Travaux dirigés 8

1 Rappels de cours

On identifiera à souhait les matrices (lignes) de taille $1 \times n$ à celles (colonnes) de taille $n \times 1$ ou encore aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Par commodité d'écriture, les coefficients non notés dans les matrices sont nuls.

Par abus de langage, le sous-espace vectoriel $\{0\}$ sera souvent appelé *sous-espace nul* et un espace l'égalant sera souvent dit *nul*.

Image.

L'*image d'une application* (non nécessairement linéaire) $f : E \longrightarrow F$ est l'ensemble des images par f des éléments de E. On la note

$$\operatorname{Im} f = \{f(x)\}_{x \in E}.$$

L'*image d'une matrice* A ayant n colonnes est l'ensemble des vecteurs de la forme AX où X décrit les vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$. (Pour se souvenir de la taille, observer que le produit AX multiplie des tailles $(\S, n) \times (?, 1)$, donc par Chasles le ? doit valoir n). C'est aussi l'image de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^\S \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$. Elle est notée $\operatorname{Im} A$.

Noyau.

Le *noyau d'une application linéaire* est le sous-espace vectoriel formés des vecteurs (de départ) qui sont envoyés sur 0. Il est noté Ker (de l'anglo-saxon "kern" ou "kernel", et non pas du breton "village").

Le *noyau d'une matrice* A de taille $p \times q$ est le sous-espace vectoriel formés des vecteurs colonnes X tels que $AX = 0$. C'est également le noyau de l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$. Il est noté $\operatorname{Ker} A$.

Rang.

Le *rang d'une famille* (non nécessairement finie) de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. C'est aussi le plus grand cardinal d'une sous-famille libre. On le note rg (abbréviation de "**r**an**g**").

Le *rang d'une application linéaire* f est le rang de son image. On le note aussi $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} \operatorname{Im} f$.

Le *rang d'une matrice* A est le rang de la famille de ses colonnes. C'est aussi le rang de la famille de ses lignes, ou encore le rang de l'application $X \mapsto AX$. On le note (sans surprise) $\operatorname{rg} A$.

Formule du rang.

Pour $f : E \longrightarrow F$ linéaire, on a $\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$.

Pour tout matrice A de taille $p \times q$, on a $\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A = q$.

Inverse.

Une matrice A est dite *inversible* si il y a une matrice B telle que $AB = BA = 1$ où 1 désigne la matrice (dite *identité*) formée d'une diagonale de 1 (et que des 0 ailleurs).

On vérifiera que $A1 = A = 1A$ pour toute matrice A, ce qui justifie la notation 1 (*neutre multiplicatif*).

Remarque : *une matrice inversible est nécessairement carrée.*

Critère : *une matrice carrée de taille $n \times n$ est inversible ssi son rang vaut n.*

Calcul du rang.

Il est toujours possible (voire fortement conseillé de ne pas oublier) de revenir à la définition (regarder le Vect des colonnes/lignes d'une matrice).

Le rang d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où le 0 désigne une colonne de zéros vaut $1 + \operatorname{rg} A$.

Le rang est inchangé par n'importe quelle opération élémentaire d'un des trois types suivants (le terme "rangée" désigne au choix "ligne" ou "colonne") :

1. **tranposition** : échanger deux rangées, noté $R_i \leftrightarrow R_j$("on échange les rangées d'indice i et j") ;
2. **dilatation** : multiplier une rangée par un réel non nul, noté $R_i \leftarrow \lambda R_i$ ("à la place de la rangée d'indice i, on met la rangée d'indice i multipliée par λ") ou $R_i : \times\lambda$ (la rangée d'indice i est multipliées par λ") ;

3. **transvection**[1] : ajouter à une rangée un multiple réel d'une **autre** rangée de même type (ligne/colonne), noté $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ ("à la place de la rangée d'indice i, on met la rangée d'indice i plus celle d'indice j multipliée par λ") ou $R_i : +\lambda R_j$ ("à la rangée d'indice i est ajoutée λ fois celle d'indice j").

Exemple. On cherche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Retrancher deux fois la première colonne à la seconde donne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, qui est de même rang. On notera cette opération $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ ("dans C_2, on met C_2 moins deux fois C_1") ou $C_2 : -2C_1$ ("à la colonne C_2 on retranche deux fois C_2). On peut ensuite faire $C_3 : -5C_1$, ce qui donne $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$. On aurait même pu faire ces deux opérations en même temps car le résultat est le même (attention, ceci n'est pas vrai pour toutes les opérations élémentaires !). Ensuite, on voit que les colonnes restantes contiennent une base de $\mathbb{R}^2$ (à savoir $\binom{1}{1}$ et $\binom{0}{1}$; la colonne nulle n'intervient pas), donc engendrent tout $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, d'où le rang cherché : 2.

Schématiquement, on résumerait sous la forme

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{C_2:-2C_1}{\overset{C_3:-5C_1}{=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Calcul d'un inverse (par pivot de Gauss).

On écrit la matrice à inverser à gauche et la matrice identité à droite. On fait alors des opérations élémentaires sur les deux matrices *en même temps* et *sur le même type de rangée* afin de se ramener à gauche à la matrice identité. La matrice obtenue à droite est alors l'inverse voulu. (Cela revient exactement à résoudre un système, mais sans écrire les indéterminée ni les équations, seulement les coefficients.)

Exemple. Inverser $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. On raisonne sur les colonnes, on tue le 2 à l'aide de $C_1 : -2C_2$, ce qui donne $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis on tue le 3 en bas à droite à l'aide de $C_2 : -3C_1$, ce qui donne $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$, puis on échange les colonnes pour retomber sur l'identité. Schématiquement, on pourrait présenter sous la forme

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} & C_1 : -2C_2 & \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & C_2 : -3C_1 \\
\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 & \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}. &
\end{array}$$

Sanity check (ou preuve par neuf matricielle) : vérifier que l'inverse trouvé en est bien un en calculant le produit $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ (on doit trouver la matrice identité).

2 Exercices

Donner les rangs, images, noyaux et inverses (si cela fait sens) des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & -3 & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solution proposée.

[1] que l'on peut voir comme de la transplantation de vecteurs

Un vecteur de l'image de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour certains réels a et b, donc est nul (calculer le produit). Ainsi, l'image est nulle, donc le rang vaut $\dim\{0\} = 0$. La matrice n'a donc pas d'inverse. Quant au noyau, le calcul qui précède montre que tout vecteur est dans le noyau, donc le noyau vaut tout l'espace $\mathbb{R}^2$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$ est l'identité, c'est un neutre multiplicatif, d'où $\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$, ce qui montre qu'elle est inversible d'inverse elle-même[2], d'où son rang (2). La formule du rang nous dit alors que $\dim \operatorname{Ker} = 2 - \operatorname{rg} = 0$, donc le noyau est nul. Son image est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ lorsque a et b parcourent $\mathbb{R}$: on trouve tout l'espace $\mathbb{R}^2$.

Un vecteur (a, b) dans le noyau de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}$, d'où $b = 0$ et $a = 0$, ce qui montre que le noyau est nul. La formule du rang dit alors que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2$, donc la matrice est inversible. Un pivot de Gauss donne immédiatement ($C_2 : -C_1$) l'inverse $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$ (ce qui ne dispense pas d'un sanity check). Enfin, puisque l'image est incluse dans $\mathbb{R}^2$ et a même dimension, elle égale $\mathbb{R}^2$.

La seconde colonne de $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ s'obtient en multipliant la première par -2, donc les deux colonnes sont liées ; étant non nulles, leur Vect est une droite, d'où $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 1$ (donc pas d'inverse). La formule du rang nous dit que le noyau est de dimension $2 - \operatorname{rg} = 1$ et on voit que $(2, 1)$ est dedans, donc il vaut la droite dirigée par ce vecteur. Autre solution : expliciter le noyau en résolvant $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$, ce qui donne $a = 2b$, *i. e.* $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}\binom{2}{1}$, d'où le rang par la formule du rang. Dans les deux cas, une fois que l'on sait que l'image est un droite, on peut remarquer qu'elle contient toujours les colonnes (images des vecteurs de la base canonique), en particulier la première, donc est dirigée par $(1, -2)$.

On a déjà vu que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$, donc est de rang 2, de noyau nul et d'image tout $\mathbb{R}^2$.

Échanger les rangées montre que $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$ est de rang 2 et d'inverse elle-même, d'où son noyau nul et son image tout $\mathbb{R}^2$.

Un vecteur (a, b, c) dans $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix}$ vérifie $(a, 2b, 3c) = (0, 0, 0)$, donc est nul, d'où la nullité du noyau. Toujours par la formule du rang, le rang vaut 3 (donc la matrice est inversible) et l'image est l'espace total $\mathbb{R}^3$. Un pivot de Gauss montre rapidement (dilater chaque rangée pour normaliser les coefficients diagonaux) que l'inverse vaut $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/3 \end{pmatrix}$ (sanity check !).

Un pivot de Gauss rapide ($L_1 : -L_3$) montre que $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$, donc est de rang 3, d'image totale $\mathbb{R}^3$ et de noyau nul.

Le rang de $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}$ vaut $1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} 1 + \operatorname{rg}\begin{matrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} = 1 + 1 + \operatorname{rg}(\cdot) = 2$, donc la matrice n'est pas inversible et le noyau est de dimension $3 - \operatorname{rg} = 1$ (donc est une droite). On remarque alors que $(-1, 0, 1)$ est dans le noyau (on peut le trouver en résolvant le système $AX = 0$), donc ce dernier est la droite $\mathbb{R}(-1, 0, 1)$. L'image est un plan contenant toutes les colonnes, en particulier les deux premières (qui sont libres), donc vaut $\mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1) = \{(a, 0, b)\}_{a, b \in \mathbb{R}}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & -3 & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 \end{pmatrix}$ a deux colonnes égales et deux colonnes libres, donc ses colonnes engendrent

[2] cela conforte notre intuition des réels où 1 est inversible d'inverse lui-même

un espace de dimension 2, d'où son rang (2, ce qui montre que la matrice n'a pas d'inverse), ce que l'on peut retrouver par pivot de Gauss :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & -3 & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 \end{pmatrix} \overset{L_3:-2L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & -3 & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot \end{pmatrix} = 1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & \cdot \\ -2 & \cdot \end{pmatrix} \overset{L_2:-\frac{2}{3}L_1}{=} 1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 1+1+\mathrm{rg}\,(\cdot) = 2.$$

Ainsi, son image est le plan engendré par deux de ses colonnes libres, à savoir $\mathbb{R}\,(1,0,2)+\mathbb{R}\,(1,-3,0)$. De plus, son noyau est une droite par la formule du rang et l'on vérifie que $(1,0,-1)$ est dedans (à intuiter en résolvant le système).

Aucune des quatres matrices suivantes n'étant carrée, aucune n'est inversible.

On trouve $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cdot \end{pmatrix} = 1$, donc l'image est une droite, portée par n'importe laquelle de ses colonnes non nulles, à savoir $\mathbb{R}$ (la matrice induit une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$). La formule du rang nous dit que le noyau est de dimension $2-1=1$, donc est aussi une droite, portée par exemple par $(0,1)$.

Les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ étant liées et non nulles, elles engendrent une droite, donc le rang vaut 1 et l'image vaut tout $\mathbb{R}$. Comme précedemment, le noyau est une droite, dirigée par exemple par $(-2,1)$.

Les colonnes de $\begin{pmatrix} 4 & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot & 3 \end{pmatrix}$ contiennent une base de $\mathbb{R}^2$ (les deux premières colonnes), donc engendrent $\mathbb{R}^2$ et la matrice est de rang 2 (*a fortiori* d'image tout $\mathbb{R}^2$ puisque cette dernière est incluse dans $\mathbb{R}^2$). Le noyau est de dimension $4-\mathrm{rg}=2$ et contient les vecteurs libres $(0,0,1,0)$ et $(3,12,0,-4)$ (à intuiter en résolvant le système $AX=0$) donc est le plan engendré par ces derniers.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ a toutes ses lignes colinéaires ($L_3=3L_1$ et $L_2=-2L_1$) non nulles, donc est de rang 1, d'image portée par n'importe quelle colonne non nulle, mettons $\mathbb{R}\,(1,-2,3)$. Son noyau est de dimension $2-\mathrm{rg}=1$ et contient le vecteur $(2,-1)$, donc est la droite $\mathbb{R}\,(2,-1)$.