# Travaux dirigés 9

**Rappel.** Une ***primitive*** d'une fonction $f$ est (par définition) une fonction $\clubsuit$ dérivable telle que $\clubsuit' = f$.

**Exo.** *Montrer que la dérivée d'une primitive d'une fonction $\mu$ est $\mu$.*

L'***intégrale*** d'une fonction $f$ continue sur un segment $[a,b]$ est (par définition) l'accroissement de n'importe quelle primitive de $f$ sur ce segment. En d'autres temes, en notant $\int_a^b f(\beta)\,d\beta$ ou $\int_a^b f$ l'intégrale considére, on a par définition

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ dès que } F' = f.$$

L'accroissement $F(b) - F(a)$ se note souvent sous forme d'un crochet $[F]_a^b$ ou $F[x]_a^b$ ou $[F(\chi)]_{\chi=a}^b$.

**Exo.** *Si $\xi$ est une fonction de classe $C^1$ sur $[a,b]$, montre que $\int_a^b \xi'$ existe et vaut $[\xi]_a^b$.*

Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $C^1$ sur $[a,b]$, y intégrer la formule de Leibniz $[uv]' = u'v + uv'$ montre que $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int uv'$.

**Exo.** *En déduire la formule suivante (**intégration par parties**, ou IPP) pour $f$ de classe $C^1$ et $g$ continue sur $[a,b]$ :*

$$\int_a^b fg = [fG]_a^b - \int_a^b f'G \qquad \text{avec } G' = g.$$

On pourra représenter cela par le dessin

$$\left\downarrow \begin{array}{ccc} f & & g \\ & \diagdown^{+} & \\ f' & \cdots^{-} & G \end{array} \right\uparrow$$

où les flèches indiquent le sens de dérivation, les pointillés que l'on prend l'intégrale du produit et les barres obliques que l'on prend le crochet du produit. Cela permet éventuellement de représenter plusieurs IPP à la suite (attention aux signes qui s'alternent) :

$$\left\downarrow \begin{array}{ccc} f & & \varphi''' \\ & \diagdown^{+} & \\ f' & & \varphi'' \\ & \diagdown^{-} & \\ f'' & & \varphi' \\ & \diagdown^{+} & \\ f''' & \cdots^{-} & \varphi \end{array} \right\uparrow \text{ traduit } \int f\varphi''' = [f\varphi''] - [f'\varphi'] + [f''\varphi] - \int f'''\varphi.$$

**Remarque.** Intuitivement, $\int_a^b f$ représente l'aire[1] signée délimitée par des deux droites verticales d'abscisses $a$ et $b$, l'axe des abscisses et le graphe de $f$ (on compte négativement lorsque le graphe est en-dessous de l'axe des abscisses). S'agissant à l'orgine d'une somme, on pourra donc écrire

$$\operatorname{Re} \int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f$$

et pareil en remplaçant "partie réelle Re" par "partie imaginaire Im" ($f$ est ici à valeurs complexes).

**Rappel.** Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^1$ et $f : [\varphi(a), \varphi(b)] \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors on a (formule du ***changement de variables*** ou CdV)

$$\begin{aligned} \int_a^b (f \circ \varphi) \times \varphi' &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f, \text{ autrement dit} \\ \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt, \text{ que l'on peut réécrire} \\ \int_a^b f\left(\boxed{\varphi(x)}\right) d\boxed{\varphi(x)} &= \int_{\boxed{\varphi(a)}}^{\boxed{\varphi(b)}} f(t)\,dt \end{aligned}$$

avec la très pratique notation $d(\sigma(t)) = \sigma'(t)\,dt$ pour tout fonction $\sigma$ dérivable.

**Exercices.** *Exprimer de manière simple les intégrales qui suivent :*

[1] L'intégrale, vue en tant qu'aire, est la somme des rectangles infinitésimaux de largeur $dx$ et de hauteur $f(x)$ lorsque $x$ décrit le segment considéré. Le $\int$ est un "$s$" en ancien français, abréviation de "somme".

1. $\int_2^3 \left(3t^2+1\right) dt$ ;
2. $\int_{-1}^2 |g|\, dg$ ;
3. $\int_0^1 q^2 e^q dq$ ;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\rho} \cos\rho \; d\rho$ ;
5. $\int_1^2 \frac{(\ln\varphi)^3}{\varphi} d\varphi$ ;
6. $\int_8^{27} \ln\left(\sqrt[3]{V}-1\right) dv$ ;
7. $\int_3^8 \frac{dv}{v\sqrt{1+v}}$

**Solution rapide proposée.**

1. Une primitive de $f \mapsto 3f^2+1$ étant $j \mapsto j^3+j$, on peut calculer

$$\int_2^3 \left(3t^2+1\right) dt = \left[t^3+t\right]_{t=2}^3 = \left(3^3+3\right) - 2^3 + 2 = 30 - 10 = 20.$$

2. On revient à la définition de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ respectivement :

$$\int_{-1}^2 |g|\, dg \overset{\text{Chasles}}{=} \int_{-1}^0 |g|\, dg + \int_0^2 |g|\, dg \underset{\text{de } |\cdot|}{\overset{\text{définition}}{=}} \int_{-1}^0 -g dg + \int_0^2 g d$$
$$= \left[-\frac{g^2}{2}\right]_{g=-1}^0 + \left[\frac{g^2}{2}\right]_{g=0}^2 = 0 - \left(-\frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{2^2}{2} - 0 = \frac{5}{2}.$$

À comparer avec l'aire sous la courbe découpée en cinq triangles rectangles isocèles d'aire $\frac{1}{2}$.

3. On fait plusieurs IPPs successives afn de tuer le polynôme (comme ça, pas d'intégrales à calculer, que des crochets) :

$$\left\downarrow\begin{array}{ccc} q^2 & & e^q \\ & \searrow^{+} & \\ 2q & & e^q \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & & e^q \\ & \searrow^{+} & \\ 0 & \cdots^{-} & e^q \end{array}\right\uparrow \quad \text{signifie} \quad \int_0^1 q^2 e^q dq = \begin{array}{c} \left[q^2 e^q\right]_0^1 - \left[2qe^q\right]_0^1 + \left[2e^q\right]_0^1 - \int_0^1 0 e^q dq \\ = e - 2e + 2\left(e-1\right) = e-2. \end{array}$$

4. Idée 1 : on passe en complexes pour n'avoir à intégrer que de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\rho} \cos\rho \; d\rho &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\rho} \operatorname{Re}\left(e^{i\rho}\right) d\rho \underset{\text{pour tout réel } \lambda}{\overset{\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re} z}{=}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re}\left(e^{2\rho} e^{i\rho}\right) d\rho \\ \overset{\operatorname{Re}\int f = \int \operatorname{Re} f}{=} \operatorname{Re} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2+i)\rho} d\rho &= \operatorname{Re}\left[\frac{e^{(2+i)\rho}}{2+i}\right]_{\rho=0}^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{Re} \frac{e^{\pi + i\frac{\pi}{2}} - 1}{2+i} \\ \underset{\text{conjugué}}{\overset{\text{complexe}}{=}} \operatorname{Re} \frac{\left(ie^\pi - 1\right)\left(2-i\right)}{2^2+1^2} &= \frac{e^\pi - 2}{5}. \end{aligned}$$

Idée 2 : on fait deux IPPs afin d'obtenir une équation sur l'intégrale cherchée (notons-la $I$) :

$$\left\downarrow\begin{array}{ccc} e^{2\rho} & & \cos\rho \\ & \searrow^{+} & \\ 2e^{2\rho} & & \sin\rho \\ & \searrow^{-} & \\ 4e^{2\rho} & \cdots^{+} & -\cos\rho \end{array}\right\uparrow \quad \text{donne} \quad \begin{array}{c} I = \left[e^{2\rho}\sin\rho\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[2e^{2\rho}\left(-\cos\rho\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4e^{2\rho}\left(-\cos\rho\right) d\rho, \\ \text{d'où } I = \left(e^\pi - 0\right) + 2\left(0-1\right) - 4I, \\ \text{soit encore } I = \frac{e^\pi - 2}{5}. \end{array}$$

Bien sûr, les résultats trouvés sont les mêmes.

5. On reconnaît la dérivée de ln, ce qui permet de faire un changement de variable :

$$\int_1^2 \frac{(\ln\varphi)^3}{\varphi} d\varphi = \int_1^2 \boxed{\ln\varphi}^3 d\boxed{\ln\varphi} = \int_{\boxed{\ln 1}}^{\boxed{\ln 2}} \square^3 d\square = \left[\frac{\square^4}{4}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^4}{4}.$$

6. On fait un changement de variable $R := \sqrt[3]{V}$, d'où $dR = d\left(V^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}V^{-\frac{2}{3}}dV = \frac{dV}{3R^2}$, ce qui donne

$$\int_{V=8}^{27} \ln\left(\sqrt[3]{V} - 1\right) dV = \int_{R=\sqrt[3]{8}}^{\sqrt[3]{27}} \ln(R-1)\, 3R^2 dR = 3\int_2^3 \ln(R-1)\, R^2 dR.$$

On fait ensuite une IPP pour tuer le logarithme $\left\downarrow \begin{array}{ccc} \ln(R-1) & & R^2 dR \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dR}{R-1} & \dots^{-} & \frac{R^3-1}{3} \end{array} \right\uparrow$ (la constante d'intégration va nous servir), ce qui donne

$$\int_2^3 \ln(R-1)\, R^2 dR = \frac{1}{3}\left[\ln(R-1)\,\frac{R^3-1}{3}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{dR}{R-1}\frac{R^3-1}{3}.$$

Or on connaît $\frac{R^3-1}{R-1} = R^2 + R + 1$, de sorte que l'intégrale vaut

$$\frac{1}{3}\int_2^3 \left(R^2 + R + 1\right) dR = \frac{1}{3}\left[\frac{R^3}{3} + \frac{R^2}{2} + R\right]_2^3 = \frac{1}{3}\left(9 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{8}{3} - 2 - 2\right).$$

On en déduit l'intégrale cherchée.

7. On fait un changement de variable $r := \sqrt{1+v}$, d'où $dr = \frac{\frac{1}{2}dv}{\sqrt{1+v}}$ et $dv = 2rdr$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{dv}{v\sqrt{1+v}} &= \int_{\sqrt{1+3}}^{\sqrt{1+8}} \frac{2rdr}{(r^2-1)\, r} = \int_2^3 \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1}\right) dr \\ &= \left[\ln(r-1)\right]_2^3 - \left[\ln(r+1)\right]_2^3 = \ln 3 - \ln 2. \end{aligned}$$