Travaux dirigés 4

1 Rappels de cours

Vocabulaire ensembliste. Lorsque $P(x)$ est une proposition, un énoncé, une assertition, une phrase, une affirmation portant sur une variable x, on peut séparer dans tout ensemble X les éléments vérifiant P des autres. On forme ainsi l'ensemble des éléments x de X vérifiant $P(x)$. On le note $\{x \in X \ ; \ P(x)\}$ ou $\{x \in X\}_{P(x)}$ ou $\{x \in X\}^{P(x)}$ ou $\{\aleph \in X\}_{P(\aleph)}$ ou $\{\spadesuit \in X\}_{P(\spadesuit)}$. Les variables $x, \aleph, \spadesuit$ sont *muettes* (et peuvent être remplacées par n'importe quel autre symbole), mais *pas* l'ensemble X dans lequel on sépare. L'endroit où l'on précise la propriété séparante n'a *aucune importance* (à l'intérieur des accolades, à droite, à gauche, en haut, en bas...), la seul condition (humaine) est d'*être compris* par autrui.

En français, quand on tombe sur $\{x \in X \ ; \ P(x)\}$, on *lit* « l'ensemble des x dans X tels que $P(x)$ » ou tout autre variante : $\in$ peut se lire "dans", "de", "appartenant à"..., le "tel que" peut être remplacé par "vérifiant", "satisfaisant"...

Sur le canon. Est *canonique* ce qui a les qualités d'un canon, d'une norme dominante. En mathématique, c'est un synonyme de *naturel*.

Étant donné un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on le pense naturellement (c'est la définition) comme un couple $\binom{a}{b}$ de réels ; ces derniers sont donc des éléments *canoniques* associés à notre vecteur. En écrivant $\binom{a}{b} = a\binom{1}{0} + b\binom{0}{1}$, ces éléments canoniquement associés apparaissent comme les coordonnées de notre vecteur dans la base formée des vecteurs $\binom{1}{0}$ et $\binom{0}{1}$ (la même quel que soit le vecteur choisi au départ), ce qui confère à cette dernière le nom de *base canonique* (de $\mathbb{R}^2$).

De même en remplaçant 2 par n'importe quel entier $n \geq 1$: la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est formée des n vecteurs possèdant un 1 selon une coordonnées et 0 partout ailleurs.

Par ailleurs, un polynôme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ peut être vu comme la liste $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de ses coefficients, lesquels sont également ses coordonnées dans la base $\left(1, X, X^2, ..., X^n\right)$, d'où l'appellation *canonique* de cette dernière.

Enfin, une matrice est naturellement pensée comme le tableau $(a_{i,j}) = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j}$ de ses coefficients $a_{i,j}$ où la matrice $E_{i,j}$ possède un 1 à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne et que des 0 partout ailleurs. Les $E_{i,j}$ forment la *base canonique* de l'ensemble des matrices.

Sur la liberté. Pour montrer qu'une famille est libre, si on ne voit pas quoi faire, ON REVIENT À LA DÉFINITION. Ci-après quelques propriétés pratiques.

Si a est un vecteur, la famille (a) est libre ssi a est non nul.

Si a et b sont deux vecteurs, *la famille (a, b) est liée ssi a et b sont colinéaires* ("selon une même ligne", *i. e.* "parallèles").

Si a, b sont libres et c un troisième vecteur, *la famille (a, b, c) est libre ssi c n'est pas engendré par a et b.*

Sur la dimension. Une *base* est une famille libre et génératrice. Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont même cardinal, appelé *dimension* de E.

Une famille libre a *moins* d'éléments que la dimension de l'espace.

Une famille génératrice a *au moins* autant d'éléments que la dimension de l'espace.

Si V et W sont deux sous-espace d'un même espace vectoriel, on a $\dim(V + W) \leq \dim V + \dim W$.

2 Exercices

Exhiber des bases des espaces suivants et préciser leurs dimensions en commentant :

1. $\left\{(i, m, a, c) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ i + m + a + c = 0\right\}$;
2. $\left\{(i, u, t) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ i + u + t = 0 \text{ et } 2i - u + t = 0\right\}$;
3. $\{u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\}$;
4. $\{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ P'''' = 0\}$;
5. $\{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} ; \ f \text{ affine}\}$;

6. $\{f \in C^0([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f \textit{ affine sur } [-1,0] \textit{ et } f \textit{ affine sur } [0,1]\}$.

Solution proposée.

1. On renvoit au premier TD pour la méthode. Intuitivement, on a quatre variables soumises à une contrainte, d'où $4-1$ degrés de liberté, à savoir trois paramètres. Étant fixé un quadruplet réel (i,m,a,c), on a les équivalences

$$\begin{array}{ll} & (i,m,a,c) \in \{(S,A,G,E) \in \mathbb{R}^4\ ;\ S+A+G+E=0\} \\ \iff & i+m+a+c=0 \\ \iff & c=-i-m-a \\ \iff & (i,m,a,c)=(i,m,a,-i-m-a) \\ \iff & \exists M,L,V \in \mathbb{R},\ (i,m,a,c)=(M,L,V,-M-L-V) \\ \iff & \exists M,L,V \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} i \\ m \\ a \\ c \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Cela signifie exactement que notre espace est engendré par les trois vecteurs ci-dessus. Montrons qu'ils sont libres : partant d'une relation de liaison entre ces trois vecteurs, oublier la dernière coordonnée donne une relation de liaison entre les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, relation qui doit être triviale (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base, donc est libre), ce qui conclut.

Ainsi, *une* base de notre espace est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, il est de dimension 3.

Autre idée : nos équivalences montrent que notre espace s'écrit comme la somme $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de trois droites. La dimension étant sous-additive, la dimension de notre espace est inférieure ou égale à $1+1+1=3$ (une droite est de dimension 1) ; or, les trois vecteurs ci-dessus sont libres, donc leur cardinal (3) est inférieur ou égale à la dimension de notre espace. Puisqu'on dispose des deux inégalités en sens contraire, on doit avoir l'égalité, d'où la dimension cherchée (3).

Commentaire : on avait bien prédit trois degrés de liberté.

2. On a trois variables, deux conditions, donc sans doute $3-2$ degré de liberté, *i. e.* un paramètre. Fixons un triplet réel (I,U,T). On a les équivalences

$$(I,U,T) \in \{(i,u,t) \in \mathbb{R}^3\ ;\ i+u+t=0 \text{ et } 2i-u+t=0\} \iff \left\{\begin{array}{r} I+U+T=0 \\ 2I-U+T=0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{r} T=-I-U \\ I-2U=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} T=-3U \\ I=2U \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} I \\ U \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U \\ U \\ -3U \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} I \\ U \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} I \\ U \\ T \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, notre ensemble est engendré par le vecteur $(2,1,-3)$, c'est la droite $\mathbb{R}(2,1,-3)$ (qui est de dimension 1 comme toute droite, on retrouve notre intuition d'*un* paramètre). Une base est formée de n'importe quel vecteur directeur.

Interprétation géométrique : chacune des deux conditions définissant notre sous-espace définit un *plan* dans l'espace $\mathbb{R}^3$: on retrouve que l'intersection de deux plans est (souvent) une droite.

3. Pour décrire les suites de notre sous-espace, on regarde les racines λ et μ du trinôme caractéristique

$$X^2-2X+2=(X-1)^2+1=(X-1)^2-i^2=(X-1-i)(X-1+i).$$

Une suite complexe (u_n) sera donc dans notre sous-espace ssi il y a des complexes A et B tels que $\forall n \geq 0,\ u_n = A\lambda^n + B\lambda^n$, ce qui s'écrit aussi $\exists A, B \in \mathbb{C},\ (u_n) = A(\lambda^n) + B(\mu^n)$, ce qui signifie exactement que notre sous-espace est engendré par les deux suites (λ^n) et (μ^n).

Montrons que ces dernières sont libres, ce qui leur confèrera le titre de base de notre sous-espace : supposant une relation de liaison $\alpha(\lambda^n) + \beta(\mu^n) = 0$, laquelle se réécrit $\forall n \geq 0,\ \alpha\lambda^n + \beta\mu^n = 0$, garder les deux premières équations ($n = 0$ et $n = 1$) donne $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0 \end{cases}$, d'où $\beta = -\alpha$ et $\alpha(\lambda - \mu) = 0$, *i. e.* $\alpha = 0$ (car $\lambda \neq \mu$) et $\beta = 0$, *CQFD.*

Autre idée : les suites (λ^n) et (μ^n) étant chacune non nulle, leur colinéarité équivaudrait à une relation $(\mu^n) = A(\lambda^n)$ pour un complexe A, autrement dit à la constance de la suite géométrique $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n$, ce qui reviendrait à dire que la raison $\frac{\mu}{\lambda}$ de cette dernière vaut 1, ce qui est impossible. Ainsi, nos deux suites ne sont pas colinéaires : elles sont par conséquent libres.

4. Les polynômes de dérivée nulle sont les constantes, les polynômes de dérivée seconde nulle sont les polynômes affines, on montre plus généralement que les polynômes de dérivée n-ième nulle sont exactement ceux de degré $< n$. Ainsi, notre sous-espace n'est autre que l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré < 4, dont une base est $(1, X, X^2, X^3)$ (c'est la base canonique), d'où sa dimension 4.

   Commentaire : attention à ne pas écrire $\dim \mathbb{R}_n[X] \overset{???}{=} n$.

5. Une fonction affine est de la forme $x \mapsto ax + b$ pour des réels a et b, ce qui s'écrit aussi $\lambda[x \mapsto x] + \mu[x \mapsto 1]$ pour des réels λ et μ, ce qui montre que les fonctions affines sont engendrées par l'identité et la fonction constante 1. Montrons que ces dernières sont libres : une relation $p\,\mathrm{Id} + q1 = 0$ donnerait (évaluer en 0 et en 1) $q = 0$ et $p + q = 0$, *i. e.* $(p, q) = (0, 0)$, *CQFD.* Ainsi, les fonction affines forment un espace de dimension 2.

   Commentaire : une fonction affine est codée par son graphe, lequel peut être décrit par deux paramètres indépendants (pente et ordonnée à l'origine), ce qui permet d'intuiter la dimension.

6. Même idée : une fonction continue qui est affine sur $[-1, 0]$ et affine sur $[0, 1]$ peut être codée par trois paramètres indépendants (pente sur $[-1, 0]$, pente sur $[0, 1]$, ordonnée à l'origine) : on recherche donc trois fonctions libres qui engendrent notre espace. On sait déjà que 1 et Id sont libres. Rajoutons-leur une troisième fonction pour obtenir une famille libre. On doit choisir une fonction qui n'est pas affine sur tout $[-1, 1]$ (car ce dernier est de dimension 2 d'après la question précédente), autrement dit une fonction qui change de pente en l'origine : la valeur absolue $|\cdot|$ est un bon candidat. Elle ne peut être engendré par 1 et Id car toute fonction de $\mathrm{Vect}\{1, \mathrm{Id}\}$ est dérivable en 0 (et pas $|\cdot|$), d'où une famille libre $(1, \mathrm{Id}, |\cdot|)$ de notre espace. Montrons qu'elle est génératrice, ce qui nous fournira une base – et par là même la dimension (3).

   Soit f dans notre espace que l'on aimerait décomposer en $\lambda 1 + \mu\,\mathrm{Id} + \nu|\cdot|$. *Analyse* : évaluer en 0 donne $\lambda = f(0)$, dériver en -1 donne $\mu - \nu = f'(-1)$, dériver en 1 donne $\mu + \nu = f'(1)$, d'où $(\mu, \nu) = \left(\frac{f'(1)+f'(-1)}{2}, \frac{f'(1)-f'(-1)}{2}\right)$. *Synthèse* : vérifions que $f = f(0)1 + \frac{f'(1)+f'(-1)}{2}\mathrm{Id} + \frac{f'(1)-f'(-1)}{2}|\cdot|$. Les deux membres étant d'une part continus, d'autre part affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$, il suffit de montrer que les valeurs en 0 ainsi que les pentes à droite/gauche de 0 coincident. Mais c'est le cas d'après l'analyse.