Travaux dirigés 1

1. *Mettre sous forme rectangulaire les complexes* $\frac{(1+3i)(2-i)(2+4i)}{10}$ *et* $\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)^2$.
2. *Calculer les inverses de* $3+2i$ *et* $-1-i\sqrt{2}$.
3. *Mettre sous forme polaire les complexes* $\frac{3-\sqrt{3}i}{2-2i}$, $(3+3i)^3$ *et* $\left(\frac{1-i}{4}\right)^{16}$.
4. *Soit* $z=a+ib$ *un complexe de partie réelle* $a>0$ *; expliquer pour quoi* $\arg z = \arctan\frac{b}{a}$. *On suppose à présent que* z *est un complexe n'appartenant pas à* $\mathbb{R}^-$. *Montrer alors que* $\arg z = 2\arctan\frac{b}{|z|+a}$.
5. *Calculer la somme* $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Solution rapide proposée.

1. On factorise les constantes, ici 10 au dénominateur et 2 dans le dernier facteur, puis on développe tout : on trouve
$$\frac{(1+3i)(2-i)(2+4i)}{10} = \frac{2}{10}(1+3i)(2-i)(1+2i) = -1+3i.$$
Quand au second produit, on obtient en développant les deux premiers facteurs
$$\begin{aligned}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)^2 &= \left(2\sqrt{3}-2i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)\\ &= 2\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)\\ &= 2\left(\sqrt{3}^2-i^2\right)\\ &= 8\end{aligned}$$

2. On introduit le complexe conjugué pour rendre réel le dénominateur :
$$\begin{aligned}\frac{1}{3+2i} &= \frac{3-2i}{(3+2i)(3+2i)} = \frac{3-2i}{|3+2i|^2} = \frac{3-2i}{3^2+2^2} = \frac{3-2i}{13},\\ \frac{1}{-1-i\sqrt{2}} &= \frac{-1+i\sqrt{2}}{\left|-1-i\sqrt{2}\right|^2} = \frac{-1+i\sqrt{2}}{(-1)^2+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

3. On calcule d'abord les modules (pris au carré pour ne pas se trimbaler les racines)
$$\begin{aligned}\left|\frac{3-\sqrt{3}i}{2-2i}\right|^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right|\right)^2 = \frac{3}{4}\frac{\left|\sqrt{3}-i\right|^2}{|1-i|^2} = \frac{3}{4}\frac{3+1}{1+1} = \frac{3}{2},\\ \left|(3+3i)^3\right|^2 &= 3^{3\times 2}\left(|1+i|^2\right)^3 = 3^6(1+1)^3 = 3^6 2^3,\\ \left|\left(\frac{1-i}{4}\right)^{16}\right|^2 &= \frac{1}{4^{16\times 2}}\left(|1-i|^2\right)^{16} = \frac{1}{2^{64}}(1+1)^{16} = \frac{1}{2^{48}}.\end{aligned}$$
On reconnait alors les lignes trigonométriques usuelles :
$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{3}i}{2-2i} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}},\\ (3+3i)^3 &= 3^3(1+i)^3 = 3^3\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 54\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\\ \left(\frac{1-i}{4}\right)^{16} &= \left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}\right)^{16} = \frac{2^8}{2^{2\times 16}}e^{-i4\pi} = \frac{1}{2^{24}}.\end{aligned}$$
On vérifiera bien que les modules trouvés coïncident.

4. Cela est immédiat sur un dessin. Sur une figure, le théorème de l'angle au centre montre que l'angle en -1 dans le triangle $z, -1, 1$ vaut la moitié de $\widehat{z01} = \arg z$, ce qui rend claire la formule à montrer. Pour être propre, on applique la formule précédente au complexe (on note $\theta := \arg z$)

$$(1 + \cos\theta) + i(\sin\theta) = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

   Puisque $\cos\frac{\theta}{2} > 0$, son argument vaut $\frac{\theta}{2}$, lequel doit également valoir d'après la question précédente

$$\operatorname{atn}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{atn}\frac{r\sin\theta}{r + r\cos\theta} = \operatorname{atn}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}, \ \textit{CQFD.}$$

5. On déduit de la question précédente

$$\begin{aligned}
\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 &= \arg(1+2i) + \arg(1+5i) + \arg(1+8i) \\
&= \arg\left[(1+2i)(1+5i)(1+8i)\right] \text{ modulo } 2\pi \\
&= \arg\left[-65 - 65i\right] \\
&= -\frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

   Minute, comment la somme de nombres positifs peut-elle être négative ? Il ne faut pas oublier qu'on raisonne modulo 2π. Puisque le résultat est une somme de trois réels de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on doit trouver un réel dans $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$; le seul qui vaille $-\frac{3\pi}{4}$ modulo 2π est $\frac{5\pi}{4}$.