1)}(s_k)\right|$.

Sur l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur une partie X non vide, montrer l'équivalence des normes $|f(x_0)| + \sup_{a\neq b} \frac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|}$ lorsque x_0 décrit X.

On suppose $0 \in S$. Sur l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur S, comparer les normes $|f(s_0)| + \sup_{a\neq b} \frac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|}$ et $|f(s_0)| + \sup_{a\neq 0} \frac{|f(a)-f(0)|}{|a|}$.

Définition-propriété (topologie trace, ouverts, fermés et voisinages relatifs) *Soit A une partie de E. On appelle **ouvert** (resp. **fermé, voisinage**) **relatif** de A l'intersection de A et d'un ouvert (resp. fermé, voisinage) de E.*

*Les ouverts relatifs de A vérifient les axiomes d'une topologie, appelée **topologie trace** (de celle de E sur A). Les fermés (resp. voisinages) pour cette topologie sont les fermés (resp. voisinages) relatifs.*

★ Un ouvert relatif n'est pas forcément ouvert (dans tout l'espace) : en effet, toute partie non ouverte est un ouvert relatif de elle-même. Même remarque pour les fermés.

Exercice. *Dans un espace métrique, montrer que la topologie trace sur une partie A est la topologie de la distance induite sur A.*

6 Continuité

On fixe F un e. v. n.. Comme dans $\mathbf{K}$, on définit la ***tendance*** d'une fonction $f : A \longrightarrow F$ (où $A \subset E$) en un point e adhérent à A ***vers*** un point $\ell \in F$ en remplaçant module par norme, tendance notée $f \xrightarrow{e} \ell$. On dit qu'une telle fonction ***converge*** en e si $\exists \ell \in F,\ f \xrightarrow{e} \ell$; dans ce cas, on dit aussi que f est ***continue*** en e.

Remarque (prolongement continu). Lorsque $e \in A$, alors $\lim_e f$ vaut nécessairement $f(e)$. Sinon, on peut prolonger f sur $A \cup \{e\}$ en une fonction continue en e.

On retrouve les mêmes propriétés des limites que chez les suites (et que chez les fonctions continues dans $\mathbf{K}$). Par exemple :

1. une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point,
2. une comparaison triangulaire donne l'implication $f \xrightarrow{e} \ell \Longrightarrow \|f\| \xrightarrow{e} \|\ell\|$,
3. un -uplet de fonctions $(f_1, ..., f_n)$ tend en un $(e_1, ..., e_n)$ vers un $(\ell_1, ..., \ell_n)$ ssi chaque f_i tend en e_i vers ℓ_i,

[21] On prendra garde pas qu'il ne s'agit pas de la même définition que celle pour les valeurs absolues à cause de l'axiome 1.

4. ...

On dira que f est ***continue***, resp. ***uniformément continue***, resp. ***lipschitzienne*** sur A si f est continue en tout point de A, *i e.* si

$$\begin{aligned} & \forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall b \in A,\ \|a-b\| < \delta \Longrightarrow \|f(a) - f(b)\| < \varepsilon, \\ \text{resp. si} \quad & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall a, b \in A,\ \|a-b\| < \delta \Longrightarrow \|f(a) - f(b)\| < \varepsilon, \\ \text{resp. si} \quad & \exists C > 0,\ \forall a, b \in A,\ \|f(a) - f(b)\| \leq C \|a-b\|. \end{aligned}$$

On observera les implications

$$\text{lipschitzienne} \underset{\text{quantificateurs}}{\overset{\text{interversion de}}{\Longrightarrow}} \text{uniformément continue} \underset{\delta = \frac{\varepsilon}{C}}{\overset{\text{prendre}}{\Longrightarrow}} \text{continue.}$$

Propriétés (continuité vers/depuis un produit fini).

Soit $E_1, ..., E_n$ des e. v. n.. Alors *chaque projection canonique* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \twoheadrightarrow E_i$ *est continue.* Elles sont toutes 1-lipschitziennes puisque le produit est normé par $\|\cdot\|_\infty$.

Si F est un produit fini d'e. v. n., alors *une application* $f : E \longrightarrow F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ *est continue ssi chaque application "coordonnée"* $\pi_i \circ f$ *est continue* (où π_i désigne la projection canonique sur F_i). Utiliser le critère séquentiel (à venir).

Exemples.

1. **(continuité de la norme).** *La norme est* 1-*lipschitzienne* en vertu d'une comparaison triangulaire, donc continue.
2. **(continuité du produit).** *Le produit d'une algèbre normée est continu.* Écrire $\|ab - \alpha\beta\| \leq \|a\| \|b - \beta\| + \|\beta\| \|a - \alpha\|$.
3. **(continuité des polynômes).** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des sous-algèbres d'une même algèbre normée. Montrer que *les fonction polynomiales sur* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *sont continues.* Par sommes, il suffit de traiter le cas des monômes. Par produits, il suffit de traiter le cas des monômes de la forme $(t_1, ..., t_n) \mapsto t_i$ qui sont continus comme projections canoniques.
4. **(continuité d'une distance).** Montrer que *la distance à une partie est* 1-*lipschitzienne* (donc continue). Soient x et y dans E. Soit $a \in A$: puisque $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, on a $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$, d'où (en prenant l'*infimum* sur les $a \in A$) $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ et la conclusion en échangeant x et y.

Exercice. *Déterminer l'intérieur dans* $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ *des fonctions uniformément continues.* Soit f dans cet intérieur. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f + \varepsilon \mathbf{B}$ reste dans cet intérieur. Alors la fonction $f + \varepsilon \sin(\mathrm{Id}^2)$ reste dedans mais n'est pas uniformément continue (sinon $\sin(\mathrm{Id}^2)$ le serait).

Exercice. Montrer que *l'image uniformément continue d'une suite de Cauchy reste de Cauchy.*

Exercice (caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité). Soit f définie sur une partie P de E. Montrer que f *est uniformément continue ssi*

$$\forall a, b \in P^{\mathbf{N}},\ a_n - b_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow f(a_n) - f(b_n) \longrightarrow 0.$$

Application. Montrons que $t \mapsto \sin t^2$ *n'est pas uniformément continue.* Définissons deux suites $\begin{cases} a : n \mapsto \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \\ b : n \mapsto \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \end{cases}$ (correspondant aux abscisses de deux sommets successifs se rapprochant de plus en plus vers ∞). La différence $b_n - a_n = \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}}$ tend vers 0 mais la différence des images vaut constamment $1 - (-1) = 2$, ce qui nie le critère séquentiel d'uniforme continuité.

★ **Proposition.** *Soit* $f : A \longrightarrow F$. *Il équivaut alors de dire :*

1. f *est continue ;*
2. f *commute à l'opérateur* lim *;*
3. *pour tout* $a \in A$, *on a* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ f((a + \delta \mathbf{B}) \cap A) \subset f(a) + \varepsilon \mathbf{B}$ *;*
4. *pour tout* $a \in A$, *pour toute boule* V *centrée en* $f(a)$, *il y a une boule* U *centrée en* a *telle que* $f(U \cap A) \subset V$ *;*

5. ★ *la préimage par f de tout ouvert est ouverte (dans A) ;*
6. ★ *la préimage par f de tout fermé est fermée.*

Démonstration.
$1 \Longleftrightarrow 2$ Comme dans $\mathbf{K}$. $1 \Longleftrightarrow 3$ Immédiat. $3 \Longleftrightarrow 4$ Immédiat.
$4 \Longrightarrow 5$ Soit $O \subset F$ un ouvert. Soit $a \in f^{-1}(O)$. [dessin !] Puisque $f(a) \in O$, il y a une boule $V \subset O$ centrée en $f(a)$. D'après 3, il y a une boule U centrée en a telle que $f(U \cap A) \subset V$, d'où les inclusions $U \cap A \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(O)$.
$5 \Longrightarrow 4$ Soit $a \in A$. Soit V une boule ouverte centrée en $f(a)$. Alors $f^{-1}(V)$ est ouvert et contient a, donc contient une boule U centrée en a, d'où $f(U) \subset f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$.
$5 \Longleftrightarrow 6$ Puisque $f^{-1}(Y \setminus X) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(X)$, on a en particulier quand $Y = F$ l'égalité $f^{-1}({}^cX) = A \setminus f^{-1}(X)$ pour toute partie X. Il reste à dire que fermés et ouverts s'échangent par complémentaire.
★ les derniers points deviennent faux si l'on remplace les préimages par les images directes. Par exemple, toute fonction constante est continue mais l'image de toute partie non vide est un singleton (qui n'est jamais ouvert et est toujours fermé). De même, les fonctions continues th et atn envoient le fermé $\mathbf{R}$ sur un intervalle ouvert.

Exemple. Montrer que *le noyau d'une application linéaire continue est fermé.* Il suffit d'écrire le noyau comme préimage du fermé $\{0\}$. Réciproque en exercice !
Exemple (les fermés sont les lieux d'annulation). Montrer que *les fermés de E sont exactement les lieux d'annulation des fonctions réelles continues sur E.* Soit f une telle fonction. Alors son lieu d'annulation est la préimage continue du fermé $\{0\}$, donc est fermé. Soit F un fermé. Alors F est la lieu d'annulation de la fonction $d(\cdot, F)$.
Exercice (analogue algébrique : fermés de Zariski). *Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. Montrer que les lieux d'annulation des polynômes de $k[X_1, X_2, ..., X_n]$ définissent les fermés d'une topologie.*

★ **Proposition (continuité des application linéaires).** Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Il équivaut alors de dire :

1. *f est continue ;*
2. *f est continue en 0 ;*
3. *f est lipschitzienne ;*
4. ★ *f est "lipschitzienne en 0", au sens où $\exists C > 0,\ \forall a \in E,\ \|f(a)\| \leq C\|a\|$;*
5. *f est bornée sur la boule unité ;*
6. *f est bornée sur la sphère unité.*

Démonstration. Sont immédiates les implications $3 \Longrightarrow 1 \Longrightarrow 2$ et $3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 6$.
$6 \Longrightarrow 3$ Soit $C > 0$ majorant $f(\mathbf{S})$. Soient a et b distincts dans E. Alors $\frac{a-b}{\|a-b\|} \in \mathbf{S}$, donc son image est de norme $\leq C$, ce qui s'écrit (par linéarité) $\left\|\frac{1}{\|a-b\|} f(a-b)\right\| \leq C$, *i. e.* (par homogénéité) $\|f(a-b)\| \leq C\|a-b\|$ (ce qui reste vrai quand $a = b$).
$2 \Longrightarrow 4$ Soit $\delta > 0$ tel que $\|a - 0\| < \delta \Longrightarrow \|f(a) - f(0)\| < 1$. Soit $a \in \mathbf{S}$. Alors $\frac{\delta a}{2}$ est de norme $< \delta$, donc a une image de norme < 1, ce qui s'écrire $\left\|f\left(\frac{\delta a}{2}\right)\right\| \leq 1$, *i. e.* (par linéarité) $\left\|\frac{\delta}{2\|a\|} f(a)\right\| \leq 1$, *i. e.* (par homogénéité) $\|f(a)\| \leq \frac{2}{\delta}\|a\|$.

Définition-propriété (l'e. v. $L_c(E, F)$ et l'algèbre $L_c(E)$). *On note $L_c(E, F)$ le sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ formé des applications continues. On le norme par $|||f||| := \sup_{a \neq 0} \frac{\|f(a)\|}{\|a\|} = \sup_{\|a\|=1} \|f(a)\|$ (qui est fini d'après ce qui précède). Cette* ***norme triple*** *est aussi appelée* ***norme subordonnée*** *(à celles de E et de F).*
(rq : la norme triple n'est autre que la norme de Lipschitz $\|f(x_0)\| + \sup_{a \neq b} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}$ avec $x_0 := 0$)

Intérêt. Comparer deux grandeurs à l'aide d'un coefficient : $\|f(a)\| \leq |||f|||\ \|a\|$ (un peu comme comparer tension et intensité grâce au coefficient résistance : $U = RI$)

Propriété (norme triple est d'algèbre). *La norme triple est sous-multiplicative.* Soit $f \in L_c(E, F)$, soit $g \in L_c(F, G)$, soit $a \in E$ non nul. On a alors les comparaisons

$$\|g \circ f(a)\| = \|g(f(a))\| \leq |||g|||\ \|f(a)\| \leq |||g|||\ |||f|||\ \|a\|.$$

Corollaire (l'algèbre normée $L_c(E)$). *L'algèbre $L_c(E) := L_c(E, E)$ est normée par $|||\cdot|||$.*

Exercice. *Soient f et g deux endomorphismes tel que $[f, g] = \mathrm{Id}$. Montrer qu'ils ne peuvent pas être tous deux continus (sauf si l'e. v. n. est nul).* On montre par récurrence $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ [f, g^n] = ng^{n-1}$. On en déduit

$$n\left\|g^{n-1}\right\| = \|fg^n - g^n f\| \leq \left\|fg^{n-1}g\right\| + \left\|fgg^{n-1}\right\| \leq 2\|f\|\|g\|\left\|g^{n-1}\right\|.$$

Si $g^{n-1} \neq 0$ pour tout n, on doit avoir $\|f\| \geq \frac{n}{2\|g\|} \longrightarrow \infty$, *absurde*. Dans le cas contraire, g est nilpotent, mettons d'indice $p \geq 1$, mais alors $0 = [f, g^p] = pg^{p-1} \neq 0$ (sauf si notre e. v. n. est nul), *absurde*.

(remarque : on pourra retenir l'égalité $[f, P(g)] = P'(g)$ valide pour tout polynôme P dès qu'elle l'est pour le polynôme X)

Exercice. On se place dans $M_n(\mathbf{K})$. Soient α et β deux réels ≥ 1. On note N_α^β la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\alpha$ au début et à $\|\cdot\|_\beta$ à l'arrivée. *Montrer que N_α^β est une norme d'algèbre ssi $\alpha \leq \beta$.*

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient A et B dans $M_n(\mathbf{K})$. Soit $X \in \mathbf{S}_\alpha$. On a déjà $\|ABX\|_\beta \leq N_\alpha^\beta(A)\|BX\|_\alpha$. Puisque $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1$, la fonction $\mathrm{Id}^{\frac{\beta}{\alpha}}$ est concave, donc (puisqu'elle fixe 0) sous-additive, d'où l'on tire

$$\|BX\|_\alpha = \sqrt[\alpha]{\sum_i \left|\sum_j b_{i,j}x_j\right|^\alpha} \leq \sqrt[\beta]{\sum_i \left|\sum_j b_{i,j}x_j\right|^\beta} = \|BX\|_\beta \leq N_\alpha^\beta(B)\|X\|_\beta = N_\alpha^\beta(B),\ c.\ q.\ f.\ d..$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Le projecteur $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\|A\| = \left\|A^2\right\| \leq \|A\|^2$, donc est de norme ≥ 1. Calculons cette norme. Soit $\binom{\lambda}{\mu}$ tel que $\lambda^\alpha + \mu^\alpha = 1$. Alors $\left\|A\binom{\lambda}{\mu}\right\|_\beta = \frac{1}{2}\sqrt[\beta]{2\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^\beta} = 2^{\frac{1}{\beta}}\frac{\lambda+\mu}{2} \overset{\text{car } \alpha\geq 1}{\leq} 2^{\frac{1}{\beta}}\sqrt[\alpha]{\frac{\lambda^\alpha+\mu^\alpha}{2}} = 2^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}$ avec $=$ atteinte pour $\lambda = \mu$, d'où l'on tire $1 \leq N_\alpha^\beta(A) = 2^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}$, *i. e.* $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \geq 0$, *i. e.* $\alpha \geq \beta$.

7 Compacité

Définition (compacité séquentielle). *Une partie[22] K de E est dite **compacte** si toute suite de $K^{\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans K.*

Exemples :

1. *la partie vide $\emptyset$ est compacte* ;
2. *les singletons sont compacts* ;
3. *les segments de $\mathbf{R}$ sont compacts* : montrons ce **théorème de Bolzano-Weierstrass**. Soit (a_n) une suite réelle bornée. Il suffit de montrer qu'elle admet une sous-suite monotone. Si l'ensemble

$$I := \{i \in \mathbf{N}\ ;\ \forall n > i,\ a_n \geq a_i\}$$

est infini, mettons $I = \{i_1 < i_2 < i_3 < \cdots\}$, alors on peut extraire une sous-suite (a_{i_n}) croissante. Sinon, l'entier $M := 1 + \max I$ fait sens et pour tout $i \geq M$ l'on a $i \notin I$, *i. e.* $\exists n > i,\ a_n < a_i$, ce qui légitime la définition de la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} \cap [M, \infty[& \longrightarrow & \mathbf{N} \cap [M, \infty[\\ i & \longmapsto & \min\{n > i\ ;\ a_n < a_i\} \end{array}\right.$ dont l'itération fournit une extraction qui donne une sous-suite $\left(a_{f^{\circ n}(M)}\right)$ décroissante.

Propriété. *La famille des compacts de E est stable par union finie.* On le démontre comme pour les fermés. Il suffit par récurrence de montrer que la réunion de deux compacts reste compacte. Soient K et L deux compacts. Soit a une suite à valeurs dans $K \cup L$. Puisque la réunion $a^{-1}(K) \cup a^{-1}(L) = a^{-1}(K \cup L) = \mathbf{N}$ est infinie, l'une des deux parties $a^{-1}(K)$ ou $a^{-1}(L)$ de $\mathbf{N}$ est infinie, mettons $a^{-1}(K)$, d'où une sous-suite à valeurs dans K, de laquelle on extrait (par compacité de K) une sous-suite convergente dans $K \subset K \cup L$.

★ Cette propriété est fausse pour la réunion infinie : la réunion $]0, 1]$ des $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ contient une suite qui "tend vers 0" (à savoir la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$) et qui donc n'admet aucune sous-suite convergente dans $]0, 1]$.

On déduit des points précédents d'autres exemples de compacts :

[22] Les compacts sont traditionnellement notés avec la lettre K, la lettre C étant plutôt réservée aux convexes.

1. *les ensembles finis* (comme réunions finies de singletons) ;
2. *les réunions finies de segments réels.*

Exemple utilisant un argument diagonal. *Les complétions $\mathbf{Z}_p$ sont compactes.* Soit p premier. Soit a une suite d'entiers p-adiques. Les premiers chiffres (à droite) des a_n prenant leurs valeurs dans un ensemble fini (les p "chiffres" $0, 1, ..., p-1$), on peut extraire de a une sous-suite $a \circ \varphi_1$ dont les premiers chiffres sont constants. De même, les deuxièmes chiffres des $a_{\varphi_1(n)}$ prenant leurs valeurs dans un ensemble fini, on peut extraire de $a \circ \varphi_1$ une sous-suite $a \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ dont les deuxièmes chiffres sont constants. On construit ainsi une suite (φ_n) d'extractrices telles que, pour tout naturel k, les entiers $a_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)}$ ont tous (quand n varie) les mêmes k premiers chiffres, disons $c_k c_{k-1} ... c_1$. Montrons que l'entier $\ell := ...c_3c_2c_1$ est une valeur d'adhérence. Comment construire une extraction qui utilise les propriétés de tous les φ_k, à savoir que les k premiers chiffres sont stationnaires ? En extrayant de manière ***diagonale***[23] $\psi : n \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n (n)$. On vérifie qu'il s'agit bien d'une extraction. Soit alors $k \in \mathbf{N}$: la suite $\left(a_{\psi(n)}\right)$ est extraite de la suite $\left(a_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)}\right)$ à partir d'un certain rang (en fait k), donc ses k premiers chiffres sont ceux de ℓ à partir d'un certain rang, ce qui conclut (on a plus précisément $\left|a_{\psi(n)} - \ell\right|_p < p^{-n} \longrightarrow 0$).(

Culture (corps locaux). Nous venons de montrer que *les boules unités (fermées) des complétions de* $\mathbf{Q}$ *sont compactes.* Cette propriété (qui implique – nous le verrons à la section suivante – la complétude pour une valeur absolue) définit les ***corps locaux***, lesquels sont utilisés pour faire de l'analyse (en particulier en théorie algébrique des nombres). Les corps locaux *archimédiens* sont $\mathbf{R}$ et[24] $\mathbf{C}$.

Digression sur BW. Profitons de Bolzano-Weiestrass pour manipuler les sous-suites et tout particulièrement traduire les non-tendances.

Propriété (convergence et adhérence). *Une suite réelle converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ ssi son adhérence est réduite à un singleton :*

$$a_n \longrightarrow l \Longleftrightarrow \operatorname{Adh} a = \{l\} .$$

Démonstration (traduction de non-tendances en termes de suites extraites).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque $a_n \longrightarrow \ell$, toutes les sous-suites de a tendent vers ℓ aussi.

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Cas $\ell = \infty$.* Supposons par l'absurde que a ne tend pas vers ∞. Montrons que l'on peut extraire une sous-suite qui est majorée. On n'a pas $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ n > N \Longrightarrow a_n > A$, donc on a $\exists A > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n > N,\ a_n \leq A$: en itérant $n \mapsto \min\{n > N\ ;\ a_n \leq A\}$, on obtient une extractrice comme souhaité. Soit $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ une telle sous-suite. Alors $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ ne tend pas vers $-\infty$ (sinon $-\infty$ serait dans $\operatorname{Adh} a$), donc on peut extraire par la même procédé une sous-suite $\left(a_{\varphi(\psi(n))}\right)$ minorée ; puisque $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ est majorée, la suite $\left(a_{\varphi(\psi(n))}\right)$ est bornée, donc on peut en extraire (par BW) une sous-suite convergent dans $\mathbf{R}$, d'où un réel fini dans $\operatorname{Adh} = \{\infty\}$, ce qui ne saurait être.

Le cas $\ell = -\infty$ se traite de même.

Cas ℓ fini. Supposons par l'absurde que a ne tend pas vers ℓ. On peut alors invoquer un $\varepsilon_0 > 0$ et une extractrice φ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \left|a_{\varphi(n)} - \ell\right| > \varepsilon_0.$$

Si la sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ n'était pas majorée, on pourrait en extraire une sous-suite tendant vers ∞, d'où l'appartenance absurde $\infty \in \operatorname{Adh} a$; on montre de même que $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ est minorée, *a fortiori* bornée, donc admet (par BW) une valeur d'adhérence, laquelle est une valeur d'adhérence de a et donc vaut ℓ. Or les comparaisons $\left|a_{\varphi(n)} - \ell\right| > \varepsilon_0$ empêchent cela.

Adage de non-tendance. On retiendra de cette démonstration :

ne pas tendre vers $\square$, c'est admettre une sous-suite "loin de $\square$".

Exercice. *Soit K un compact, soit $(k_n) \in K^{\mathbf{N}}$, soit $\ell \in K$. On a alors l'équivalence $k_n \longrightarrow \ell \Longleftrightarrow$ $\operatorname{Adh} k = \{\ell\}$.*

(Si l'on pense au segment $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$ comme à un segment réel, alors cet exercice généralise la propriété ci-dessus.)

[23] dans un tableau d'entrée (k, n) où l'on note $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k (n)$, la diagonale est formée des $\psi (n)$

[24] on montre plus loin que la boule unité de $\mathbf{C}$ est compacte

Exercice. *Soit $a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ bornée telle que $a_n + \frac{a_{2n}}{2} \longrightarrow 1$. Montrer que a converge et trouver sa limite.*

Analyse. Si a converge vers un réel l, alors (a_{2n}) aussi, d'où l'égalité $l + \frac{l}{2} = 1$ et $l = \frac{2}{3}$.

Synthèse. Posons[25] $b := a - \frac{2}{3}$. Elle vérifie $b_n + \frac{b_{2n}}{2} \longrightarrow 0$. Elle est bornée, donc admet une sous-suite $b_{\varphi(n)}$ convergente, disons vers l, d'où $b_{2\varphi(n)} \longrightarrow -2l$. Cela montre que $\operatorname{Adh} b$ est non vide et est stable par $-2\operatorname{Id}$; or b est bornée, donc $\operatorname{Adh} b$ aussi, d'où les inclusions $\emptyset \subsetneq \operatorname{Adh} b \subset \{0\}$ et l'égalité $\operatorname{Adh} b = \{0\}$. Le corollaire ci-dessus permet alors de conclure.

Finissons notre digression en complétant notre preuve de Stone-Weierstrass par convolution : le théorème suivant, couplé à la compacité des segments réels, nous le permettra.

Théorème (Heine). *Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.*

Démonstration. Soit K un compact, soit f continue sur K supposée par l'absurde non uniformément continue. D'après le critère séquentiel d'uniforme continuité, on peut invoquer deux suites (a_n) et (b_n) de $K^{\mathbf{N}}$ dont la différence tend vers 0 et telles que $f(a_n) - f(b_n)$ ne tend pas vers 0. Quitte à extraire "loin de 0", on peut invoquer un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ \|f(a_n) - f(b_n)\| > \varepsilon_0$. Quitte à extraire par compacité, on peut supposer (a_n) convergente, mettons vers un $l \in K$: la tendance $a_n - b_n \longrightarrow 0$ montre alors que $b_n \longrightarrow l$, d'où (par continuité de f en l) la tendance $f(a_n) - f(b_n) \longrightarrow f(l) - f(l) = 0$, ce qui est absurde vu les comparaisons $\|f(a_n) - f(b_n)\| > \varepsilon_0$.

La réciproque est proposée en T. G., montrant la nécessité de l'hypothèse de compacité.

Après ces exemples et digression sur BW, revenons aux propriétés générales des compacts.

Propriétés des compacts.

1. *Un compact est fermé et borné.*
2. *Un fermé inclus dans un compact est compact.*
3. *Un produit (fini) de compact est compact.*
4. *L'image continue d'un compact est compacte.*
5. ★ *Une fonction continue sur un compact y est bornée et (si elle est à valeurs réelles) atteint ses bornes.*

Démonstrations. Soit K un compact.

1. Soit $(a_n) \in K^{\mathbf{N}}$ convergente. Par compacité, on peut extraire $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ tendant vers un $l \in K$; or a converge, donc toutes ses sous-suites tendent vers $\lim a$, d'où $\lim a = l \in K$.

   Supposons K non borné. On a donc $\forall R > 0,\ \exists k \in K,\ \|k\| > R$. En remplaçant R par n pour tout naturel n, on obtient[26] une suite $(k_n) \in K^{\mathbf{N}}$ dont la norme tend vers l'infini, donc dont toutes les sous-suites ont une norme divergente – en conséquence ne sauraient converger.
2. Soit F un fermé inclus dans K. Soit $(f_n) \in F^{\mathbf{N}}$. Puisque $F^{\mathbf{N}} \subset K^{\mathbf{N}}$, on peut extraire $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ tendant vers un $f \in K$. Puisque F est fermé, la limite de $\left(f_{\varphi(n)}\right) \in F^{\mathbf{N}}$ reste dans F.
3. Il suffit de traiter le cas d'un produit de deux compacts. Soit L un compact. Soit $(a_n, b_n) \in (K \times L)^{\mathbf{N}}$. On commence par extraire une sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ convergente dans K, puis on extrait de $\left(b_{\varphi(n)}\right)$ une sous-suite $\left(b_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergente dans L. Alors la suite extraite $\left(a_{\varphi(\psi(n))}, b_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge dans $K \times L$.
4. Soit f continue sur K. Soit $(b_n) \in f(K)^{\mathbf{N}}$. Soit[27] $(a_n) \in K^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ b_n = f(a_n)$. On extrait une sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ tendant vers un $l \in K$, d'où (par continuité de f en l) la tendance $b_n = f(a_n) \longrightarrow f(l) \in f(K)$.
5. Soit f continue sur K. L'image $f(K)$ est compacte, donc est bornée. Supposons f réelle. Notons $s := \sup_K f$. Pour tout naturel $n > 0$, il y a un $k_n \in K$ tel que $f(k_n) > s - \frac{1}{n}$, d'où[28] une suite $(k_n) \in K^{\mathbf{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq s - f(k_n) \leq \frac{1}{n}$. Soit $l \in \operatorname{Adh} k$: par continuité de f en l, les comparaisons précédentes montrent que $s = f(l)$. On prouverait de même que $\inf_K f$ est atteint.

[25] le problème étant linéaire, cette étape est naturelle et clarifie grandement ce qui suit

[26] grâce à une fonction de choix sur K

[27] *via* une fonction de choix sur K

[28] *via* une fonction de choix sur K

Remarque (compact ou extrémal ?). Le dernier point est vital : sa conclusion est se révèle très prolifique en analyse (elle nous permettra de montrer le théorème fondamental de l'algèbre) et est à ce titre très désirable. Elle aurait pu être prise comme *définition* des compacts, comme le faisait Fréchet en 1906 dans sa thèse lorsqu'il qualifiait d'*extrémales* les parties compactes. Une réciproque est à ce titre proposée en T. G.

Remarque (atteindre ses bornes). On dira qu'une fonction bornée f ***atteint ses bornes*** pour dire que la fonction positive $\|f\|$ atteint les siennes. On vérifiera la cohérence de cette terminologie avec le cas des fonctions réelles (**exercice !**). Alors le dernier point reste valide sans la parenthèse :

★ *toute fonction continue sur un compact y atteint ses bornes.*

Remarque (produit dénombrable et argument diagonal). Les extractions successives dans la démonstration du point 3 peuvent se poursuivre à l'infini grâce à un argument diagonal. On pourra à ce sujet montrer que l'*on peut extraire d'une suite de suites bornées une sous-suite qui converge simplement* (**exercice !**).

Corollaires (exercices).

1. *Le bord d'un compact est compact..*
2. *La boule unité fermée de* $\mathbf{C}$ *est compacte pour la norme euclidienne.*
3. *Les sphère et boule unité fermée des* $\mathbf{K}^n$ *sont compactes pour la norme uniforme ssi celles de* $\mathbf{K}$ *sont compactes.*
4. *La distance entre deux compacts est atteinte*
5. *La distance d'un point à un compact est toujours atteinte.*

Démonstrations.

1. Soit K un compact. Son bord $\overline{K}\setminus\mathring{K}$ est l'intersection des fermés $\overline{K}=K$ et ${}^c\mathring{K}$, donc est un fermé inclus dans le compact K.
2. Le disque unité est l'image par l'application continue $(r,\theta)\mapsto re^{i\theta}$ du compact $[0,1]\times[-\pi,\pi]$.
3. Le sens $\Longrightarrow$ est trivial. Pour celui $\Longleftarrow$, la sphère unité est le bord de la boule unité fermée, laquelle est un produit de boules unités fermées de $\mathbf{K}$.
4. Soient K et L deux compacts de E. La fonction $(a,b)\mapsto a-b$ est continue sur E^2 (car 1-lipschitzienne), donc atteint son *infimum* sur le compact $K\times L$.
5. Appliquer le point précédent lorsque l'un des compacts est un singleton.

Nous sommes à présent armés pour démontrer le principal résultat sur les e. v. n.

Pour toute la suite, on supposera la *compacité* de la boule unité fermé du corps de base $\mathbf{K}$.

★ Théorème (équivalence des normes en dimension finie). *Supposons E de dimension finie. Alors toutes les normes de E sont équivalentes.*

Démonstration. Soient $\|\cdot\|$ et N des normes sur E. On veut montrer $\exists\alpha,\beta>0,\ \forall a\in E,\ \alpha N(a)\leq\|a\|\leq\beta N(a)$. Par positive homogénéité de N et $\|\cdot\|$, cela revient à $\exists\alpha,\beta>0,\ \forall a\in E\setminus\{0\}\ ,\ \alpha\leq\left\|\frac{a}{N(a)}\right\|\leq\beta$ ou encore à dire que l'application $\|\cdot\|$ est bornée sur la sphère $\{a\in E\ ;\ N(a)=1\}:=\mathbf{S}_N$ par des valeurs strictement positives. Si l'on montre que $\|\cdot\|$ est continue et que la sphère $\mathbf{S}_N$ est compacte (pour une certaine topologie judicieusement choisie), alors $\|\cdot\|$ sera bornée sur $\mathbf{S}_N$ et y atteindra ses bornes, son minimum ne pouvant être nul puisque $\|\cdot\|$ ne s'annule qu'en le vecteur nul qui n'appartient pas à $\mathbf{S}_N$, ce qui conclura.

On cherche une sphère compacte ? Le point 3 ci-dessus nous en donne une : celle de $(\mathbf{K}^n,\|\cdot\|_\infty)$. Nous allons transporter cette dernière dans E de manière *isométrique*, ce qui fournira une sphère (comme image par une isométrie) compacte (comme image continue[29] d'un compact). Précisons tout cela.

[29] une isométrie est 1-lipschitzienne, *a fortiori* continue

Notons $n := \dim E$ et soit (e_i) une base de E. On a alors un isomorphisme (d'espaces vectoriels) $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \widetilde{\longrightarrow} & \mathbf{K}^n \\ \sum \lambda_i e_i & \leftrightarrow & \overrightarrow{\lambda} \end{array} \right.$. On transporte la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbf{K}^n$ sur E grâce à cet isomorphisme en définissant (rétrospectivement) $N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ a & \longmapsto & \|\varphi(a)\|_\infty \end{array} \right.$. On s'assurera que N est une norme (**exercice !**).

Remarquer que φ est une isométrie $(E, N) \widetilde{\longrightarrow} (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Comme expliqué ci-dessus, l'image par l'isométrie φ^{-1} de la sphère unité de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est la sphère unité de (E, N) et est compacte. Il suffit alors de montrer que l'application $\|\cdot\|$ est lipschitzienne (pour la topologie de N), ce qui découle des comparaisons (à $a, b \in E$ fixés)

$$|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\| = \left\|\sum a_i e_i - \sum b_i e_i\right\| = \left\|\sum (a_i - b_i) e_i\right\| = \sum \underbrace{|a_i - b_i|}_{\leq N(a-b)} \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right) N(a - b).$$

Remarque (produit fini d'e. v. n.). Dans ce cours, on a normé les produits finis d'e. v. n. à l'aide de la norme uniforme. Le théorème ci-dessus montre que n'importe quelle autre norme aurait fait l'affaire. (Le choix de celle uniforme était motivé par pure et simple *commodité*.)

Remarque (algèbre normée matricielle). L'algèbre $M_n(\mathbf{K})$ peut être normée par n'importe quelle norme subordonnée, ce qui permettra dans d'éventuels calculs d'utiliser le caractère *sous-multiplicatif* de la norme.

★ Corollaire 1 (linéaire $\Longrightarrow$ continu en dimension finie). *Supposons E de dimension finie. Soit F un e. v. n. Alors $L(E, F) = L_c(E, F)$.*

Démonstration. Soit $f \in L(E, F)$. Soit (e_i) une base de E. On norme E par la norme uniforme dans cette base. Soit $a \in E$. On a les comparaisons

$$\|f(a)\| = \left\|f\left(\sum a_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum a_i f(e_i)\right\| \leq \sum |a_i| \|f(e_i)\| \leq \left(\sum \|f(e_i)\|\right) \|a\|_\infty, \text{ ce qui conclut.}$$

Il serait aisé d'adapter l'argument pour montrer qu'*en dimension finie toute application multilinéaire est continue* (**exercice !**). Typiquement : le produit dans une algèbre de dimension finie, le produit scalaire sur un $\mathbf{K}^n$, le déterminant sur un $M_n(\mathbf{K})$.

★ Corollaire 2 (compact = fermé borné[30] en dimension finie). *Supposons E de dimension finie. Alors ses compacts sont ses fermés bornés.*

Démonstration. Le sens "compact $\Longrightarrow$ fermé borné" a déjà vu. Montrons l'autre sens.

Soient $\|\cdot\|$ une norme sur E et $K \subset E$ un fermé borné pour $\|\cdot\|$. Puisque K est borné, on peut invoquer un $r > 0$ tel que $K \subset r\mathbf{B}$. Soit N une norme sur E dont la boule unité est compacte (il en existe d'après la démonstration du théorème précédent). Puisque $\|\cdot\|$ est équivalente à N, la boule $\mathbf{B}$ est incluse dans une certaine boule de (E, N), mettons $\mathbf{B} \subset \lambda\overline{\mathbf{B}}_N$ pour un certain $\lambda > 0$, d'où l'on tire l'inclusion $K \subset \lambda r\overline{\mathbf{B}}_N$. Or les homothéties sont continues (car lipschitziennes), donc toutes les boules fermées de (E, N) sont compactes comme images du compact $\overline{\mathbf{B}}_N$ par des homothéties. Par conséquent, la partie K est fermée dans le compact $\lambda r\overline{\mathbf{B}}_N$, donc est compacte, *c. q. f. d.*

Exemples. En dimension finie, $\overline{\mathbf{B}}$ et toutes les boules fermées sont compactes. On en déduit que tout e. v. n. de dimension finie est localement compact[31] : ainsi, si l'on a besoin de travailler *au voisinage d*'un point, on pourra toujours se placer dans un voisinage *compact* de ce point.

Contre-exemple (cas particulier du théorème de Riesz). Supposons $E = C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et montrons que $\overline{\mathbf{B}}$ (pour la norme uniforme) n'est pas compacte. Pour tout naturel n, on invoque une fonction f_n de support $[n, n+1]$ affine par morceau de maximum 1 (s'assurer que l'on sait construire une telle fonction !). On a alors pour tous naturels a et b distincts l'égalité $\|f_b - f_a\| = 1$, ce qui nie le critère de Cauchy : aucune sous-suite de (f_n) ne peut converger.

[30] le caractère fermé est une fioriture permettant aux valeurs d'adhérence de rester dans notre partie : l'essentiel de ce résultat s'énonce comme Bolzano-Weierstrass

[31] si l'on a besoin de travailler au voisinage d'un point, on pourra toujours se placer dans un voisinage *compact* de ce point

Application (compacité des groupes unitaires). Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que *le groupe unitaire* $U_n(\mathbf{K}) := \{A \in M_n(\mathbf{K}) \; ; \; AA^* = I_n\}$ *est compact.*

Effectuons quelques **sanity checks** dans le cas $n = 1$. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, le groupe unitaire est la paire $\{-1, 1\}$, laquelle est compacte comme toute partie finie ; lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, le groupe unitaire est le cercle unité, lequel est compact comme image continue du compact $[-\pi, \pi]$ par $t \mapsto e^{it}$.

Puisque $M_n(\mathbf{K})$ est de dimension finie, il s'agit de montrer que $U_n(\mathbf{K})$ est fermé et borné.

On se convaincra que la condition $AA^* = I_n$ équivaut à ce que les colonnes de A forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$. En particulier, toutes les coordonnées d'une matrice de $U_n(\mathbf{K})$ sont bornées par 1, ce qui montre que $U_n(\mathbf{K})$ est borné (pour la norme uniforme).

Par ailleurs, $U_n(\mathbf{K})$ est la préimage du fermé $\{I_n\}$ par l'application $A \mapsto AA^*$: on aura gagné si l'on montre que cette dernière est continue. Or d'une part la multiplication des matrices est continue, d'autre part le produit de l'identité et de la transconjugaison $A \mapsto (A, A^*)$ est continue (c'est une isométrie pour les normes uniformes), donc la composée $A \mapsto (A, A^*) \mapsto AA^*$ est également continue.

Quelques exercices.

1. *La somme d'un nombre fini de compacts de E est compacte.*

   Il suffit par récurrence de le faire pour *deux* compacts, mettons K et L. Or l'addition $E^2 \longrightarrow E$ est continue (car lipschitzienne), donc l'image du produit $K \times L$ (qui est compact comme produit fini de compacts) est compacte.

2. *La somme d'un fermé et d'un compact est fermée.*

   Soient F un fermé et K un compact de E. Soient $a \in (F + K)^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$. Soit[32] $(f, k) \in F^{\mathbf{N}} \times K^{\mathbf{N}}$ tel que $a = f + k$. De la suite (k_n) on extrait une sous-suite $\left(k_{\varphi(n)}\right)$ tendant vers un certain $\kappa \in K$. Alors la suite $\left(f_{\varphi(n)}\right) = \left(a_{\varphi(n)}\right) - \left(k_{\varphi(n)}\right)$ tend vers $\ell - \kappa$; cette suite prenant ses valeurs dans le fermé F, sa limite reste dans F, d'où l'appartenance $\ell = (\ell - \kappa) + \kappa \in F + K$, ce qui conclut.

3. *La somme de deux fermés est-elle compacte ? fermée ?*

   La réponse est "non" aux deux questions. Supposons $E = \mathbf{R}$. Alors les sous-groupes $\mathbf{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbf{Z}$ sont fermés. Leur somme est un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$ (pour la densité, on utilise l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et un exercice classique posé dans le cours sur les groupes) et dénombrable (image de la surjection $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbf{Z} + \sqrt{2}\mathbf{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b\sqrt{2} \end{array} \right.$ de source dénombrable), donc ne peut être fermée (sinon elle vaudrait son adhérence $\mathbf{R}$ qui n'est pas dénombrable), *a fortiori* compacte.

4. *La somme d'un fermé borné et d'un compact est-elle compacte ?*

   En dimension finie, on demande si la somme de deux compacts est compacte, ce qui fait l'objet du premier exercice. En dimension infinie, on montre en T. G. (théorème de Riesz) que la boule $\overline{\mathbf{B}}$ est fermée bornée mais pas compacte : puisque le singleton $\{0\}$ est compact, la non-compacité de la somme $\overline{\mathbf{B}} + \{0\} = \overline{\mathbf{B}}$ permet de répondre "non" à la question.

5. ★ ***(minimum d'une fonction réelle)*** *Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(a) \overset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. On suppose E de dimension finie. Montrer que* $\min f$ *fait sens.*

   Montrons que $\inf f$ fait sens, *i. e.* que f est minorée. Par hypothèse, on peut invoquer (et on le fait !) un réel $R > 0$ tel que $\forall a \in E, \; \|a\| > R \Longrightarrow f(a) > 18$. Ainsi la fonction f est-elle minorée sur $E \backslash R\overline{\mathbf{B}}$ par 18 ; puisqu'elle est par ailleurs minorée sur $R\overline{\mathbf{B}}$ (en tant que fonction continue sur un compact), elle est minorée sur tout E par $\min\left\{18, \inf_{R\overline{\mathbf{B}}} f\right\}$.

   Montrons que $i := \inf f$ est atteinte. Soit $r > 0$ tel que $\forall a \in E, \; \|a\| > r \Longrightarrow f(a) > i + 42$. Montrons que $i = \inf_{r\overline{\mathbf{B}}} f$, ce qui conclura puisque la fonction continue f restreinte au compacte $r\overline{\mathbf{B}}$ atteint son *infimum.* La comparaison $\leq$ est immédiate vu la décroissance de $X \mapsto \inf_X f$ et l'inclusion $f(E) \supset f\left(r\overline{\mathbf{B}}\right)$. La caractérisation séquentielle d'un *extremum* dans $\mathbf{R}$ permet par ailleurs d'invoquer une suite $(a_n) \in E^{\mathbf{N}}$ telle que $f(a_n) \longrightarrow i$. Alors les réels $f(a_n)$ sont $< i + 1$ à partir d'un certain rang, en particulier sont $\leq i + 42$, donc (par propriété de r) les a_n ne peuvent être dans $E \backslash r\overline{\mathbf{B}}$, donc sont dans $r\overline{\mathbf{B}}$, d'où l'on tire $\inf_{r\overline{\mathbf{B}}} f \leq f(a_n)$ à partir d'un certain rang ; appliquer $\lim_{n \to \infty}$ donne la comparaison $\inf_{r\overline{\mathbf{B}}} f \leq i$ cherchée.

Le dernier exercice est un lemme clef, reposant sur la compacité, qui va nous conduire au théorème fondamental de l'algèbre.

[32] permis par l'axiome du choix

Montrons avant cela un autre de ses corollaires, à savoir que *la distance à un s.-e. v. de dimension finie est atteinte*. Soient V un tel s.-e. v. et a un point de E. La fonction $d(a,\cdot)$ est alors continue (*cf.* section 6) et tend vers ∞ "en ∞" vu les comparaison et tendance $\|x-a\| \geq \|x\| - \|a\| \overset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc (par l'exercice précédent) réalise son mininum sur V. (Une démonstration directe est proposée en T. G.)

Corollaire (théorème fondamental de l'algèbre) *Tout polynôme complexe non constant s'annule.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant (que l'on peut sans nuire à la généralité supposer unitaire). La fonction $a \mapsto |P(a)|$ est alors continue et telle que $|P(a)| \sim |a|^{\deg P} \overset{|a|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (cette dernière tendance car $\deg P > 0$), donc atteint son *infimum*. Soit a un complexe tel que $|P(a)| = \min|P|$. On veut montrer $P(a) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $|P(a)| > 0$. Montrons alors que l'on peut trouver un complexe b tel que $|P(b)| < |P(a)|$, ce qui contredira la minimalité de a.

Quitte à translater par $X - a$ et diviser par $|P(a)|$, on peut supposer P de la forme $1 + \lambda X^v + X^{v+1}Q$ où $v := \operatorname{val}(P-1)$ (pour un certain polynôme Q). Noter que, P n'étant pas constant, le polynôme $P - 1$ n'est pas nul, donc sa valuation v est finie. Elle est par ailleurs non nulle puisque $P(0) = 1$. On a donc $v \geq 1$. Soient maintenant $r > 0$ (pensé petit) et $\theta \in [-\pi, \pi]$ (à bien choisir rétrospectivement). On a alors les comparaisons absurdes :

$$\left|P\left(re^{i\theta}\right)\right| = \left|1 + \lambda r^v e^{iv\theta} + o_{r\to 0}(r^v)\right| \underset{\text{assez petit}}{\overset{\text{pour } r}{<}} \left|1 + \lambda r^v e^{iv\theta}\right| + \frac{|\lambda| r^v}{2} \underset{\text{bien choisi}}{\overset{\text{pour } \theta}{=}} 1 - |\lambda| r^v + \frac{|\lambda| r^v}{2} < 1 = \inf|P|.$$

Compléments compacité. Finissons cette section par une vision plus *intrinsèque* de la compacité, afin de présenter un point de vue qui tiendrait dans des structures topologiques plus générales que les espaces vectoriels normés (ou métriques).

Théorème (compacité au sens de Borel-Lebesgue). *Une partie K est compacte ssi de tout recouvrement de K par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini.* (on voit apparaître l'analogie compact <-> fini)

Lemme (adhérence explicite). *L'adhérence d'une suite a s'explicite comme suit :*

$$\operatorname{Adh} a = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{a([n,\infty[)}.$$

Démonstration du lemme. On a à $\ell \in E$ fixé les équivalences

$$\begin{aligned}
\ell \in \operatorname{Adh} a &\iff \forall\varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n \geq N,\ a_n \in \ell + \varepsilon\mathbf{B} \\
&\iff \forall N \in \mathbf{N},\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in a([N,\infty[) \cap (\ell + \varepsilon\mathbf{B}) \\
&\iff \forall N \in \mathbf{N},\ \ell \in \overline{a([N,\infty[)} \\
&\iff \ell \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{a([n,\infty[)}.
\end{aligned}$$

Démonstration (partielle) du théorème.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On ne traitera que le cas des recouvrements dénombrables[33]. Soit (O_n) une suite d'ouverts tels que $K \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} O_n$. Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbf{N},\ K \not\subset \bigcup_{i=0}^n O_i$. On en déduit une suite $(k_n) \in K^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ k_n \notin \bigcup_{i=0}^n O_i$. Par compacité, on peut extraire $k_{\varphi(n)} \longrightarrow l$. La limite restant dans $K \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} O_n$, elle est dans un certain ouvert O_{n_0}, d'où une boule ouverte contenant l et incluse dans O_{n_0}. Mais tous les k_n devront tomber dans cette boule à partir d'un certain rang N (que l'on peut toujours supposer $> n_0$), d'où l'appartenance absurde $k_N \in O_{n_0} \subset \bigcup_{i=0}^{n_0} O_i \subset \bigcup_{i=0}^N O_i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit par l'absurde a une suite de $K^{\mathbf{N}}$ d'adhérence vide. Le lemme montre que donc $K \subset {}^c\emptyset$ est recouvert par

$${}^c\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{a([n,\infty[)} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} {}^c\overline{a([n,\infty[)} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Int}\left({}^c a([n,\infty[)\right).$$

[33] le lecteur soucieux de compléter la démonstration pourra chercher "lemme de Lindelöf"

Par hypothèse, on peut restreindre le domaine de réunion à une partie finie, disons $[0, N]$, d'où (en remontant les calculs) l'inclusion et l'appartenance absurdes

$$^{c}K \supset \bigcap_{n\in[0,N]} \overline{a\left([n,\infty[\right)} = \overline{a\left([N,\infty[\right)} \ni a_N.$$

Exercice. *Soit a une suite convergente. Notons l sa limite. Montrer que $\{a_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\} \cup \{l\}$ est compact.*

Exercice. *Soit K un compact. Notons $A := C^0(K, \mathbf{R})$ l'anneau des fonctions réelles continues sur K. Montrer que ses idéaux maximaux sont les $\mathfrak{m}_x := \{a \in A \ ; \ a(x) = 0\} = \operatorname{Ker} \operatorname{eval}_x$ pour x décrivant K.*

Remarque (compacité et finitude). La propriété de Borel-Lebesgue fait apparaître clairement l'aspect "se ramener au fini" des compacts et est à cet égard la "bonne" vision des compacts. On notera d'ailleurs les analogies[34] :

structure générale	partie "gentille"
ensemble	ensemble fini
espace vectoriel	s.-e. v. de dim. finie
espace métrique	compacts

Dans le contexte plus général des espaces topologiques, la compacité que nous avons définie (en termes de suites extraites) doit être distinguée de celle définie en termes de recouvrements. La première sera dite ***séquentielle*** ou "au sens de Bolzano-Weierstrass", on pourra préciser pour la seconde "au sens de Borel-Lebesgue".

8 Complétude

Comme pour le corps de base, les suites de Cauchy de E ont envie de converger mais n'ont pas toujours de limite dans E. Les espaces "sans trous" sont d'utilité fondamentale en analyse fonctionnelle et il conviendrait d'y consacrer du temps. Nous ne ferons cependant que les esquisser en cette fin de cours.

Le corps $\mathbf{K}$ est toujours supposé local (*i. e.* sa $\overline{\mathbf{B}}$ est compacte)

Lemme (adhérence et convergence des suites de Cauchy). *Une suite de Cauchy est bornée, elle converge ssi son adhérence est non vide.*

Démonstration. Soit $c \in E^{\mathbf{N}}$ de Cauchy. Soit N un naturel tel que $p, q > N \Longrightarrow \|c_p - c_q\| < 18$. Alors c est bornée par $\max_{0 \leq i \leq N} \|c_i\| + 18$.

Le sens direct du "ssi" est trivial. Supposons $\operatorname{Adh} c \neq \emptyset$. Soit $\ell \in \operatorname{Adh} c$. Montrons $c_n \longrightarrow \ell$. Soit φ une extractrice telle que $c_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de $\left(c_{\varphi(n)}\right)$, on peut invoquer un naturel N tel que $n > N \Longrightarrow \left\|c_{\varphi(n)} - \ell\right\| < \varepsilon$. Puisque c est de Cauchy, on peut invoquer un naturel N' tel que $p, q > N' \Longrightarrow \|c_p - c_q\| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout naturel $n > N, N'$, on aura $\varphi(n) \geq n > N'$, d'où

$$\|c_n - \ell\| \leq \left\|c_n - c_{\varphi(n)}\right\| + \left\|c_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq 2\varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

Définition (complet, Banach). *Une partie A de E est dit **complète** si toute suite de Cauchy de A converge dans A. Lorque E est complet, on dit aussi que c'est un espace de **Banach**[35].*

Propriétés des complets.

1. *Une partie complète est fermée.*
2. *Toute partie fermée d'un complet est complète.*

[34] inutilisables en pratique mais qui éclairent le rôle de la compacité

[35] le lecteur se fera lui-même une idée de s'il faut prononcer le "ch" final comme un "k", un "r" dur ("j" espagonl) ou comme un "h" expiré (anglais)

3. *Un produit (fini) de complets est complet.*
4. *Un compact est complet*[36].
5. ★ *En dimension finie, les complets sont les fermés.*

★ Contrairement aux compacts, un complet n'est pas nécessairement borné ! Le dernier point montre en effet que E est complet dès qu'il est de dimension finie. Ce point s'adapte par ailleurs *mutatis mutandis* au corps de base, d'où l'on déduit la complétude des corps $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ et des $\mathbf{Q}_p$.

Démonstration.

1. Soit A une partie complète. Soient $a \in A^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a_n \longrightarrow \ell$. La suite a converge, donc est de Cauchy, donc (par complétude de A) tend vers un point de A ; cette limite étant ℓ, on a l'appartenance $\ell \in A$ désirée.
2. Soit F fermé dans A. Soit $f \in F^{\mathbf{N}}$ de Cauchy. La suite f est de Cauchy et à valeurs dans A, donc converge dans A ; par fermeture de F, sa limite reste dans F, ce qui montre que f converge dans F.
3. Par récurrence, il suffit de montrer le résultat pour deux complets, mettons A et B. Soit $c \in (A \times B)^{\mathbf{N}}$ de Cauchy, mettons $c =: (a, b)$. Les projections canoniques sur A et B respectivement étant 1-lipschitziennes, elles sont uniformément continues, donc préservent les suites de Cauchy ; les suites a et b sont par conséquent de Cauchy, donc convergent dans A (resp. B), donc leur produit c converge dans $A \times B$.
4. Soit K un compact. Soit $k \in K^{\mathbf{N}}$ de Cauchy. Par compacité, K contient une valeur d'adhérence de k ; d'après le lemme, la suite k converge vers cette valeur d'adhérence.
5. Le sens direct a déjà été fait. Supposons $\dim E < \infty$. Soit F fermé. Soit $f \in F^{\mathbf{N}}$ de Cauchy. Alors f est bornée, donc prend ses valeurs dans un fermé borné, *i. e.* un compact, donc f possède une valeur d'adhérence. Étant par ailleurs de Cauchy, le lemme nous dit qu'elle tend vers cette valeur d'adhérence. Par fermeture de F, cette valeur reste dans F, ce qui montre que f converge dans F.

Dorénavant, on fixe un Banach B et un segment réel S.

★ **Proposition (complétude des fonctions bornées).** *Soit X un ensemble. Alors l'espace $\mathcal{B}(X, B)$ est un Banach (pour la norme uniforme).*

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(X, B)$. Soit $x \in X$: l'évaluation en x est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, donc préserve les suites de Cauchy, donc la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy : étant à valeur dans le complet B, elle converge. Notons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \lim f_n(x) \end{array} \right.$ et montrons que $f_n \longrightarrow f$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) est de Cauchy, on peut invoquer un naturel N tel que $p, q > N \Longrightarrow \|f_p - f_q\| < \varepsilon$. Soit $n > N$. Soit $x \in X$. Pour tout $q > N$, on a $\|f_n(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$, d'où (faisant tendre q vers ∞) $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$, d'où (faisant varier x) $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

Corollaire 1 (complétude des $C^n(S, B)$). *L'espace $C^0(S, B)$ est un Banach.* (C'est un fermé du complet $\mathcal{B}(S, B)$.)

Exercice. Soit $n \in \mathbf{N}$. *Montrer que $C^k(S, B)$ est un Banach pour la norme $f \mapsto \sum_{k=0}^n \left\|f^{(k)}\right\|_\infty$.*

Contre-exemple. $C^0(S, \mathbf{R})$ n'est pas complet pour la norme $f \mapsto \int_S |f|$ (appelée norme L^1). Supposons $S = [-1, 1]$ pour alléger. Alors la suite de fonctions affines par morceaux $\left\{ \begin{array}{ccc} x < -\frac{1}{n} & \longmapsto & -1 \\ x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] & \longmapsto & nx \\ x > \frac{1}{n} & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$ converge en norme L^1 vers $\left\{ \begin{array}{ccc} x < 0 & \longmapsto & -1 \\ x > 0 & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$ (whatever en 0), limite qui sort de $C^0(S, \mathbf{R})$.

Remarque (espaces L^p). Pour tout réel $p \geq 1$, on définit un espace $L^p(S, \mathbf{K})$ constitué des fonctions $f : S \longrightarrow \mathbf{K}$ telles que l'intégrale $\int_S |f|^p$ fasse sens[37] et soit finie. Il est normé par $\|f\| := \sqrt[p]{\int_S |f|^p}$, norme que l'on a coutume d'appeller L^p. Lorsque $p = \infty$, on note $L^\infty(S, \mathbf{K})$ l'espace des fonctions bornées[38] sur S à

[36] on verra en D. M. quoi rajouter pour avoir une réciproque : la ***précompacité*** (de toute suite on peut extraire une sous-suite de Cauchy)

[37] Nous laissons de côté les nombreuses subtilités cachées dans cette "définition".

[38] encore un fois, il faudrait plus de temps pour rendre propre cette "définition"

valeurs dans $\mathbf{K}$, normé par $\|\cdot\|_\infty$. On pourrait montrer que les espaces L^p sont complets (encore une fois, cela nécessiterait que l'esquisse que nous en avons donné devienne une "définition" propre).

Corollaire 2 (complétion d'un e. v. n.). *Tout e. v. n. se plonge densément dans un Banach.*

Démonstration. Soit $a_0 \in E$. On vérifiera que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{B}(E,\mathbf{R}) \\ a & \longmapsto & x \mapsto d(a,x) - d(x,a_0) \end{array}\right.$ est une isométrie. En notant E' l'image de E par cette isométrie, l'adhérence $\overline{E'}$ est un fermé du complet $\mathcal{B}(E,\mathbf{R})$, donc est un complet dans lequel E' est dense.

Morale : comme pour les anneaux normés, on peut toujours, afin de "boucher les trous" d'un e. v. n.[39], ajouter les limites de suites de Cauchy manquantes.

Exemples (complétions).

1. **(famille sommables)** L'espace $\mathbf{K}[X]$ n'est pas complet pour la norme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n \mapsto \sum |a_n|$ (appelée norme ℓ^1) car la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{X^n}{n!}\right)$ est de Cauchy mais ne tend vers aucun polynôme. Sa complétion est l'espace $\ell^1(\mathbf{K}) := \left\{a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ \sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| < \infty\right\}$ des familles scalaires dites ***sommables***. On définirait de même pour tout $p \in [1,\infty]$ un espace complet $\ell^p(\mathbf{K}) := \left\{a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ \sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|^p < \infty\right\}$ isométrique à la complétion de $\mathbf{K}[X]$ muni de la norme ℓ^p.
2. **(fonctions réglées).** Notons $\mathcal{E}(S,\mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur le segment S muni de la norme L^∞. Les éléments de sa complétion sont les limites uniformes de fonctions en escalier sur S et s'appellent les fonctions ***réglées*** sur S. On pourrait montrer qu'une fonction est réglée ssi elle admet une limite à droite et à gauche en tout point. Par exemple, la fonction Id est réglée sur $[0,1]$ comme limite des $\sum_{k=0}^{n} k\chi_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]}$.
3. **(séries formelles)** L'espace $\mathbf{K}[X]$ métrisé par $d(P,Q) := 42^{-\operatorname{val}(P-Q)}$ n'est pas complet puisque la suite $(1 + X + \cdots + X^n)$ est de Cauchy mais ne tend vers aucun polynôme. Sa complétion $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est formée de *toutes* les suites scalaires (pas seulement celles à support fini) et est notée $K[[X]]$. Il est alors immédiat que pour toute suite $a \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ la série $\sum a_n X^n$ est convergente de somme a.

Finissons ce rapide survol par quelques ultraclassiques, que le lecteur pourra traiter à titre de petits problèmes.

L'espace $L_c(E,B)$ est toujours un Banach.

★ *Toute série dans B absolument convergente converge.* (Une réciproque est posée en D. M.)

Application (séries matricielles). Soit $f : z \mapsto \sum a_n z^n$ une série entière. Alors $f(a)$ fait sens pour tout élément a d'une algèbre de Banach de norme strictement plus petite que le rayon de convergence de la série f. Si, de plus, a admet un polynôme annulateur (non nul), alors $f(a)$ est un polynôme en a (ce polynôme est bien sûr *fonction* de a). Ainsi peut-on définir $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ pour toute matrice $a \in M_n(\mathbf{K})$.

(fermés emboîtés) *La limite d'une suite décroissante*[40] *de fermés bornés non vides dont le diamètre tend vers* 0 *est un singleton.* (*cf.* D. M.)

★ **Prolongement des applications uniformément continues à leur adhérence.** *Soit $f : A \longrightarrow B$ uniformément continue sur une partie $A \subset E$. Alors f se prolonge sur $\overline{A}$ en une application uniformément continue.*

Démonstration. Soit $a \in \overline{A}$, mettons $a = \lim a_n$. [Micro-analyse : si $f(a)$ fait sens, par continuité du prolongement souhaité, on doit avoir $f(a) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$.] La suite $f(a_n)$ est de Cauchy, donc (par complétude de B) converge vers un certain ℓ. Montrons que définir $f : a \mapsto \lim f(a_n)$ convient, *i. e.* que la limite ℓ ne dépend pas de la suite (a_n) approchant a. Soit $\alpha_n \longrightarrow a$. Alors la suite "shuffle" $(a_0,\alpha_0,a_1,\alpha_1,a_2,\alpha_2,...)$ tend vers a, donc converge, donc est de Cauchy, donc son image par f est de Cauchy et converge dans B. Comme $(f(a_n))$ en est une sous-suite, la limite de la suite "shuffle" est ℓ. Comme $(f(\alpha_n))$ en est une autre, elle doit aussi converger vers ℓ, ce que l'on voulait. Il reste à montrer que le prolongement ainsi défini est uniformément continu. À vous !

★ **Applications (somme d'une famille sommable, intégrale d'une fonction réglée).** L'application "somme" $(a_n) \mapsto \sum a_n$ est définie sur les suites de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, est 1-lipschitzienne (*a fortiori* uniformément

[39] la démonstration précédente reste clairement valide pour les espaces métriques

[40] La limite d'une suite décroissante (resp. croissante) d'ensembles est l'intersection (resp. la réunion) de ses termes.

continue) pour la norme ℓ^1, donc se prolonge sur la complétion $\ell^1(\mathbf{K})$ en une application 1-lipschitizienne (les comparaisons définissant la lipschtzianité passent à la limite par continuité). De même, l'application "intégrale" $E \mapsto \int_S E$ est définie sur $\mathcal{E}(S, \mathbf{K})$ et y est uniformément continue (car $\ell(S)$-lipschitzienne), donc se prolonge sur les fonctions réglées sur S en une application $\ell(S)$-lipschitzienne.

★★★ (point fixe de Banach-Picard). *Soit C un complet (non vide) de E. Soit $f : C \longrightarrow C$ contractante (*i. e.* λ-lipschitzienne pour au moins un $\lambda < 1$). Alors f admet un unique point fixe. Ce dernier s'obtient en itérant n'importe quel point de C.*

Preuve, variantes et applications en D. M.

9 Quelques exercices posés en colle-examen

Montrer qu'une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.

Montrer $\exists \lambda > 0,\ \forall P \in \mathbf{C}_{42}[X],\ \int_0^{18} |P| \leq \lambda \max_{[0,18]} |P|$.

Notons $E := C^0([0,1], \mathbf{R})$ et $E^+ := \{f \in E\ ;\ f \geq 0 \text{ avec } = \text{ seulement en un nombre fini de points}\}$. Soit $\omega \in E^+$ sans zéros. Montrer que $f \mapsto \|f\omega\|_\infty$ et $f \mapsto \|f\omega\|_1$ sont deux normes. Comparer les $f \mapsto \|f\omega\|_\infty$ lorsque ω décrit les fonctions de E^+ sans zéros. Comparer $\|f \operatorname{Id}\|_\infty$ et $\left\|f \operatorname{Id}^{\times 2}\right\|_\infty$. Même questions avec les $f \mapsto \|f\omega\|_1$.

Sur $C^1([0,1], \mathbf{R})$, montrer que $f \mapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2}$ est un norme que l'on comparera à celle uniforme.

Sur l'e. v. des fonctions C^2 sur $[0,1]$ s'annulant ainsi que leurs dérivées premières en 0, montrer l'équivalence des normes $f \mapsto \|f + f''\|_\infty$ et $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$.

Notons $E := C^0([0,1], \mathbf{R})$. Posons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x t f(t)\, dt \end{array} \right. \end{array} \right.$. Montrer que φ est linéaire et continue pour, d'une part la norme L^1 au départ et celle L^∞ à l'arrivée, d'autre part pour la norme L^∞ au départ et celle L^1 à l'arrivée. Calculer alors les normes subordonnées correspondantes.

Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} C^0([0,1], \mathbf{R}) & \longrightarrow & C^1([0,1], \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f \end{array} \right. \end{array} \right.$ est linéaire et continue pour la norme uniforme au départ et pour $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ à l'arrivée. Calculer sa norme triple.

Soit C un convexe fermé équilibré borné voisinage de 0 (pour au moins une norme). On définit

$$j : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ a & \longmapsto & \inf\{\lambda > 0\ ;\ a \in \lambda C\} \end{array} \right. .$$

Montrer que j est une norme sur E dont C est la boule unité fermée. En déduire une description de toutes les normes sur E.