Travaux dirigés 4

On rappelle qu'une quantité Q (suite ou fonction) est dite *bornée* lorsque la quantité $|Q|$ est majorée, autrement dit s'il y a un réel $M>0$ tel que $|Q|\leq M$, ce qui s'écrit aussi $-M\leq Q\leq M$.

Un corollaire utile du théorème des gendarmes (version suites ou fonctions) est le suivant (exo : le démontrer !) : *le produit d'une quantité tendant vers* 0 *par une quantité bornée tend vers* 0.

Déterminer les limites suivantes (si elles existent !)

1. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$;
2. $\lim_{\psi\to 0}\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}$
3. $\lim_{u\to 0}\frac{\tan u-\sin u}{u^3}$
4. $\lim_{r\to -2}\frac{r^3+8}{r+2}$
5. $\lim_{\sigma\to 1^-}\exp\left(\frac{1}{\sigma^2-1}\right)$
6. $\lim_{\Delta\to 1}\frac{1-\Delta}{1-\sqrt{\Delta}}$
7. $\lim_{\nu\to 1}\nu^2 e^{\left(-\ln\nu+\tan^3\nu\right)^2}\frac{\sin\nu}{1+\nu}\left(\ln\nu\right)^{42}$

Solution proposée.

1. Les numérateur et dénominateur tendant tous deux vers 0, on ne peut pas appliquer les théorèmes usuels sur les quotients de limite (on a une forme indéterminée). Il faut donc ruser.

   Tout d'abord, la fonction $a\mapsto\frac{\sin a}{a}$ étant paire[1], on aura l'égalité des limites suivantes, sous réserve de leur existence :
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}.$$
   Regardons donc ce qui se passe lorsque $x\longrightarrow 0^+$.

   Un dessin dans le cercle trigonométrique montre l'encadrement[2] $\sin\theta\leq\theta\leq\tan\theta$ valable pour $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. En divisant par $\sin\theta$ (qui est bien non nul), il vient $1\leq\frac{\theta}{\sin\theta}\leq\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$. Lorsque θ tend vers 0^+, le terme de gauche tend vers 1 (il est constant), celui de droite vers $\frac{1}{\cos 0}=1$ par continuité de cos en 0 (et par les théorèmes usuels sur limites et inverses), donc le théorème des gendarmes permet de récolter $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, qui est (d'après ce qui précède) la limite voulue.
2. Le numérateur tend (par continuité de cos en 0) vers $1-\cos(0)=1-1=0$ tout comme le dénominateur, donc on a une forme indéterminée.

   Pour lever l'indétermination, on cherche une formule de trigonométrie faisant intervenir du $1-\cos$. Après quelques efforts, on pense aux formules[3] de duplication du cosinus :
$$\cos 2a=\begin{cases}\cos^2 a-\sin^2 a\\ 2\cos^2 a-1\\ 1-2\sin^2 a\end{cases}\quad\text{valables pour tout réel } a.$$
   La troisième est la bonne : elle nous permet d'écrire $1-\cos 2a=2\sin^2 a$, soit (en imposant $2a=\psi$) $1-\cos\psi=2\sin^2\frac{\psi}{2}$. Ainsi, ayant fixé un réel $\psi\neq 0$, le quotient étudié s'écrit $\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}=\frac{2\sin^2\frac{\psi}{2}}{\psi^2}$.

   On voit poindre du $\frac{\sin\square}{\square}$ avec $\square:=\frac{\psi}{2}$; pour forcer ce $\frac{\sin\square}{\square}$ à apparaître, on force du $\frac{\psi}{2}$ à apparaître au dénominateur, puis on rentre tout dans le carré. Afin de préserver l'égalité, on doit diviser/multipler par des choses (à trouver après une fois écrit le carré). On obtient ainsi $\frac{2\sin^2\frac{\psi}{2}}{\psi^2}=2\frac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{4\left(\frac{\psi}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\right)^2$. Or, d'une part, $\frac{\psi}{2}\longrightarrow\boxed{0}$ lorsque $\psi\longrightarrow 0$, d'autre part, $\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow 1$ lorsque $\theta\longrightarrow\boxed{0}$ (d'après la question précédente), donc, par composition, on obtient $\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\longrightarrow 1$ quand $\psi\longrightarrow 0$. En invoquant les théorèmes usuels (produit, carré, multiplication par une constante), on voit que $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\right)^2$ tend vers $\frac{1}{2}(1)^2=\frac{1}{2}$, d'où la limite recherchée.

[1] Une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est *paire* lorsque $f(-p)=f(p)$ pour tout réel p, *impaire* lorsque $f(-i)=-f(i)$ pour tout réel i.

[2] Appelons O le centre 0, I le point 1, A le point $e^{i\theta}$ du cercle tel que $\widehat{IOA}=\theta$, H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle AIO et T le point d'intersection de (OA) et de la tangente au cercle en I. Alors la longueur AH est plus petite que celle de l'arc de cercle AI, laquelle est plus petite que la longueur IT.

[3] on passe de l'une à l'autre en invoquant l'identité $\cos^2+\sin^2=1$

3. Encore une fois, les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure : le numérateur tend par continuité vers $\tan 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$ comme le dénominateur. Comment procéder alors ?

Commençons par revenir à la définition de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, ce qui permet d'écrire (pour u réel non nul) le quotient étudié comme $\frac{\tan u - \sin u}{u^3} = \frac{\frac{\sin u}{\cos u} - \sin u}{u^3}$. On voit apparaître un facteur commun ($\sin u$), **donc** on le factorise, ce qui donne $\frac{\sin u\left(\frac{1}{\cos u}-1\right)}{u^3}$. On reconnaît alors du $\frac{\sin\bowtie}{\bowtie}$, **donc** on le force à apparaître : $\frac{\sin u}{u}\frac{\frac{1}{\cos u}-1}{u^2}$. On voit ensuite apparaître quelque chose très proche du $\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}$ de la question précédente, ce qu'on peut forcer en multipliant en haut et en bas par $\cos u$; on obtient alors $\frac{\sin u}{u}\frac{1-\cos u}{u^2\cos u} = \frac{\sin u}{u}\frac{1-\cos u}{u}\frac{1}{\cos u}$. D'après les questions précédentes, les théorèmes usuels (produits de limites) ainsi que la continuité de cos, le produit précédent tend vers (lorsque $u \longrightarrow 0$) $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos 1} = \frac{1}{2}$.

4. Par continuité des polynômes, le numérateur tend vers $(-2)^3 + 8 = 0$, tout comme le dénominateur : forme indéterminée. On va alors chercher à factoriser le polynôme au numérateur par $r+2$, afin de simplifier la fraction étudiée. On rappelle pour cela les identité[4] remarquables[5] valables pour tous complexes a et b :

$$\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & (a-b)(a+b) \\ a^3 - b^3 & = & (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) \\ a^4 - b^4 & = & (a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) \\ a^5 - b^5 & = & (a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right) \\ & & \cdots . \end{array}$$

On trouve en particulier $r^3 + 8 = r^3 - (-2)^3 = [r-(-2)]\left[r^2 + r(-2) + (-2)^2\right]$, donc la fraction étudiée $\frac{r^3+8}{r+2}$ se simplifie en $r^2 - 2r + 4$, qui (étant continue) tend vers $(-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$.

5. Il suffit d'invoquer les théorèmes de composision. Primo, $\sigma^2 - 1$ tend vers 0^- lorsque $\sigma \longrightarrow 1^-$, deuxio $\frac{1}{x} \overset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, tertio $e^M \overset{M\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion : la limite cherchée est nulle.

6. On a une forme indéterminée. Comme pour le quotient $\frac{r^3+8}{r+2}$, on va tenter de factoriser le dénominateur au numératuer, ce qui peut se faire en écrivant (pour $\Delta > 0$) $1 - \Delta = 1^2 - \sqrt{\Delta}^2 = \left(1-\sqrt{\Delta}\right)\left(1+\sqrt{\Delta}\right)$, de sorte que la fraction étudiée devient $1 + \sqrt{\Delta}$ qui tend (par continuité de $\sqrt{}$) vers $1 + \sqrt{1} = 1$.

Autre idée : quand on voit une quantité du genre $18 + \sqrt{42}$, on multiplie par la quantité conjuguée $18 - \sqrt{42}$. Ici, cela donne

$$\frac{1-\Delta}{1-\sqrt{\Delta}} = \frac{(1-\Delta)\left(1+\sqrt{\Delta}\right)}{\left(1-\sqrt{\Delta}\right)\left(1+\sqrt{\Delta}\right)} = \frac{(1-\Delta)\left(1+\sqrt{\Delta}\right)}{1^2 - \sqrt{\Delta}^2} = 1 + \sqrt{\Delta} \overset{\Delta\to 1}{\longrightarrow} 2.$$

7. Il faut apprendre à fermer ses yeux sur certains détails et voir le comportemet global. Ici, on a primo une exponentielle de [moins un carré], autrement dit une exponentielle d'un réel négatif, laquelle est par conséquent bornée (par 1) ; deuxio, un sinus, aussi borné (par 1) ; tertio une fraction $\frac{1}{1+\nu}$, qui se trouve aussi être bornée pour $\nu > 0$ (en effet, alors $\nu + 1 > 1$, donc $\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{1} = 1$, la fraction positive étant par ailleurs minorée par 0) ; quarto un $\nu^2 (\ln\nu)^{42}$ qui tend vers 0 (lorsque $\nu \longrightarrow 0^+$) d'après les puissances comparées. On a donc un produit de trucs bornés par un bidule tendant vers 0 : le tout tend vers 0 par les gendarmes.

[4] *identité* vient de *identique* et signifie donc *égalité*

[5] dont le laisse au lecteur le soin de déterminer le motif général grâce à ses capacités d'observation