Annexes
(version chantier)

Marc SAGE

6 mars 2018

Table des matières

1 Rudiments d'épistémologie

Le mot *épistémologie* est fondé sur *épistémé* et *logos* : il s'agit d'un discours sur la connaissance, discours parfois appelé *philosophie des sciences*. Chaque discipline offre en effet un regard connaissant et est en cela une *science*, une philosophie naturelle. Il serait hors de notre propos – et de notre capacité – de toutes les considérer. Nous renvoyons à notre bibliographie pour quelques repères fondamentaux.

1.1 Mythes

Certaines illusions, qui ne concernent pas que la mathématique, se retrouvent dans chaque domaine. La lectrice et le lecteur gagneront beaucoup à lire *L'évolution créatrice* de Henri Bergson (1907).

Pour la mathématique, Idée reçue (Platon ?) :

1. Il existe un *monde mathématique*, formé d'"*objets*" reliés par des "*propriétés*".
2. Il existe une *logique* propre à ce monde, laquelle permet au mathématicien de découvrir ces propriétés à travers des notions de *vérité*, de *conséquence*, de prédication *universelle* (fait de parler de *tous* les objets) et de prédication existentielle.

Ces croyances – car ce sont des croyances – sont respectables en cela qu'elles fournissent un *schéma d'action* pour le mathématicien, éprouvé par la communication avec ses pairs, ainsi qu'un *guide intuitif*, une "vision intérieure[1]" donnant *confiance* à cette action. De façon analogue, il est raisonnable de croire en une réalité[2] (du sens commun) dans laquel nous interagissons. L'action et ce qui la porte sont deux caractéristiquesd du *vivant* et il est essentiel de bien situer la portée de ces croyances.

Ces dernières prennent toutefois un aspect beaucoup plus pernicieux lorsqu'elles sont fossilisées en *dogme*, ce dernier réfutant l'objection facile (comment accède-t-on à ces objets ? à leurs propriétés ?) à l'aide d'une *autre idée reçue* : les objets et propriétés mathématiques seraient *abstraits* de ceux et celles de la réalité [citation Bachelard inverse] (comme l'appartenance d'un point à une droite ou bien la transitivité de l'inclusion), *idéalisant* par là même ces derniers. Cette conception est certainement profitable lors des premières années d'apprentissange de la mathématique traditionnelle (arithmétique et géométrie) où l'idéalisé ressort d'une mathématique primitive, d'une logique pragmatique, d'un bon sens commun. En s'aliénant au réel, la mathématique ne saurait toutefois sur le long terme se déployer pleinement comme elle le fait depuix plus d'un siècle [Dieudonné][gravité]. On ne saurait par ailleurs être dupe : l'idéalisation est un acte *sui generis* propre à chacun et, par conséquent, ne saurait garantir aucune objectivité de l'idéal. Chacun se construit ainsi son "château intérieur[3]", le petit miracle étant qu'un échange mathématique semble concerner les châteaux intérieurs de *chacun* d'entre nous (comme la réalité !).

Néanmoins, bien plus intéressante selon nous la *source* de cette idéalisation : une "connaissance primitive" *sommaire*, *efficace* et *en devenir* – en bref : *vivante*. Ressortant de la réalité commune, elle prête en effet bien moins le flanc aux doutes que ne le fait la réalité mathématique : qui douterait de sa capacité à juger du bon déroulement d'un jeu de cartes, combinatoire d'objets physiques, pour peu que les règles lui fussent expliquées ? de la rencontre de deux personnes parcourant un même chemin en sens opposés, fait dynamique par excellence ? du parallélisme de deux segments d'équerre à un même troisième, constatation banale d'une dynamique figée (ou géométrie) ? Induction finie ? ? ?

cf Gonseth 1935 qui démystifie l'idée reçue d'un monde mathématique et d'une logique idéaux. L'objet est n'est qu'un *préjugé macroscopique*.

Insistons ; ne pas jeter ce mythe ! car il est vivant. Objet = certes être dispensalbes mais fictions indispensalbe.

---

[1] a guiding *insight*

[2] réalité res chose VS Witt faits

[3] Laurent Schwartz

1.2 Certitudes

Une fois déchus les mythes de vérité, d'objet et de causalité mathéamtique, que reste-t-il pour en garantir le *sens* de la démarche mathématique où [Russell] ?

Si l'on va regarder d'autre disciplines, la première chose dont prendre acte est le *caractère vivant* de ses acteurs : des êtres humains mus par la vie, qui imprêgnent de tout leur être chacune de leur action. –> Bergson

La seconde chose est que ce caractère vivant semble toujours revêtir une *forme* : texte écrit lu (lettres son), musique (son, toucher instrument), tableau (pigment), ikebana calligraphie, cuisine, aikido (respiration techniques...). Dans chacun de ces cas apparaît un *formalisme*, donné par

1. un support physique,
2. un jeu d'agencement de ces supports (une *combinatoire*),
3. des règles à ce jeu (une *grammaire*)

L'expression (acte & visée) d'une personne vivante transcende le langage utilisé pour l'exprimer mais elle peut difficiement s'en passer[4]. Elle s'appuie donc sur un formalisme, plus ou moins explicité, plus ou moins exporé, mais jamais figé *ad eternam*. Ce formalisme n'étant en effet qu'un support d'expression & d'action, il doit pouvoir être modfié par les acteurs de chaque discipline selon l'évolution de cette dernière et suivant ses besoins. Selon les **pratiques**, plus ou moins d'importance est accordée à la charpente formelle portant le message. Exemple typique en physique (cf Duhem) utilisant différents "formalismes" mathématiques.

Or *il y a* plusieurs **pratiques** mathématiques, relevant chacun d'une certaine philosophie (*eg* écoles Frege, Brouwer, Hilbert... mix Weyl). De fait, la "crise des fondements" (rappel crise = décision) qui affecta la mathématique du tournant du XX (Berry + Russell) vit émerger une pratique dominante, issu du formalisme hilbertien et entériné plus tard par le groupe bourbakiste. (!!! histoire massacrée!!!), dont nous pouvons nous considérer les héritiers. Ce sont en effet le formalisme de Hilbert et la vision ensembliste de Bourbaki qui soustendent la majeure partie d'aujourd'hui – dont celle de prépa – et ce sont eux que nous présentons à présent. (cela change, heureusement)

1.3 En bref

Résumé :

1. mythe monde mathématique
2. mais vivante intution Gonseth
3. formalisme explore Duhem

Pour concours :

1. Parler philosophie mathématique est aussi dangereux que de parler religion au lycée : à éviter au possible.
2. Dans le doute, feindre un platonisme (position dominante) exploré par la rigueur d'un formalisme.
3. La vérité est l'existence ne sont que des façons de parler, feindre au besoin leur portée métaphysique.

Bilbio indicative pour réfléchir à la place des sciences enseignées en MP :

Les ouvrages de Henri Poincaré (*La science et l'hypothèse*, 1902)
Ferdinand Gonseth (*Les mathématiques et la réalité*, 1936)
Hermann Weyl (*Philosophy of Mathematics and Natural Science*, 1926)
Erwin Schrödinger (*L'esprit et la matière*, 1956)
Pierre Duhem (*La théorie physique – son objet, sa structure*, 1906)
Henri Bergson , (*L'évolution créatrice*, 1907)
Ludwig Wittgenstein (*De la certitude*, 1949-51)
Willam Von Orman Quine (*Du point de vue logique : deux dogmes de l'empirisme*, 1980)
Claude Bernard (*Principes de la médecine expérimentale*, 1947)
David Hume (*Enquête sur l'entendement humain* ,1748)
Gaston Milhaud (*Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*, 1898)
Hans Hanh (*Logiques, mathématiques et connaissance de la réalité*, 1932)

[4](Hadamard tunnel sable pensée mot)

2 Logiques

2.1 Intro

Traditionnellement, la logique étudie le raisonnement et les inférences. Elle se situe au croisement de la philosophie, de l'épistémologie, du langage et des mathématiques. Plus généralement, la logique intervient dans chaque champ de la connaissance en tant que *moyen d'exploration systématisant une certaine façon d'agir constatée* – la mathématique ne fait pas exception. La logique de l'historien n'est pas celle du biologiste, ni celles de l'artisan, du philosophe ou de l'agriculteur.

On peut étudier également la logique dans ce qu'elle a de commun dans ces différentes disciplines (tout en se gardant bien d'idéaliser) : elle sera alors qualifiée de *propositionnelle*, au sens où elle étudie les liens entre propositions indépendemment du contenu de ces dernières. Même à ce niveau, plusieurs logiques émergent (cf Wagner[5]). EG : Frege, Hilbert, Brouwer (Russell, Wittgenstein, Quine)

L'histoire a libéré la mathématique formelle de son attachement à un sens prédéterminé, donnant l'usage du formalisme hilbertien

(nuance : Hilbert visait un contenu pré"exisistant", pas formaliste pur !)

En pratique en prépa :
aucun "fait" mathématique n'est évident (sauf pour soi-même or l'exercice est précisément de communiquer)
il suffit d'expliciter les règles du jeu (évidemment motivées).
Les actes de mathématicien sont :

1. l'affirmation ("on a")
2. l'évocation ("soit a tel que..." Si l'on montre alors l'énoncé $\acute{E}$, on en déduira la quantification universelle $\forall a,\ \acute{E}$)
3. la supposition ("supposons A". Si l'on montre alors B, on en déduira l'implication $A \Longrightarrow B$)

Chaque affirmation doit être *justifiée* : ou bien déduite de précédentes affirmations, ou bien reconnue comme improuvable (et alors appelée axiome). Comment déduire ? Comment "poser" de nouvelles propositions ? Quel "mode de pose" ? quel *modus ponens* ? Affirmer A et affirmer $A \Longrightarrow B$ permet d'affirmer B.

Chaque évocation doit être *légitimée*, ce qui revient à une justification : pouvoir évoquer un a tel que Φ revient en effet à pouvoir affirmer $\exists a, \Phi$. !!! afirmation#évocation !!! Typiquement, montrer la non-vacuité de la classe des a tels que Φ.

Pas besoin pour supposition (ni donc pour évocation visant un énoncé universel) : il doit juste être clair quand termine la supposition (ou l'évocation). Portée du "si" et du "soit

RQ On peut étudier une logique à l'aide d'outil mathématiques en la condant par des objets mathématiques (combinatoire finie)

2.2 Logique des propositions

on se donne trois listes de symboles :

1. une liste *arbitrairement extensible* de **symboles de propositions génériques** (ou "$\mathfrak{variables}$ propositionnelles", beurk), classiquement un alphabet $a, b, c, ..., p, q, r$
2. une liste *arrêtée* de **symboles de propositions singulières** (ou "$\mathfrak{constantes}$ propositionnelles", beurk). Classiquement vrai (T) & faux ($\perp$)
3. une liste *arrêtée*, appelés **symboles de connexion** (ou "connecteurs propositionnels), classiquement $\Longleftrightarrow \Longrightarrow$ $\wedge \vee \neg | \uparrow\downarrow$

1&2 sont appelés **atomes**
(2&3 sont appelés **constantes logiques** (car rien les instanciera))
(2 peut être vu comme connecteurs d'arité nulle)

De **quoi** parle la logique propositionnelles ? De **termes propositionnels** :

ou bien un atome
ou bien un connecteur connectant d'autres termes

[5] Pierre Wagner, *Logique & Philosophie*

EGS :$a \vee \neg a \Longleftrightarrow T \qquad p \wedge \neg p \Longrightarrow \perp \qquad a \vee T \Longleftrightarrow a \qquad (a \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow \neg a \qquad a|b \Longleftrightarrow \neg (a \wedge b)$
Règles de priorité : $\neg \wedge \vee \overset{\Longleftrightarrow}{\Longrightarrow}$ (d'où des parenthèses au besoin)

Comment **évaluer** les termes prop ? Leur attribuer une **valeur de vérité** ?
–> évaluer les atomes & tables pour chq connecteur
EGS : qq axiomes (egs ci-dessus)
EXO : vérifier la "vérité" *des* axiomes

Comment **affirmer** ? Quel rapport avec les valeurs de vérité ?
–> **axiomes** du "calcul propositionel" & **règle** (*modus ponens*)
Puis "théorème" de la déduction : prouver $\mathcal{A}, H \vdash \Theta$ revient à prouver $\mathcal{A} \vdash H \Longrightarrow \Theta$ ("thm" au sens primitif, utilise récurrence primitive)

EXO : mq $\downarrow$ et $\uparrow$ sont les connecteurs universels

Culture : un seul axiome suffit (Wasjberg), de longueur minimale, avec un seul connecteur (Sheffer)

2.3 Logique des prédicats

comme en logique des propositions, on se donne cinq listes :

1. symboles d'**objet singulier**
2. symboles d'**opération** / de **loi**
   (1 peut être vu comme 2 d'arité nulle)
3. symboles de relations
4. symboles d'**objet générique** (ou **quantifiable**)
5. **quantificateurs** (clasiqt $\forall$ et $\exists$) + symboles d'objet générique
   (3 peut être vu comme 5 d'arité nulle)

De **quoi** parle la logique prédictaive ? Ses termes sont des **énoncés** dont les termes se contruisent comme ci-dessus (atomes ou bien loi composant des termes) :

ou bien quantif + énoncé
ou bien relation entre termes
ou bien un connecteur connectant d'autres énoncés

(on garde "terme" pour ce dont parlent les énoncés (et non la logique prédic))

axiomes : à retrouver *via* "théorème" complétude (même si pas constructif)
egs : *spécialsation* $[\forall x, P(x)] \implies P(t)$, *loi de De Morgan* $\neg(\exists x, P(x)) \iff (\forall x, \neg P(x))$

de pair avec axiomes sont les *règles* (on garde le *modus ponens*), surtout celles réglant les évocations :

1. **(généralisation)** *de l'évocation* Soitatq$P(a)$ *puis de l'affirmation* $Q(a)$ *pouvoir affirmer* $\forall x, P(x) \implies Q(x)$
2. *(***l'évocation provient de lexistence***)* de l'affirmation $\exists x, P(x)$ pouvoir évoquer "Soit $a, P(a)$"
3. **(effectivité de l'évocation)** de l'incovation "Soit a tq $\acute{E}$" pouvoir affirmer $\acute{E}$.

3 Théorie des ensembles

Langage pratique pour décrire "lieux de points", "solutions d'équations", "suites et fonctions"... Mais sa véritable profondeur en est l'axiome de l'infini (qui "actualise" l'infini potentiel et permet de manipuler $\mathbb{N}$) : la théorie des ensembles n'est autre qu'une théorie de l'"infini"[6] !

Formellement : langage formé d'un seul symbole de relation $\in$ (l'appartenance). Basta !

(on pourrait en rajouter d'autre *via* axiomes à venir : $\emptyset, \mathbf{N}, \mathfrak{P}, \cup, \{\}$...)

Souhaits intuitifs : pouvoir

1. **(=)** déterminer un ensemble par ses éléments
2. **(extensiona)** mettre des objet en nombre fini dans un sac : $\{a, b, c..., z\}$
3. **(réunion)** intersecter et réunir un ensemble d'enembles
4. **(itération)** pouvoir itérer indéfiniement
5. **(séparation)** pouvoir décrire l'extension d'un concept par *compréhension* (pb : Russell)
6. **(choix, remplacementt)** de $\forall a \in A,\ \exists b,\ P(a, b)$ parler d'une *fonction* $f : A \longrightarrow ?$ tq $\forall a \in A,\ P(a, f(a))$

Carte axiomatique

1. l'axiome d'extenstinatlité assure que deux objets "égaux" vérifient les mêmes énoncés
2. tous les autresaxiomes sonts des axiome *existentiels*, donc de *création*. La création peut être
   (a) univoque/fonctionnelle $\exists! A, P_A$ (svt décrite par **compréhension** !), ce qui donne des "opérateurs" ensemblistes
   (b) lâche/sauvage $\exists$

création existence	*fonctionnelle* (images décrites par **compréhension**)	*plurivoque* sauvage
axiomes	paire, h-extens séparation union, partie remplacement (*opérateurs ensemblistes*)	itération fondation AC

(il convietn de rajouter l'opérateur "constant" $\emptyset$, qui peut se voir comme 0-extension, de même les axiomes d'itération peuvent facilement engendrer des opératuers "ensemble des itérés de...par...")

3.1 extensionalité, séparation, vide

La "méthode de double-inclusion" est la définition de l'égalité ensembliste :

$$A = B \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall e,\ e \in A \Longleftrightarrow e \in B$$

RQ/EXO : deux objets vérifiant les même énoncés[7] sont égaux au sens ci-dessus. Réciproquement, quand on tente de s'assurer[8] que deux ensembles égaux vérfient les mêmes énoncés, on tombe irrémédiablement sur l'énoncé suivant, dont on aimerait bien disposer et qui est du coup érigé en axiome :

Axiome d'extensionalité. *Quand deux ensembles contiennent les mêmes éléments, ils appartiennent aux mêmes ensembles :*

$$[a = b] \implies [(a \in E) \iff (b \in E)].$$

h-Corollaire (égalité et substitution). *Pour chaque* 1*-prédicat* P*, on a l'implication*

$$[a = b] \implies [P(a) \iff P(b)].$$

AInsi, un ensemble peut être décrit par un prédicat : *lui appartenir.* (En conséquence, deux ensemble E tq $\exists E,\ [e \in E \Longleftrightarrow P(e)]$ seront égaux, d'où unicité dans bp d'axiomes à suivre.)

[6] Une référence fraîche en la matière est *La théorie des Ensembles* de Patrick Dehornoy (2017)
[7] càd "égaux" au sens de Leibniz (on pourrait dire indistinguables)
[8] par induction sur la complexité de l'énoncé considéré

Réciproqe ? est-ce que chaque prédicat décrit un ensemble ? Si oui, le prédicat "ne pas s'appartenir à soi-même" engendre l'ensemble $\Omega := \{e\ ;\ e \notin e\}$, d'où les équivalences $\forall a,\ a \in \Omega \Longleftrightarrow a \notin a$ et la contradiction en spécialisant $a \leftarrow \Omega$ (argument de Russell). Une échappatoire[9] est de limiter la prédication *dans un ensemble déjà existant* :

Axiome de séparation. *Pour chaque* 1*-prédicat* P*, on dispose de l'énoncé*

$$\forall A,\ \exists A',\ [a \in A'] \iff [(a \in A) \wedge P(a)] .$$

Intuitivement, on *sépare* dans l'ensemble A les a qui vérifient la proposition P et ceux qui ne la vérifient pas. On notera

$$A' = \{a \in A\ ;\ P(a)\} .$$

et la notation $\{x\}_{P(x)}$? Par exemple $\{x^2\}_{x\geq 0}$. *On met d'ailluer la précistion* $P(x)$ *où on veut, à droit à gauche, dedans... tant que c'est clair.*

Lorsqu'on décrit un ensemble A de la sorte selon les propriétés que vérifient ses éléments, on dit que l'on décrit A ***par compréhension***.

Y a-t-il des ensembles ? Le langage ensembliste n'ayant pas de symbole d'objet singulier, il nous faut pouvoir évoquer un ensemble si l'on veut parler de quelque chose ! Ou bien la logique sous-jacente le permet (grâce à un axiome $\exists o, T$ oùT tautologiue), ou bien on rajoute un axiome pour cela. Dans tous les cas, étant donné un ensemble A, on sépare $\emptyset := \{a \in A\ ;\ a \neq a\}$ et l'on vérifie ce $\emptyset$ ne dépend pas du A donné.

axiome d'existence il y un ensemble, que l'on peut alors imposer sans élément

$$\exists \emptyset,\ \forall e,\ e \notin \emptyset$$

Résumé informel :

1. deux ensembles sont égaux ssi ils sont mêmes éléments et sont alors indistinguables ;
2. chq prédicat détermine une *classe* (décrite alors par *compréhension*) mais pas tjs un ensemble
3. est un ensemble l'intersecvtion de chaque classe avec chaq ensemble
4. on peut rajouter au langage ensmebliste un symbole d'objet singulier $\emptyset$ "*ensemble vide*".

3.2 paire, singleton, union

Axiome de la paire. *On peut toujours mettre dans un même sac deux ensembles donnés :*

$$\forall a,\ \forall b,\ \exists \{a, b\},\ (e \in \{a, b\}) \iff (e = a \text{ ou } e = b) .$$

Un tel $\{a, b\}$ est unique par ce qui précède : on parle de la ***paire*** formée des éléments a et b.

Puisque le « ou » est commutatif, on a

$$\{a, b\} = \{b, a\} .$$

Il faut retenir de cela qu'*a priori il n'y a pas d'ordre dans un ensemble*

COR (singleton). *On peut toujours mettre un ensemble* a *donné dans un sac* $\{a\}$ *:*

$$(e \in \{a\}) \iff (e = a) .$$

Il suffit de prendre la paire $\{a, b\}$ avec $a = b$, appelé ***singleton***

$$\{a, a\} =: \{a\}$$

EXO *le singleton préserve l'égalité :*

$$a = b \Longleftrightarrow \{a\} = \{b\}$$

[9] pas la seule ! (théorie des types...)

EXO (couple) : on abrège $\binom{x}{y} := \{\{x\}, \{x,y\}\} =: \langle x, y\rangle$. *Montrer les équivalences*

$$\left\langle \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix} \right\rangle \iff \left\{ \begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix} \right.$$

Remarque. Paire est un axime de création par "agrégation". Si l'on veut en agréger trois, mettons a, b, c, on peut essayer en pairant $\{a, b\}$ avecc c, mais cela donne la paire $\{\{a, b\}, c\}$. Pour faire disparaître l'enveloppe de $\{a, b\}$ à l'intérieur de cette dernière paire, on va utiliser l'axiome *de l'union*.

Axiome de l'union[10]. *Étant donné un ensemble, on peut vider tous ses éléments dans un même sac* :

$$\forall A,\ \exists (\cup A),\ [e \in \cup A \iff (\exists a \in A,\ e \in a)].$$

$\cup A$ est appelée l'***union*** de A ; il s'agit de l'ensemble des éléments *des éléments* de A. L'axiome de l'union permet ainsi de "creuser dans" A.

Rq (lien avec réunion) : l'union de A est la "réunion" de ses éléments ($\cup A = \bigcup_{a \in A} a$).

COR (ensembles décrits par extension) *il y a un ensemble $\{a, b, c, ..., z\}$ contenant exactement une h-suite d'ensembles $a, b, c, ..., z$ donnés :*

$$\forall a, b, ..., z,\ \exists \{a, b, , ..., z\},\ [\xi \in \{a, b, ..., z\}] \iff [\xi = a \text{ ou } \xi = b \text{ ... ou } \xi = z].$$

Observer pour cela que les axiomes de la paire et de l'union donnent existence successivement aux ensembles

$$\begin{array}{rcl} \cup \{\{a, b\}, \{c\}\} & = & \{a, b, c\} \\ \cup \{\{a, b, c\}, \{d\}\} & = & \{a, b, c, d\} \\ \cup \{\{a, b, c, d\}, \{e\}\} & = & \{a, b, c, d, e\} \\ \cup \{\{a, b, c, d, e\}, \{f\}\} & = & \{a, b, c, d, e, f\} \\ & \cdots & . \end{array}$$

On pourrait appeler $\{a, b, c\}$ un ***trio***, $\{a, b, c, d\}$ un ***quatuor***... (mais que dire d'un ***duo*** ?)

Lorsqu'on décrit un ensemble A de la sorte $\{a, b, ..., z\}$ en « étendant » tous ses éléments comme sur une corde à linge, on dit que l'on décrit A ***par extension***.

COR/DEF (réunion de plusieurs ensemble) La ***réunion*** $A \cup B \cup \cdots \cup Z := \cup \{\{A\}, \{B\}, ..., \{Z\}\}$ vérifie

$$\forall x,\ [x \in A \cup B \cup \cdots \cup Z] \iff [(x \in A) \vee (x \in B) \vee \cdots \vee (x \in Z)].$$

(noter la ressemblance graphique entre les symboles $\cup$ et $\vee$).

EXO technique (graphe[11]) *Soient A, B, G tq$\forall\ c \in G$, $\begin{matrix} \exists a \in A \\ \exists b \in B \end{matrix}$, $c = \binom{a}{b}$. Mq $\cup \cup G \subset A \cup B$.*

Résumé informel : on peut rajouter au langage ensembliste

1. des symboles de loi $\{\}$ *"ensemble contenant comme éléments"* de chq arité : (vide,) singleton, paire, trio... Dans cette description dite en *extension*, il n'y a ni ordre ni répétition.
2. un symboles de loi binaire $\langle\rangle$ "*couple*" qui prend en compte et l'ordre et la répéition
3. un symbole de loi binaire $\cup$ "*réunion*"

(le symbole de loi singulaie $\cup$ "réunion des éléments" est inusité en prépa)

[10] De manière plus informelle, si A est le coffre de votre voiture rempli de sac de courses, l'union de A va être l'ensemble des courses (on vide les éléments du coffre puis on rassemble les courses ainsi privées de leurs sacs respectifs).

[11] Le *G*raphe est un ensemble de *c*ouples

3.3 parties

Axiome des parties. *Étant donné un ensemble, on peut mettre ses parties dans un même sac :*

$$\forall A,\ \exists \mathfrak{P}(A),\ [P \in \mathfrak{P}(A) \iff P \subset A].$$

$\mathfrak{P}(A)$ est appelé ***ensemble des parties***[12] de A. Par exemple :

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\ \mathfrak{P}(\{a,b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.\end{aligned}$$

En d'autres termes, *la classe des parties d'un ensemble donné est un ensemble.*

Parie est un axiome de *création externe*, qui augement brutlamenet la taille (comme on le voit sur les ensmble finis où n devient 2^n)

EXO : *mq* $\mathfrak{P}$ *ne fixe personne*[13].

EXO *pour chq ensemble* A *mq*[14]

$$\cup \mathfrak{P}(A) = A \subset \mathfrak{P}(\cup A)$$

avec = *dans l'inclusion de droite ssi* A *peut s'écrire* $\mathfrak{P}(E)$ *pour un ensemble* E

EXO : *mq* $\mathfrak{P}^n(E) = \mathfrak{P}^n(F) \iff E = F$ (où n entiers)

EXO technique : mq $\langle a, b\rangle \subset \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\{a,b\}) \subset \mathfrak{P}^3(a \cup b)$

RQ technique (couples, produit cartésien, fonctions, applications). Si l'on code une fonction $A \longrightarrow B$ par un couple $\left\langle {}^{\langle A,B\rangle}_{G} \right\rangle$ où G est son graphe $\left\{\left\langle {}^{a}_{f(a)} \right\rangle\right\}_{a \in \mathrm{Dom}\, f}$, on a alors les inclusions ${}^{\langle A,B\rangle}_{G} \subset \mathfrak{P}^3(A \cup B)$, d'où $\left\langle {}^{\langle A,B\rangle}_{G} \right\rangle \subset \mathfrak{P}^6(A \cup B)$: une fonctoin $A \longrightarrow B$ tmbe donc dans $\mathfrak{P}^6(A \cup B)$. Réciproquement, on peut séparer dans ce dernier les $\left\langle {}^{\langle A,B\rangle}_{G} \right\rangle$ où G est fonctionnel, d'où sens à l'ensemble $\mathrm{Fonc}(A, B)$ et (en séparant les fonctions définie sur tout A) à B^A.

Résumé informel :

1. on peut rajouter au langage ensembliste un symbole de loi singulaire $\mathfrak{P}$ "*ensemble des parties*"
2. font sens les *produits cartésiens* $\{\langle a, b\rangle\}_{b \in B}^{a \in A}$, les *ensembles de fonctions* $\mathrm{Fonc}(A, B)$ et *ceux d'applications* B^A.

3.4 itération, infini

Guide : entiers code notre *action*. Action illimité <–> pas d'obstcle à l'action <-> on peut toujours agir. On code donc l'infini par un ensemble stable par une action (çàd une fonctionnelle σ) et contenant un point de départ o :

$$\mathit{Itérat}_o^\sigma <:=> \exists I,\ [o \in I] \text{ et } [i \in I \implies \sigma(i) \in I]$$

Pour éviter les I fini, en outre il faut que σ n'atteigne pas o (pour éviter un cercle) et soit injective (pour éviter une boucle après o).

axiomes de l'infini. Pour chaque fonctionnelle σ (partout définie),

$$\forall o, \begin{cases} \sigma \text{ "injective"} \\ \nexists a,\ o = \sigma(a) \end{cases} \implies \mathit{Itérat}_o^\sigma$$

On définit alors $\mathbf{N}$ comme l'intersection des infini pour[15] $o = \emptyset$ et $\sigma := a \mapsto a \cup \{a\}$, on montre le théorème de récurrence puis celui d'itération :

$$\forall A, \begin{cases} \forall f \in A^A \\ \forall @ \in A \end{cases},\ \exists! a \in A^{\mathbf{N}}, \begin{cases} a_0 = @ \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \text{ où l'on a abrégé } n+1 := s(n),$$

[12] La lettre P est un P gothique ("**p**" pour "**p**arties").

[13] Si $A = \mathsf{P}(A)$, alors (séparation) la partie $@ := \{a \in A \ ;\ a \notin a\}$ vérifie $\forall a \in A,\ a \in @ \iff a \notin a$, d'où contradc en spécialisant $a \leftarrow @$.

[14] Noter que P et $\cup$ agissent d'une certaine manière en sens contraire. P « monte » en rajoutant une accolade tandis que $\cup$ « descend » en retirant une accolade.

[15] Zermelo l'appelait *axiome de Dedekind* (source : *La création des nombres* H. Sinaceur, Vrin)

Réciproquement, on pourrait montrer que chq triplet $(\mathbf{N}, o, s)$ donnant sens et véfiriant le th ci-dessus vérifie [σ "injective", σ n'atteitn pas o et $\mathbf{N}$ est le plus petit I tq $[o \in I]$ et $[i \in I \implies \sigma(i) \in I]$].

Quelle que soit l'approche, on établit chaque $Itérat_o^\sigma$ avec $I := \{\sigma^{\circ n}(o)\}_{n\in\mathbf{N}}$ (pour donner sens à I, on va devoir utiliser l'axiome remplacement à suivre)

Culture : axiome infini nécessaire si l'on veut modéliser des ensembles infini (car $\mathbb{N}$ ou encore V_ω peuvent modéliser les ensembles sans axiomes de l'infini).

Résumé informel :

1. fait sens *l'ensemble des itérés* de chq objet par chq "application" ensembliste
2. on obtient un ensembles d'itérés *infini* lorsque la loi est injective et évite l'objet de départ (eg itérer $\emptyset$ par $a \mapsto a \cup \{a\}$ engendre $\mathbf{N}$)
3. on peut rajouter au langage ensmebliste un symbole d'objet singulier $\mathbf{N}$ "*ensemble des entiers naturels*"

3.5 remplacement & choix

Rappel souhait initial (*cf* premier section) : d'existences "fonctionnelles" $\forall a \in A,\ \exists b,\ P_a^b$ on veut pouvoir effectivement parler d'une vraie *fonction* $f : A \longrightarrow ?$ tq $\forall a \in A,\ P_a^{f(a)}$ (peu importe alors l'ensemble but).

Soit E ensemble, comment engendrer la réunion des E^n qd n décrit $\mathbf{N}$? On peut séparer dans $\text{Fonc}(\mathbf{N}, E)$ les fonctions dont le domaine est fini. Comment engendrer le produit cartésien des E^n ? Problème... dans quel "gros" ensemble séparer ? Et pour revenir à la réunoin (et aux axiome de l'infini), quel sens donner à $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{P}^n(\emptyset)$?

Plus génralement, si l'on dispose pour chq indice $i \in I$ d'un ensemble a uniquement défini par une propriété $f(i,a)$, on a fortement envie de considérer l'ensemble $\{a_i\}_{i\in I}$ où l'on a remplacé dans I chaque i par le a tq $f(i,a)$

Axiomes de remplacement[16]**.** *Pour chaque* 2*-prédicat* F *:*

$$\begin{aligned}&\text{si } \forall A,\ \left[\forall a \in A,\ \exists^{\leq 1} b,\ F_a^b\right]\\ &\text{alors } \exists B,\ \forall b,\ \left[b \in B \iff \exists a \in A,\ F_a^b\right].\end{aligned}$$

(la notation F_a^b est à comprendre intuitivement comme « b est l'image de a par une fonction f ».)

On en déduit une *fonction* $f : \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & \text{le } b \text{ tel que } F_a^b \end{array}\right|$. En d'autres termes, en *remplaçant* dans A chaque élément par son image, on obtient encore un ensemble. Les axiomes de remplacement disent donc que l'image d'un ensemble par une « fonction » est encore un ensemble.

En pratique les 2-prédicats F ci-dessus sont définis sur tout A, ce qui permet de parler d'une *application* $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & \text{le } b \text{ tel que } F_a^b \end{array}\right|$ (ou de la famille $\left(\text{le } b \text{ tel que } F_a^b\right)_{a\in A}$). On parlera donc directement (et préférablement) d'application au lieu de 2-prédicats. Merci remplacement !

COR (réunion & produit cartésien) Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles est (rappel) une application $\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A \\ i & \longmapsto & A_i \end{array}\right|$, on peut donc séparer dans le but A la réunion $\bigcup_{i\in I} A_i := \{a \in A\ ;\ \exists i \in I,\ a \in A_i\}$. On peut alors séprare dans $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^I$ les familles (a_i) tq que $\forall i, a_i \in A_i$, lesquelles forment le produit cartésien $\prod_{i\in I} A_i$.

EXO : *mq remplacement implique sépartatoin*

EXO : *mq remplacement & partie impliquent paire (et extension finie)*

[16] introduit par Fraenkel (d'où le Z dans ZFC) & Skolem (indépendamment), c'est surtout Von Neumann qui en a remarqué l'intérêt dans la théorie des ordinaux (citer Michael Halett *Cantorian set theory dans limitations of size*)

EXO *: mq remplament & union équivalent à*[17] *pour chaque* 2-préd P

$$\forall A,\quad \begin{array}{l} \forall a\in A,\ \exists B,\ \forall b,\ \left(b\in B\Longleftrightarrow P_a^b\right) \\ \Longrightarrow \exists B,\ \forall b,\ \left(b\in B\Longleftrightarrow \exists a\in A,\ P_a^b\right) \end{array}$$

Question : on remplace le "au plus" par un "au moin" dans l'hypothèse de remplacement

$$\forall a\in A,\ \exists^{\geq 1} b\in B,\ P_a^b.$$

Y a-til au moins une application $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & \text{un } b \text{ tel que } P_a^b \end{array}$? Une telle application est exactement un processus de *choix* d'un b tq..., d'où le nom AC.

Axiome du choix (version échange de quantif). *Pour chq* 2*-prédicat,*

$$\begin{array}{rcl} \text{si } \forall a & \in & A,\ \exists b\in B,\ P_a^b, \\ \text{alors } \exists b & \in & B^A,\ \forall a\in A,\ P_a^{b(a)} \end{array}$$

En pratique, $A=\mathbb{N}$ et AC permet d'affirmer l'existece de suites. Appraît donc en analyse. (Lorsque A est fini, AC est un *fait*).

RQ **(AC version distribut** $\wedge\vee$**)** Qd A et B sont **h-finis**, on peut expliciter $\left\{\begin{array}{l} \forall a\in A = \text{conjonction} \bigwedge_{a\in A} \\ \exists b\in B = \text{disjonction} \bigvee_{b\in B} \end{array}\right.$. Or on sait développer $\bigwedge_{a\in A}\bigvee_{b\in B} P_a^b$ (comme un produit de sommes $\prod_{a\in A}\sum_{b\in B} f\binom{a}{b} = \sum_{b\in B^A}\prod_{a\in A} f\binom{a}{b(a)}$) : on choisit dans chaque disjonction (çàd pour chaque a) un P_a^b (çàd un b), on les conjoint (qd $a$décrit$A$) et on disjoint sur tous les choix possibles, ce qui donne $\bigvee_{b\in B^A}\bigwedge_{a\in A} P_a^{b_a}$. AC est donc une généralisatio infinie de cette distribut.

RQ AC n'est pas un axiome de création d'ensemble "*externe*" (comme remplacement ou partie) : il crée un ensemble dans un truc déjà créé (la puissance B^A).

EXO[18] *Mq AC équivaut à non-vacuité de produit cartésien*[19] *de chq famille d'ensembles non vides* ($\prod A_i = 0$ *ssi* $\exists i,\ A_i=0$).

EXO : mq AC équivaut à l'existence d'application de choix :

$$\forall E,\ \forall \mathcal{A}\subset \mathfrak{P}(E)\backslash\{\emptyset\},\ \exists c\in E^{\mathcal{A}},\ \forall A\in\mathcal{A},\ c(A)\in A$$

En pratique, on utilise svt ces applications de choix sans s'en rendre compte !

Puisque AC est vérifié pour les ensembles finis, sa véritable substance n'apparît qu'avec l'infini[20], et déjà le dénomrable. D'ailleurs, il faut l'axiome du choix pour démontrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. AC a des conséquences agréables (exsitence de bases, d'idéaux maximaux, de bons ordres) et d'autres contre-intuitives (paradoxe de Dougherty et Foreman), son utilisation reste une décision du mathématicien à l'oeuvre[21] (comme d'ailleurs tous les autres !).

Résumé informel :

1. on peut intervertir les quantif $\forall$&$\exists$ *conformément à l'intuition des fonctions* :

$$\left[\forall a\in A,\ \exists b\in B,\ P_a^b\right] \Longrightarrow \left[\exists b\in B^A,\ \forall a\in A,\ P_a^{b(a)}\right]$$

2. étant donnés des ensembles, on peut parler de leur *réunion* et de leur *produit cartésien*

[17] axiome énoncé dans Bourbaki

[18] ce qui amena Russell à le baptiser ***"multiplicative axiom"***

[19] Comparer : remplacement livre l'*existence* du pc, AC sa non-vacuité

[20] l'argument selon lequel l'axiome du choix devrait être vrai par extrapolation du fini à l'infini est en soi un argument très faible. Car l'infinie actuel a justement été créé par le coup de force consistant à dire que désormais on considérerait comme irrémédiablement fausse la propriété, vraie dans le domaine des collections finies, selon laquelle il ne peut y avoir d'application bijective d'une partie stricte de E sur E lui-même (le tout est plus grand que la partie). Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 143)

[21] *cf.* son rôle en analyse dans *Handbook of Analysis and its Foundations* d'Eric SCHECHTER publié en 1997

3.6 fondation

Prenons un ensemble A non vide. On peut y prendre un élément a. Si a est non vide, on peut regarder un élément α de a. Puis on peut recommencer tant que l'on atteint pas $\emptyset$. L'axiome de fondation affirme que ce procédé s'arrête toujours au bout d'un nombre fini d'étapes, *i.e.* qu'en zoomant successivement sur les éléments des éléments des éléments des..., on tombera toujours sur l'ensemble vide. En d'autres termes, lorsqu'on « creuse » dans un ensemble, on finit toujours par tomber sur une « fondation » (l'ensemble vide).

Fondation borne donc la création verticale *descendante* de union. On le formule de manière indirecte :

axiome de fondation[22]. Chaque ensemble non vide contient un élément disjoint de lui :

$$\forall A \neq \emptyset,\ \exists a \in A,\ A \cap a = \emptyset.$$

COR (pas d'auto-appartenance[23]) On en déduit en particulier (imposer $A = \{e\}$)

$$\forall e,\ e \notin e.$$

EXO : *mq (avec AC) que fondation équivaut à "il n'y pas de suites u décroissantes pour $\in$"*
(ni donc de $\in$-cycles)

Culture L'axiome de fondation permet de montrer que chaque ensemble peut s'obtenir de la manière suivante. On part de l'ensemble vide $\emptyset$, que nous noterons V_0, puis on prend son ensemble des parties $\{\emptyset\}$, noté V_1, puis on pose de proche en proche $V_{n+1} = \mathfrak{P}(V_n)$. Pour continuer, en notant ω l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on définit (*via* remplacement[24]) $V_\omega := \bigcup_{n\in\omega} V_n$ puis de proche en proche $V_{\omega+n+1} = \mathfrak{P}(V_{\omega+n})$. Et ainsi de suite. La théorie des ordinaux (donc nous ne parlerons pas ici) permet d'assurer l'existence d'une telle suite (V_α) où α décrit les ordinaux, et l'axiome de fondation peut alors s'écrire

$$\forall e,\ \exists \alpha \text{ ordinal},\ e \in V_\alpha.$$

Résumé informel :

1. l'appartenance ne boucle jamais

4 Guide de rédaction

Trois exemples que l'on peut recontrer :

1. un réel est positif ss'il est un carré
2. dans un ev de dim finie, toutes les normes sont équivalentes
3. p est pair, donc s'écrit $2n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

PBS

1. "un réel" : qcq ? au hasard ? arbitraire ? aléatoire ? Le sens est **chaque** (et pas dans "un carré")
2. "toutes" : il n'y a pas "*toutes* les normes", on n'en a pas besoin –> utliser **chaque**.
3. qui est n ? Préciser **pour un certain** n : affirme l'existence d'un tel n ET en évoque un.

Reformulation univoques :

1. *Chaque réel est positif ssi c'est un carré.*
   (Impossible de couper « [Chaque réel est positif] ssi c'est un carré » sinon sujet non défini.)
   Soit a un réel. Alors a est positif ssi a est un carré
   $\forall a \in \mathbb{R},\ a \geq 0 \iff [\exists r \in \mathbb{R},\ a = r^2]$

[22] axiome du à Von Neumann, quand il travaillait sur les ordinaux, d'où la lettre V à venir

[23] Fondation résoud autrement le paradoxe de Russel : il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles, sinon ce dernier devrait s'appartenir

[24] Couplé à union et partie, remplacement permet la *création verticale* vertigineuse des ordinaux. **Culture** : $V_{\omega+\omega}$ est modèle de ZF sans remplacment, donc on a besoin de remplcament pour grimpsr dans les V_α (sinon on bloque pour considérer $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} V_{\omega+n}$)

2. *Dans chaque ev de dim finie, chaque norme est équivalente à chaque autre.*
   (abus usuel et pratique : deux normes *quelconques* sont équivalentes)

Que dire alors de "pour tous réel a et b" ?
= pour tout réel a, pour tout réel b (éviter "tout")
= pour chaque réel a, pour chaque réel b
= pour **chaques** (incorrect mais pratique)

4.1 Def, abréviation, affirmation

DEF LITT
noms communs On appelle [nom] tout...
nom propre On appelle [**le/la** nom] le/la...
qualificatif (prédicat singulaire) L'objet a est *qualifié* de [adj] si... (voire *dit* [adj] si...)
relation (prédicat d'arité > 1) On *dit que* [groupe verbal] si... Les objets a et b sont dits [adj] si...

DEF ABREVIA $a := b$ $A \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} B$ (à inventer <:=>)

le caractère [adj.] = le fait d'être [adj.]
le caractère [adj.] de [sujet] = le fait que [sujet] soit [adj.]
eg boundedness = "bornitude" horrible !

RELATION LOGIQUE négation$\neg$ conjonction$\wedge$ disjonction/alternation$\vee$ implication$\Longrightarrow$ équivalence$\Leftarrow$ $\wedge$universelle$\forall$ $\vee$universelle$\exists$
RELATION BINAIRE
appartenance$\in$ inclusion$\subset$ divisibilité$|$ maj/minoration$\leq\geq$ comparaison égalité$=$ distinction$\neq$ tendance$\longrightarrow$ inégalité/comparaison/ordination équivalence$\sim$ domination négligeabilité similitude tendance
RELATION SINGULAIRE
convergence sommabilité (au-plus-)dénombrabilité (in)finitude intégrabilité dia/trigonalisabilité (positive) homogénéité densité compacité connexité par arcs convexité continuité (uniforme) lipschitzianité

les *accolades* abrègenet une *conjonction* : $\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} \right.$ abrège $A \wedge B$.
Sauf cas explicite : $\left\{ {}_{\text{ou}} \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} \right.$ abrège $A \vee B$.

4.2 Liens du discours

alors : après la mise en place d'un *cadre/contexte*, typiquement résultant d'un **ACTE** : subsitutation dans $\forall$, multiplication d'égalité, addition de comparaison...

donne, livre, fournit (alors...)

Si / pour chq : portée = fin de phrase (voire de sous-phrase)
Supp & *Soit* : portée plus longue, implicite

, d'où +NOM
= on en déduit/tire
= ; il en résulte
= ; il s'ensuit

éviter (JP Serre[25]) symbole tout seul –> **liste noms**
(a est dgb –> *La matrice* a est dgb ;

[25] *How to write mathematics badly*

on a $f \longrightarrow 0$ -> on a *la tendance* $f \longrightarrow 0$)

Comme...~~*alors*~~ -> *puisque, vu que*

Ayant A, on a B
= vu qu'on a A, on a B
= On a A, *donc* (*par csqt*, *subsqmt*) on a B
a fortiori, *en particulier*, *à plus forte raison* (=donc plus fin) (EG la marice a est donc nulle, *a fortiori* scalaire)

car / *en effet* : réservé aux justif **brèves** (car remonte le sens du discours logique)

On a $\substack{\textit{d'une part} \\ \textit{d'autre part}}$: argumention **parallèle** (non à la suite)
par ailleurs / *or* / *en outre* / *de plus* : rejoint le discours principal comme une rivière rejoint le fleuve.

CQFD $\neq$ ce qui conclut : une preuve ne finit par tjs par ce qu'il fallait *initialement* établir.

4.3 Quantif universelle $\forall$

l'énoncé universel $\forall a,\ t = \tau$ -> pour préciser, on pourrait parler de "conjonction universelle d'égalités" mais trop lourd. On tolérera donc
"les égalités $\forall a,\ t = \tau$" ou "les minorations $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 \geq 0$"

/pour tout/ = pour **chaque**
/pour tous/ = pour chaques (si ça existait)
tels... *forment/constituent* tel ensemble...
les a sont les b <=> l'ensemble des a est égal à celui des b (prolonge "les objets sont a et b")
(même si "les a" ou "les b" est une fiction -> $\nexists$ tous les entiers !)

$\forall a, b, c \in E$ abrège $\forall a \in E,\ \forall b \in E,\ \forall c \in E$, ou encore $\begin{array}{l} \forall a \in E \\ \forall b \in E \\ \forall c \in E \end{array}$ (pas d'accolades)
idem pour $\exists$

4.4 évocation, supposition, imposition

supposer : sert à établir une **implication** (le raisonnement « Supposons A, ... on a alors B » montre l'implication $A \Longrightarrow B$). **On peut supposer !** En pratique, surtout pour

1. **nier** : afin d'établir la négation $\neg A$ (équivalente à $A \Longrightarrow \perp$) on suppose A et l'on dérive alors une contradiction (preuve *de* l'absurde, et non *par* l'absurde !)
2. raisonner par **disjonction des cas** : le raisonnement « Supposons A... on a alors Θ ; supposons B... on a alors également Θ ... supposons Z... on a alors Θ » montre l'implication $A \vee B \vee \cdots \vee Z \Longrightarrow \Theta$, d'où la thèse Θ (si on a par ailleurs l'antécédent $A \vee B \vee \cdots \vee Z$)
3. raisonner ***par* l'absurde** : « Supposons par l'absurde $\neg A$ » abrège « Supposons $\neg A$ (avec intention de dériver une contradiction, ce qui montrerait la négation $\neg(\neg A)$, d'où l'on déduirait A **avec le tiers-exclu**) ».
4. conduire une **analyse** : aucune valeur "prouvale" mais grande valeur heuristique

imposer : **svt a posteriori** (typiquement dans les énoncés/preuves de cours).
chaque imposition doit être *légimitée*, *permise jusitifée* (pas ~~*prouvée*~~ ! non sens)

évoquer (*fixer*, *se donner*) : **soit a tq [imposition]** Pourquoi évoquer ?

Pour montrer $\forall a, P_a \Longrightarrow Q_a$,
on évoque un $a \in A$ *tel que* P_a
et on montre pour ce a *la conclusion* Q_a

SEUL CAS où imposition tjs légitime (pourrait se justifier en regardant axiomes&règles de la logique prédicative)
EG : évocation "Soit $a \in A$" permise si la non-vacuité de A est *démontrée/prouve/montrée/établie*

« d'où un a tq P_a » : signifie « d'où l'existence $\exists a, P_a$ et l'on évoque alors un tel a »

« Soit par l'absurde $a \in A$ » abrège

« Supposons par l'absurde A non vide :
on peut alors (et on le fait !) évoquer un $a \in A$. »

Soit $a \in A$: on a alors les égalités...
= On a à $a \in A$ fixé les égalités...
= Vu à $a \in A$ fixé les égalités...
= On a pour chaque $a \in A$ les égalités...
= Ayant "$\forall a \in A, ... =$", ...
= Étant donné un $a \in A$, on a les égalités...

affirmer $\exists a$ n'est pas évoquer un tel a !!!

ABUS def / évoc :
soit s un endomorphisme de carré Id –> c'est une propriété
soit E de dimenion finie n–> c'est une déf !!! il suffirait de préciser

« Soit E ddf *dont on note n la dimension* »

soit a cv de limite l –> ? ? ?
PT si l évoqué ; si on veut DEF, mieux vaut écire

"soit a cv *dont on note l la limite*".

ABUS def / évoc : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On devrait dire Soit $c \in \mathbb{R}^2$ dont on note a (resp. b) l'image par la projection sur la 1re (resp. 2e) coordonnée.
Juste milieu : soit $c =: (a, b) \in \mathbb{R}^2$.