Travaux dirigés 7

En français, on parle souvent d'un rapport de force, d'un rapport qualité-prix. Lorsqu'un rapport $\frac{a}{b}$ est petit, cela signifie que a est petit comparé à b. Lorsque ce rapport devient infiniment petit, il est raisonnable de dire que a devient *négligeable* devant b. De même, lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ vaut (ou est très proche de) 1, cela veut dire que les quantités a et b sont (quasiment) égales ; lorsque ce rapport tend vers 1, il est donc raisonnable de dire que a et b deviennent *équivalentes*. Ce qui motive les définitions suivantes.

Définition. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.

On dit que f est équivalente à g *au voisinage de a si on peut écrire $f(x) = 1(x)\, g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a où la quantité $1(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers a. On note alors $f(x) \overset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \overset{x\sim a}{\sim} g(x)$ ou $f \overset{a}{\sim} g$.*

On dit que f est négligeable devant g *au voisinage de a si on peut écrire $f(x) = 0(x)\, g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a où la quantité $0(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. On note alors $f(x) \overset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \overset{x\sim a}{=} o(g(x))$ ou $f \overset{a}{=} o(g)$, et on lit "f est un petit[1] o de g" . On pourra également noter $f(x) \overset{x\to a}{\prec} g(x)$ ou $f(x) \overset{x\sim a}{\prec} g(x)$ ou $f \overset{a}{\prec} g$.*

Remarques.

On est négligeable/équivalent *au voisinage* d'un certain point, le comportement pouvant changer selon le point. Par exemple, on a $x \overset{x\sim\infty}{=} o\left(x^2\right)$ mais $x^2 \overset{x\sim 0}{=} o(x)$.

On n'est jamais négligeable/équivalent tout court mais *devant* autre chose : c'est une notion *relative* qui *compare* deux quantités.

Lorsque g ne s'annule pas au voisinnage de a, on peut traduire la négligeabilité et l'équivalence en termes de rapports :

$$f \overset{a}{=} o(g) \iff \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 0 \qquad\qquad f \overset{a}{\sim} g \iff \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 1.$$

On verifiera qu'on a toujours (au voisinage de tout point) $f \sim f$, l'équivalence logique $f \sim g \iff g \sim f$ ainsi que l'implication $(f \sim g$ et $g \sim h) \implies f \sim h$. Ainsi, $\sim$ se comporte "un peu comme" le symbole d'égalité.

Cependant, on n'a jamais $f \prec f$ (sauf si f est nulle au voisinage du point considéré) et on a jamais à la fois $f \prec g$ et $g \prec f$ (sauf si f et g sont nulles). Toutefois, on a quand même l'implication $(f \prec g$ et $g \prec h) \implies f \prec h$. Ainsi, $\prec$ se comporte "un peu comme" une inégalité stricte.

Il est vital de voir la connection suivante entre o et $\sim$. En français d'abord : *être équivalent à une quantité Q, c'est valoir Q à un truc **négligeable devant** Q près*. En maths, cela s'écrit

$$f \sim Q \iff f = Q + o(Q).$$

L'avantage du o est qu'il permet d'écrire des vraies égalités et de les additionner, ce qui n'est pas possible avec $\sim$ (en effet, lorsque x est proche de 0, on a d'une part $x + 1 \sim 1$, d'autre part $-1 \sim -1$, mais additionner donnerait $x \sim 0$, traduisant la nullité de x au voisinage de 0, ce qui est absurde).

Parmir les quantités suivantes, dire lesquelles, dire lesquelles sont négligeables/équivalentes devant les autres lorsque x tend vers 0 :

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2 & x & \sqrt{x} & x^{42} & \sqrt[18]{x} & \cos x & \sin x & \tan x & \ln x \\ e^x & 1-\cos x & \ln(1+x) & e^x - 1 & \sin x - x & \tan x - x. \end{array}$$

Solution rapide proposée.

1. Tout d'abord, toutes les quantités ayant une limite nulle sont négligeables devant celles ayant une limite non nulle (par exemple, $\frac{x}{e^x}$ tend vers $\frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$, donc $x = o(e^x)$) et de même les quantités ayant une limite finie sont négligeables devant celles de limite $\pm\infty$ (par exemple, $\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}\sqrt{x} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$, donc $\sqrt{x} = o(\ln x)$), ce qui règle le sort de $\cos x$, $\ln x$, e^x par rapport aux autres.

[1] le pluriel de "petit o" étant "petits o", on fera la liaison "peutizo"

2. Ensuite, vues les équivalences (valables pour tous α et β réels)

$$x^{\alpha} \overset{?}{=} o\left(x^{\beta}\right) \iff \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} \overset{?}{\longrightarrow} 0 \iff x^{\alpha-\beta} \overset{?}{\longrightarrow} 0 \iff \alpha - \beta \overset{?}{>} 0 \iff \alpha \overset{?}{>} \beta,$$

on en déduit les négligeabilités $x^{42} \prec x^2 \prec x \prec \sqrt{x} \prec \sqrt[18]{x}$ (et on appréciera dans ce cas la notation $\prec$ sur celle du petit o).

3. Par ailleurs, on a déjà vu la limite classique $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$, ce qui montre l'équivalence $\sin x \sim x$. De même, $\frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} \longrightarrow 1\frac{1}{\cos 0} = 1$, d'où $\tan x \sim x$. On a également vu que $\frac{1-\cos x}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$, ce qui peut se redémontrer en multipliant par une "quantité conjuguée" $1+\cos x$ et en invoquant $1-\cos^2 = \sin^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \longrightarrow (1)^2 \frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, autrement dit $1-\cos x$ est égal à $\frac{x^2}{2}$ à un petit o de $\frac{x^2}{2}$ près, ce qui s'écrit $1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, ou encore

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Sous cette forme, nous avons le *développement* (du cosinus) *limité à l'ordre* 2. Interprétation graphique : le graphe de cos "colle" la parabole $t \mapsto 1 - \frac{t^2}{2}$ et cette dernière est celle qui lui colle le mieux.

4. Concernant les deux quantités suivantes, ce sont des taux de variation déguisés :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x)-(1)} \longrightarrow \ln'(1) = 1,$$

ce qui mntre que $\ln(1+x) \sim x$. Il serait impardonnable de rater l'interprétation graphique : le graphe de ln a une tangente de pente 1 en le point d'abscisse 1. De même, on a $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-e^0}{x-0} \longrightarrow e'(0) = 1$, signifiant d'une part $e^x - 1 \sim x$, d'autre part que exp a une tangente de pente 1 en le point d'abscisse 0.

Il y a bien sûr un lien : puisque le graphe de ln est le symétrisé de celui de exp par rapport à la première bissectrice, les tangentes le sont également, en particulier celle au graphe de exp en $(0,1)$ et celle au graphe de ln en $(1,0)$ ont leurs pentes symétriques par rapport à 1.

5. Reste à traiter les deux dernières quantités. L'équivalence $\sin x \sim x$ signifiant que le graphe de sin a pour tangente en l'orgine la premère bissectrice, on demande de "zoomer" sur la différence $\sin x - x$ (tout comme on avait "zommé" sur l'équivalence $\cos x \sim 1$ pour dégager la différence $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$).

Imaginons que le terme apparaissant lors du premier zoom soit de la forme λx^2 pour un certain réel λ, autrement dit que $\sin x = x + \lambda x^2 + o\left(x^2\right)$ (graphiquement, sin "collerait" à la parabole $t \mapsto t + \lambda t^2$). En dérivant selon x, on trouverait d'une part $\sin'(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, d'autre part $\frac{d}{dx}\left(x + \lambda x^2 + o\left(x^2\right)\right) = 1 + 2\lambda x + o(x)$; en simplifiant par 1, puis par x, puis en le faisant tendre vers 0, on trouverait $\lambda = 0$. La nullité de λ signifie que notre zoom n'a pas été assez fort, il faut zoomer plus et envisage un terme d'ordre supérieur (ici 3), mettons $\sin x = x + \mu x^3 + o\left(x^3\right)$. Alors, le même procédé donnerait d'une part $\sin' x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, d'autre part $\frac{d}{dx}\left(x + \mu x^3 + o\left(x^3\right)\right) = 1 + 3\mu x^2 + o\left(x^2\right)$, d'où l'égalité $1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) = 1 + 3\mu x^2 + o\left(x^2\right)$; en simplifiant par 1 puis par x^2 puis en faisant tendre x vers 0, on trouverait $\mu = -\frac{1}{6}$, d'où le développement limité à l'ordre 3 :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Interprétation graphique : le graphe de sin "colle" bien à la cubique $t \mapsto t - \frac{t^3}{6}$. Observer qu'il est impossible de se tromper de signe : le graphe de sin étant *en-dessous* de sa tangente (en 0), la différence $\sin x - x$ doit être *négative* (on ne pourra donc jamais écrire $\sin x \overset{?}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$).

On procède de même pour la différence $\tan x - x$ (que l'on doit trouver *positive* vu que le graphe de tan est *au-dessus* de sa tangente en 0). En zoomant à l'ordre 2, mettons $\tan x = x + \lambda x^2 + o\left(x^2\right)$, on obtiendrait en dérivant d'une part

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2(1 + o(1))^2,$$

d'autre part $\frac{d}{dx}\left(x+\lambda x^2+o\left(x^2\right)\right) = 1+2\lambda x+o\left(x\right)$, d'où (en simplifiant par 1 puis par x puis en faisant tendre x vers 0) l'égalité $\lambda = 0$. Encore une fois, il faut aller chercher l'ordre supérieur, disons $\tan x = x+\mu x^3+o\left(x^3\right)$. Par la même méthode, on trouverait $\frac{d}{dx}\left(\tan x\right) = 1+3\mu x^2+o\left(x^2\right)$, d'où (en simplifiant par 1 puis par x^2 puis en faisant tendre x vers 0) l'égalité $\mu = \frac{1}{3}$. On obtient donc le développement limité à l'ordre 3 :

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right).$$

On remarquera que les deux DLs ci-dessus ne font apparaître que des puissances impaires : cela est tout simplement dû à l'imparité de sin et tan.

6. On récapitule tous les ordres de grandeur trouvés

$$x^{42} \prec \left[\begin{array}{c} \sin x - x \sim -\frac{x^3}{6} \\ x^3 \\ \tan x - x \sim \frac{x^3}{3} \end{array}\right] \prec \left[\begin{array}{c} 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \\ x^2 \end{array}\right] \prec \left[\begin{array}{c} \sin x \\ \sim \tan x \\ \sim x \\ \sim e^x - 1 \\ \sim \ln\left(1+x\right) \end{array}\right] \prec \sqrt{x} \prec \sqrt[18]{x} \prec \left[\begin{array}{c} \cos x \\ \sim 1 \\ \sim e^x \end{array}\right] \prec \ln x.$$