Travaux dirigés 3

1 Rappels de cours

Le *sev engendré* par une partie A d'un ev est l'ensemble des combinaisons linéaire des vecteurs de A. Comme son nom l'indique, c'est un sev (et c'est le plus petit contenant A). On le note $\operatorname{Vect} A$.

Un vecteur est dit *lié* à une partie s'il appartient au Vect de cette dernière. Un ensemble de vecteurs est dit *lié* si l'un d'eux est liés aux autres, *libre* sinon. Une *relation de liaison* entre des vecteurs est la donnée d'une combinaison linéaire de ces vecteurs donnant le vecteur nul (par exemple, la relation de liaison où tous les scalaires sont nuls, dite *triviale*). On montre qu'une famille de vecteurs est libre ssi la seule relation de liaison est la relation triviale.

Dans le plan, deux vecteurs sont libres ssi ils ne sont pas colinéaires, ou encore ssi leur déterminant est non nul. On rappelle que le *déterminant* de deux vecteurs plans $x := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\xi := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est $\det(x, \xi) := a\beta - b\alpha$, usuellement noté $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}$.

Dans l'espace, trois vecteurs sont libre ssi leur déterminant est non nul. On rappelle que le *déterminant* de trois vecteurs spatiaux $x := (a, b, c)$, $y := (i, j, k)$ et $z := (p, q, r)$ est $\det(x, y, z) = ajr+iqc+pbk-cjp-kqa-rbi$, usuellement noté $\begin{vmatrix} a & i & p \\ b & j & q \\ c & k & r \end{vmatrix}$.

2 Exercices

Donner trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ deux à deux non colinéaires mais liés.
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont libres/liées ?
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *;*
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *;*
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *;*
$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *;*
2, $X^3 - 18$, $7X^5 + 14X^2 - X - 1$ *dans* $\mathbb{R}[X]$ *(polynômes à coefficients réels) ;*
$\exp$, $\exp \circ (3 \operatorname{Id})$ *et* $\exp \circ (\pi \operatorname{Id})$ *dans* $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *;*
$|\cdot|$, $|5 - \operatorname{Id}|$ *et* $|\operatorname{Id} - 18|$ *dans* $C^0([-6, 25], \mathbb{R})$.

Solution proposée.
Prendre trois vecteurs coplanaires deux à deux non colinéaires (par exemple 1, i et $1 + i$).

On revient aux définitions. Considérons une relation de liaison $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ avec λ et μ scalaires. Cela s'écrit $\begin{cases} \lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda + 5\mu = 0 \end{cases}$. Faire $L_2 - 2L_1$ donne $0\lambda - \mu = 0$, d'où $\mu = 0$, puis réinjecter donne $\lambda + 3 \cdot 0 = 0$, d'où $\lambda = 0$. Ainsi, la seule relation de liaison est la relation triviale, donc la famille est libre. Sanity check : calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1 \neq 0.$$

Considérons une relation de liaison $\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=0$ avec λ,μ,ν scalaires. Cela s'écrit $\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0\\2\lambda-2\mu+4\nu=0\\3\lambda-3\mu+3\nu=0\end{cases}$, ou encore $\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0\\\lambda-\mu+2\nu=0\\\lambda-\mu+\nu=0\end{cases}$. Faire L_2-L_3 donne $\nu=0$, réinjecter donne $\begin{cases}\lambda+\mu=0\\\lambda-\mu=0\end{cases}$, d'où en sommant/soustrayant $(\lambda,\mu)=(0,0)$. Finalement, tous les scalaires sont nuls et la famille est libre. Sanity check : calculer le déterminant

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-2&4\\3&-3&3\end{vmatrix}&=(1)(-2)(3)+(1)(4)(3)+(1)(2)(-3)-(3)(-2)(1)-(-3)(4)(1)-(3)(2)(1)\\&=-6+12-6+6+12-6=12\neq 0.\end{aligned}$$

Considérons une relation de liaison $\lambda\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=0$ avec λ,μ,ν scalaires. Cela s'écrit $\begin{cases}5\lambda-\mu+2\nu=0\\\lambda+\mu=0\\-3\lambda+5\mu+\nu=0\end{cases}$, d'où (remplacer μ par $-\lambda$) $\begin{cases}6\lambda+2\nu=0\\-8\lambda+\nu=0\end{cases}$. L_1 se lit $\nu=-3\lambda$ tandi que L_2 donne $\nu=8\lambda$, d'où $\lambda=0$ puis $\nu=0$ et $\mu=-\lambda=0$: la famille est libre. Sanity check : calculer le déterminant

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}5&-1&2\\1&1&0\\-3&5&1\end{vmatrix}&=(5)(1)(1)+(-1)(0)(-3)+(2)(1)(5)-(-3)(1)(2)-(5)(0)(5)-(1)(1)(-1)\\&=5+0+10+6+0+1>0\text{, donc est }\neq 0.\end{aligned}$$

Partons d'une relation de liaison $\lambda(2)+\mu\left(X^3-18\right)+\nu\left(7X^5+14X^2-X-1\right)=0$ avec λ,μ,ν réels, ce qui s'écrit en regroupant les monômes de mêmes puissances

$$7\nu X^5+\mu X^3+14\nu X^2-\nu X+(2\lambda-18\mu-\nu)=0X^5+0X^3+0X^2+0X+0.$$

En identifiant les coefficients, on obtient (coef en X^5) $7\nu=0$, (coef en X^3) $\mu=0$, puis (coef constant) $2\lambda=0$. Notre famille est donc libre.

Supposons une relation de liaison $\lambda\exp+\mu\exp\circ(3\,\mathrm{Id})+\nu\exp\circ(\pi\,\mathrm{Id})=0$ dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec λ,μ,ν réels. Cela s'écrit $\forall t\in[-7,1]$, $\lambda e^t+\mu e^{3t}+\nu e^{\pi t}=0$. Deux idées (au moins) sont abordables.

1. Dériver puis retrancher à la première égalité donne $2\mu e^{3t}+(\pi-1)\nu e^{\pi t}=0$ (pour tout t). Dériver puis retrancher à trois fois l'égalité précédente donne $[\pi(\pi-1)-3(\pi-1)]\nu e^{\pi t}=0$ (pour tout t), d'où (évaluer en 0) $(\pi-3)(\pi-1)\nu=0$, soit $\pi\in\{1,3\}$ (faux) ou $\nu=0$. Réinjecter dans la seconde égalité obtenue donne alors $2\mu e^{3t}=0$ pour tout t, d'où (évaluer en 0) $2\mu=0$ et $\mu=0$. Enfin, réinjecter dans la première égalité donne $\lambda\exp=0$, d'où $\lambda=0$ en évaluant en 1.
2. En divisant par $e^{\pi t}$ et en faisant tendre t vers ∞, on obtient $\nu=0$ (puisque les exposants sont rangés selon $\pi>3>1$). Ensuite, diviser par e^{3t} et prendre la limite en ∞ donne $\mu=0$, d'où $\lambda\exp=0$ et $\lambda=0$.

Écrivons une relation de liaison $\lambda|\cdot|+\mu|5-\mathrm{Id}|+\nu|\mathrm{Id}-18|=0$ dans $C^0([-6,25],\mathbb{R})$ avec λ,μ,ν réels. Remarquer qu'une fonction $\alpha|\mathrm{Id}-\beta|$ est dérivable partout sauf en β si $\alpha\neq 0$. Le membre de gauche étant dérivable (il vaut le membre de droite qui est dérivable partout car constant), les coefficients doivent tous s'annuler (sinon, mettons $\lambda\neq 0$, le membre $\lambda|\cdot|+\mu|5-\mathrm{Id}|+\nu|\mathrm{Id}-18|$ ne serait pas dérivable en 0), donc la famille est libre.