Travaux dirigés 9

1 Rappels de cours

On se donne un endomorphisme u d'un espace vectoriel (par exemple, une matrice carrée).

Définition. Une *valeur propre* de u est un scalaire λ pour lequel il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur est dit *vecteur propre.* (On dit parfois que le couple (λ, x) est un *couple propre.*) L'ensemble des valeurs propres de u est appelé *spectre*[1] de u et est noté $\operatorname{Spec} u$ ou $\operatorname{Sp} u$.

Remarque. Le vecteur nul n'est jamais propre, on pourra retenir que "$\overrightarrow{0}$ est sale".

Critère pratique. *Un scalaire λ est valeur propre d'une matrice carrée A ssi* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Ainsi, la recherche des valeurs propres d'une matrice se ramènent à une équation polynomiale (on rappelle que le déterminant est un polynôme, c'est la formule dite de Sarrus).

Exemples.

Les valeurs propre de $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \cdot & -2 \end{pmatrix}$ sont les zéros du polynôme $\begin{vmatrix} X-1 & 3 \\ \cdot & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)(X+2)$, à savoir 1 et -2. On écrire donc $\operatorname{Sp} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \cdot & -2 \end{pmatrix} = \{1, -2\}$.

Le spectre de la matrice $\begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$ est vide (*i. e.* pas de valeurs propres) car le déterminant $\begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$ n'a pas de racine : $\operatorname{Sp} \begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} = \emptyset$. Toutefois, il en a dans $\mathbb{C}$ (à savoir $\pm i$), ce qui permet de parler du spectre complexe : $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} = \{\pm i\}$.

Définition. Une matrice est dit *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, *i. e.* si elle peut s'écrire PDP^{-1} où D est diagonale (et P inversible).

Critère pratique. *Une matrice est diagonalisable ssi ses vecteurs propres contiennent une base de l'espace.*

Démonstration. (à comprendre, si si, pour une fois qu'on vous en donne une, on l'utilise dans la suite)

$\Longleftarrow$ Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ formée de vecteurs propres de notre matrice (appelons-la A). Cela signifie exactement que la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} A$ est diagonale. Or, on a $A = \operatorname{Mat}_{b.c.} A = Q^{-1} (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} A) Q$ où $Q := \operatorname{Pass}(\mathcal{B} \to b.c.)$, ce qui est la forme recherchée.

$\Longrightarrow$ Supposons A diagonalisable, disons $A = PDP^{-1}$. La matrice P étant inversible, c'est la matrice de passage de la base canonique *b.c.* vers une base $\mathcal{B}$, de sorte que, en notant $P = \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B})$, on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} A = P^{-1} (\operatorname{Mat}_{b.c.} A) P = P^{-1}AP = D$. En revenant à la définition de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} A$, on voit que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont tous des vecteurs propres de A, ce qui conclut.

Diagonaliser une matrice, c'est la mettre sous la forme PDP^{-1} où D est diagonale.

La démonstration qui précède montre que, sous cette forme $A = PDP^{-1}$, la matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres de A choisie (attention, il y a une infinité de choix possibles), à savoir la concaténée des vecteurs propres choisis (attention à l'ordre de ces derniers).

Ainsi, pour diagonaliser une matrice A, on commence par trouver son spectre à l'aide du polynôme caractéristique $\chi_A := \det(XI - A)$ (ses racines sont les valeurs propres de A), puis on cherche à $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ fixé les vecteurs propres associés à λ en résolvant le système $Ax = \lambda x$ où l'inconnue x est un vecteur colonne. Une fois les vecteurs propres connus, on pourra envisager d'utiliser le critère pratique de diagonalisabilité.

[1] En physique quantique, les valeurs propres d'un certain endomorphisme correspondent à des niveaux d'énergie, donc à des longueurs d'ondes, lesquelles se repèrent sur un spectre lumineux chacune par une raie. Le spectre de l'opérateur s'identifie alors à l'ensemble de ces raies, ce qui – on l'espère – éclairera la terminologie.

2 Exercices

Diagonaliser (si possible) les matrice suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \cdot & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & \cdot & -2 \\ -6 & 1 & -3 \\ 10 & \cdot & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & \cdot & 8 \\ 6 & -1 & 6 \\ -2 & \cdot & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & \cdot & 42 \\ \cdot & 18 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 18 \end{pmatrix}.$$

Solution proposée.

La matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{1, -2\}$ (*cf.* exemple du cours). Résoudre $Ax = x$ donne pour solution la droite $\mathbb{R}\binom{1}{0}$, résoudre $Ax = -2x$ donne $\mathbb{R}\binom{1}{1}$. Les vecteurs propres $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$ étant libres, on a trouvé une base de l'espace ($\mathbb{R}^2$) formée de vecteurs propres de A, donc cette dernière est diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $D := \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -2 \end{pmatrix}$ et $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*cf.* démo du cours pour la forme de D et P). Sanity check : inverser P et calculer le produit PDP^{-1} pour retrouver A.

Les valeurs propres de $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$ sont les racines du polynôme $\begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ \cdot & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2$, donc le spectre est réduit à $\{1\}$. Le système $Bx = x$ a pour solutions $\mathbb{R}\binom{1}{0}$, donc les vecteurs propres de B sont tous colinéaires (si l'on oublie le vecteur sale) : ils ne peuvent contenir une base de tout l'espace $\mathbb{R}^2$. Autre idée : si B était diagonalisable, on pourrait écrire $B = PDP^{-1}$ où D est diagonale à valeurs dans $\operatorname{Sp} B = \{1\}$; cela force $D = I$, qui commute avec tout le monde, d'où $B = DPP^{-1} = D$, ce qui est faux (B n'est pas diagonale).

Le spectre de $C := \begin{pmatrix} -3 & \cdot & -2 \\ -6 & 1 & -3 \\ 10 & \cdot & 6 \end{pmatrix}$ est donné par les racines du polynôme $\begin{vmatrix} X+3 & \cdot & 2 \\ 6 & X-1 & 3 \\ -10 & \cdot & X-6 \end{vmatrix} = (X-2)(X-1)^2$, d'où les deux valeurs propres 1 et 2. Les vecteurs propres associés à 1 sont formés du plan $\mathbb{R}(0,1,0) + \mathbb{R}(-1,0,2)$ et ceux associés à 1 de la droite $\mathbb{R}(2,3,-5)$. Les trois vecteurs propres directeurs ainsi exhibés sont libres (calculer par exemple leur déterminant), donc forment une base et la matrice C est diagonalisable :

$$C = P \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P := \begin{pmatrix} \cdot & -1 & 2 \\ 1 & \cdot & 3 \\ \cdot & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

En changeant l'ordre, on aurait très bien pu écrire

$$C = Q \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ avec } Q := \begin{pmatrix} -1 & 2 & \cdot \\ \cdot & 3 & 1 \\ 2 & 5 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Sanity check de rigueur pour les incertains.

Les valeurs propres de la matrice $E := \begin{pmatrix} 3 & \cdot & 8 \\ 6 & -1 & 6 \\ -2 & \cdot & -5 \end{pmatrix}$ s'obtiennent en prenant les racines de son polynômes caractéristique $\chi_E = \det(XI - E) = (X+1)^3$, d'où $\operatorname{Sp} E = \{-1\}$. Résoudre $Ex = -x$ donne le plan $\mathbb{R}(0,1,0) + \mathbb{R}(2,0,-1)$, donc les vecteurs propres sont tous coplanaires : ils ne peuvent contenir de base. Impossible par conséquent de diagonaliser E.

La matrice $F := \begin{pmatrix} 18 & \cdot & 42 \\ \cdot & 18 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 18 \end{pmatrix}$ se comporte comme la matrice $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$. Si elle était diagonalisable, sa "réduite" diagonale serait scalaire (car son spectre est un singleton) et commuterait donc à tout le monde, en particulier à la matrice de passage, laquel disparaîtrait avec son inverse, de sorte que F serait égale à sa réduite diagonale, *a fortiori* diagonale, ce qui n'est pas.