convexité
(reliquat)

Marc SAGE

28 février 2018

Table des matières

1 Adhérence d'un intervalle privé d'un ensemble fini

Soit donc $z \in Z$ (si Z est vide, il n'y a rien à faire) : si l'on peut écrire $z = \lim a_n$ pour une suite a à valeurs dans $I \setminus Z$, la positivité des $g(a_n)$ (qui découle de ce qui précède) et la continuité de g (impliquée par sa convexité) donneront en appliquant $\lim_{n\to\infty}$ la positivité de $g(\lim a_n) = g(a)$, ce qui conclura

Puisque Z est fini d'après le point (1b) et non vide (il contient z), le réel strictement positif $\mu := \min_{a\in Z}^{a\neq z} |a-z|$ fait sens et l'intervalle $]z-\mu, z+\mu[$ ne rencontre pas Z : en effet, l'élément $z \in Z$ serait sinon à une distance $<\mu$ d'un autre élément $a \in Z$, contredisant la définition de μ. Selon que z soit à l'intérieur de I ou soit l'une de ses bornes, l'un des intervalles $]z-\mu, z[$ ou $]z, z+\mu[$ est inclus dans $I \setminus Z$, donc l'une des suites $\left(z+\frac{\mu}{n}\right)$ ou $\left(z-\frac{\mu}{n}\right)$ est à valeurs dans $I \setminus Z$, ce que l'on voulait.

2 Holder gén

Soit ν un naturel, soient $a, b, \ldots z \in \mathbb{R}_+^\nu$ et soient $A, B, \ldots Z \geq 0$ des réels de somme 1 (le nombre de lettres $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \cdots, \frac{z}{Z}$ est quelconque). On a alors la comparaison (dite de Hölder)

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} a_\iota^A b_\iota^B \cdots z_\iota^Z \leq \left(\sum_{\iota=1}^{\nu} a_\iota\right)^A \left(\sum_{\iota=1}^{\nu} b_\iota\right)^B \cdots \left(\sum_{\iota=1}^{\nu} z_\iota\right)^Z.$$

3 Log-convexité générale, définie par des comparaisons

Les comparaisons suivantes peuvent être prises comme définition plus générale de la log-convexité et imposent (pour faire sens) la positivité de f dès que I est infini. De plus, on montrerait aisément qu'un tel f log-convexe ne peut s'annuler sur I sans être nul sur tout l'intérieur $\mathring{I}$, ce qui limite grandement le gain de généralité et motive ainsi *notre* définition (çàd $\ln \circ f$ *fait sens et est convexe).*

Une fonction F est dite ***logarithmiquement convexe*** *(en abrégé* ***log-convexe****) si, pour tous points $a < b$ de I et pour tous $\lambda, \mu \in [0,1]$ de somme 1, la comparaison suivante fait sens et est vérifiée :*

$$f(\lambda a + \mu b) \leq f(a)^\lambda f(b)^\mu.$$

1. (a) *Supposons I infini et f log-convexe sur I. Montrer que f est positive.*
   (b) *En déduire que $\ln \circ f$ fait sens et est convexe ssi f est log-convexe et ne s'annule pas.*
   (c) *Supposons f log-convexe sur I. Si f s'annule sur I, montrer alors que f est nulle sur $\mathring{I}$.*
   (d) *Montrer que f est log-convexe ssi $t \mapsto f(t)\, C^t$ est convexe pour chaque réel $C > 0$.*

SOL

1. (a) Soit $i \in I$. Puisque I est infini, le point i évite l'une des bornes de I. Si i n'est pas $\sup I$, on peut alors invoquer un $a < i$ dans I et la comparaison $f\left(\frac{a+i}{2}\right) \leq \sqrt{f(a)}\sqrt{f(i)}$ doit faire sens, *a fortiori* le facteur $\sqrt{f(i)}$, d'où la positivité de $f(i)$. De même, si i n'est pas $\inf I$, on peut invoquer un $b > i$ dans I et la racine $\sqrt{f(i)}$ doit faire sens dans la comparaison $f\left(\frac{i+b}{2}\right) \leq \sqrt{f(i)}\sqrt{f(b)}$.
   (b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque $\ln \circ f$ fait sens, la fonction f prend ses valeurs dans le domaine de ln, donc est strictement positive, *a fortiori* ne s'annule pas. Puisque $\ln \circ f$ est convexe, composer à gauche par la fonction convexe croissante exp préserve la convexité d'après notre preuve du point **??**, d'où la convexité de $\exp \circ \ln \circ f = f$.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Soient a, b, λ, μ comme dans l'énoncé. Puisque f est log-convexe, elle est positive par le point précédent et même *strictement* par hypothèse, donc $\ln \circ f$ fait sens. Il est donc légitime d'appliquer ln aux comparaisons $f(\lambda a + \mu b) \leq f(a)^\lambda f(b)^\mu$ (que l'on a par log-convexité de f), ce qui donne

$$\ln f(\lambda a + \mu b) \leq \ln\left[f(a)^\lambda f(b)^\mu\right] = \lambda \ln f(a) + \mu \ln f(b), \text{ d'où la convexité de } \ln \circ f.$$

(c) Si I a au plus un élément, son intérieur est vide et il n'y a rien à faire. On peut donc supposer $f \geq 0$. Soit $z \in I$ tel que $f(z) = 0$. Soit $i \in \mathring{I}$. Si $i < z$, soit alors $j < i$ dans I, ce qui permet d'écrire

$$0 \leq f(i) = f(\lambda j + \mu z) \leq f(j)^{\lambda} f(z)^{\mu} = 0, \text{ d'où } f(i) = 0.$$

Si $i > z$, soit alors $j > i$ dans I et on conclut de même.

(d) $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $C > 0$ un réel et notons $g := t \mapsto f(t) C^t$. Soient a, b, λ, μ comme dans l'énoncé. L'hypothèse $f(\lambda a + \mu b) \leq f(a)^{\lambda} f(b)^{\mu}$ et la positivité de C permettent d'écrire

$$g(\lambda a + \mu b) = f(\lambda a + \mu b) C^{\lambda a} C^{\mu b} \leq [f(a) C^a]^{\lambda} \left[f(b) C^b\right]^{\mu} = g(a)^{\lambda} g(b)^{\mu}, \text{ CQFD}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\mathring{I} = \emptyset$, l'implication est tautologique. On supposera donc I infini. Si f s'annule sur I, alors f est nulle sur tout $\mathring{I}$, donc l'hypothèse devient « $f \geq 0$ aux éventuelles bornes de I », ce qui permet de conclure. Nous pouvons donc supposer f sans zéros par la suite.

Supposons donc I infini et montrons tout d'abord la positivité de f. Soit $i \in I$ et soit $C > 0$. Supposons $i \neq \sup I$ et soit $a < i$ dans I. On a alors la comparaison

$$f\left(\frac{a+i}{2}\right) C^{\frac{a+i}{2}} \leq \frac{f(i) C^i + f(a) C^a}{2}, \text{ d'où } 2f\left(\frac{a+i}{2}\right) C^{\frac{a-i}{2}} \leq f(i) + f(a) C^{a-i}$$

et faire tendre C vers ∞ conclut $0 \leq f(i) + 0$. On raisonnerait de même si $i \neq \inf I$ en invoquant un $b > i$ dans I et faisant tendre C vers 0.

4 moyennes généralisées (section Jensen)

Soit $t \neq 0$: lorsque $t \to 0$, on a les égalités asymptotiques

$$\begin{aligned}
(\text{à } i \text{ fixé}) \ a_i^t &= e^{t \ln a_i} = 1 + t \ln a_i + o(t), \text{ d'où} \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^t &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (1 + t \ln a_i + o(t)) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + t\lambda_i \ln a_i + o(t)) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i + t \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i + \sum_{i=1}^n o(t) \\
&= 1 + t\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i\right) + o(t), \text{ d'où} \\
\ln \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^t &= \ln\left(1 + t\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i\right) + o(t)\right) = t\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i\right) + o(t), \text{ d'où} \\
M_t &= \sqrt[t]{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^t} = \exp \frac{\ln\left(1 + t\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i\right) + o(t)\right)}{t} \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i + o(1)\right) \longrightarrow \exp \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i = \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}
\end{aligned}$$

Lorsque les a_i sont tous égaux, en notant a leur valeur commune, on a pour chaque réel $t \neq 0$ les égalités

$$M_t = \sqrt[t]{\sum_{i=1}^n \lambda_i a^t} = \sqrt[t]{a^t \sum_{i=1}^n \lambda_i} = \sqrt[t]{a^t} \sqrt[t]{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = a\sqrt[t]{1} = a,$$

ce qui montre que la fonction M est constant sur $\mathbb{R}^*$, *a fortiori* sur $\mathbb{R}$ par continuité en 0.

5 Exo 3 (entropie & concavité)

Mq H_2 concave. COR : H max sur loi uniformes.

DEM soit $p,q,\rho,\sigma \in P$, $e \in E$, $\lambda,\mu \in]0,1[$ de$\sum 1$. écvrivons $\frac{\lambda p_e+\mu q_e}{\lambda\rho_e+\mu\sigma_e} = \Lambda\frac{p_e}{\rho_e} + M\frac{q_e}{\sigma_e}$ où $\Lambda := \frac{\lambda\rho_e}{\lambda\rho_e+\mu\sigma_e}$ et $M := \frac{\lambda\sigma_e}{\lambda\rho_e+\mu\sigma_e}$. Alors $f := t \mapsto t\ln t$ convexe, donc $f\left(\Lambda\frac{p_e}{\rho_e} + M\frac{q_e}{\sigma_e}\right) \leq \Lambda f\left(\frac{p_e}{\rho_e}\right) + Mf\left(\frac{q_e}{\sigma_e}\right)$. Multiplier par $\lambda\rho_e + \mu\sigma_e$ donne

$$(\lambda p_e + \mu q_e)\ln\frac{\lambda p_e + \mu q_e}{\lambda\rho_e + \mu\sigma_e} \leq \lambda p_e \ln\frac{p_e}{\rho_e} + \mu q_e \ln\frac{q_e}{\sigma_e}$$

puis appliquer $-\sum_{e\in E}$ donne $H_2\left(\lambda\binom{p}{q} + \mu\binom{\rho}{\sigma}\right) \geq \lambda H_2\binom{p}{q} + \mu H_2\binom{\rho}{\sigma}$, CQFD.

Pour le cor, observer

$$H(p) = H_2\binom{p}{u} + \ln|E|.$$

6 Exo 10 (solution David Delaunay)

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes dérivables. On veut montrer que le segment $[f,g]$ de $\mathbb{R}^I$ contient une fonction positive ssi $\max\{f,g\} \geq 0$.

Soient $\lambda,\mu \geq 0$ tels que $\begin{cases} \lambda+\mu = 1 \\ \lambda f + \mu g \geq 0 \end{cases}$. Soit $a \in I$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on peut supposer $f(a) \leq g(a)$. On a alors les comparaisons

$$\max\{f(a), g(a)\} = g(a) = 1g(a) = (\lambda+\mu)g(a) = \underbrace{\lambda g(a)}_{\geq \lambda f(a) \text{ car } \lambda \geq 0} + \mu g(a) \geq [\lambda f + \mu g](a) \geq 0.$$

1. *Conclure si f ou g est positive.*
   On suppose $f,g \ngeq 0$.
2. *Justifier l'invocation de deux réels a et b distincts tels que* $\begin{cases} f \geq f(a) < 0 \\ g \geq g(b) < 0 \end{cases}$.
3. *Montrer que $f'g'$ reste négative sur $[a,b]$.*
4. *Montrer que f et g s'annulent chacune exactement une fois sur $[a,b]$.*
5. *Montrer l'existence d'un $m \in [a,b]$ où f et g sont positives et où $f'g'$ est négative.*
6. *Conclure*

Solution proposée.

1. Supposons $f \geq 0$. Le barycentre trivial $1f + 0g$ convient alors.
2. Les fonctions convexes f et g sont continues sur segment. Si l'un des minima est positif, on est ramené au cas 1. S'ils sont égaux, alors $\max f, g = f(a) < 0$, absurde.
   Quitte à échanger f et g, on peut supposer $a < b$.
3. Si a intérieur, f' s'y annule, sinon $a < b \leq \max I$ donc $a = \min I$ et $f'(a) \geq 0$ (sinon $f < f(a)$ à drote de a) ; or f' croît, d'où $f' \geq 0$ sur $[a,b]$. Idem $g' \leq 0$ sur $[a,b]$.
4. Puisque $g(b) < 0 \leq \max f, g(b)$, on a $f(b) = \max f, g(b) \geq 0$, donc (TVI) f s'annule sur $[a,b]$.
   Si deux zéros, mettons $a < u < v$, alors convexité donne $f(u) \leq \lambda f(a) + \mu f(v) = \lambda f(a) < 0$. (analogue pour g)
5. def $f(\alpha) = 0 = g(\beta)$. Par montonie, $\begin{matrix} f < 0 \text{ sur }]a,\alpha[\\ g < 0 \text{ sur }]\beta,b[\end{matrix}$, donc $\max f, g < 0$ sur $]a,\alpha[\cap]\beta,b[$, donc cette inter est vide, ççed $\alpha \leq \beta$. Alors tout $m \in [\alpha,\beta]$ convient
6. $0 = \lambda f'(+) + \mu g'(m)$ (trouver μ par TVI) donc $h'(m) = 0$, or h convexe donc h min en m où elle est positive CQFD

7 Exo 10 (version Marc Sage)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions convexes dérivables. On veut montrer que le segment* $[f, g]$ *de* $\mathbb{R}^I$ *contient une fonction positive ssi* $\max\{f, g\} \geq 0$.

1. (a) *Conclure si* f *et* g *sont affines et changent de signe en un même point.*
   (b) *Montrer que* f *est positive si elle s'annule trois fois (au moins).*
   (c) *Montrer* $f \geq 0$ *en chaque point où* $g < 0$.
   (d) *Conclure si* f *garde un signe constant.*
   (e) *Montrer que* g *est positive en chaque point de* $\mathring{I}$ *où* f *s'annule et a une dérivée non nulle.*
   (f) *Conclure.*

SOL

1. (a) Notons a le point d'annulation commun à f et à g et notons α et β leurs pentes respectives, de sorte à avoir
$$\begin{cases} f = f(a) + \alpha(\mathrm{Id} - a) = \alpha\delta \\ g = g(a) + \beta(\mathrm{Id} - a) = \beta\delta \end{cases} \text{ en abrégeant } \delta := \mathrm{Id} - a.$$
Vu l'hypothèse $\alpha\beta \leq 0$, on a l'appartenance $0 \in [\alpha, \beta]$, d'où deux réels $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 0 \end{cases}$, ce qui permet de minorer
$$\lambda f + \mu g = \lambda(\alpha\delta) + \mu(\beta\delta) = \underbrace{(\lambda\alpha + \mu\beta)}_{=0}\delta \geq 0.$$
FIG ciseaux + ligne hozirotale

   (b) Soient $a < b < c$ trois zéros de f. D'après l'exercice d'application ? ? ?, la fonction f est affine sur $[a, c]$, donc constante sur $[a, c]$ (car $f(a) = f(c)$), donc de dérivée nulle sur $]a, c[$, d'où $f'(b) = 0$. Or f est (par convexité) au-dessus de sa tangente en $(b, 0)$, droite d'ordonnée nulle, d'où la positivité de f recherchée.

   (c) Soit $a \in I$ tel que $g(a) < 0$. Si on avait $f(a) < 0$, on aurait alors $\max\{f(a), g(a)\} < 0$, contredisant $\max\{f, g\} \geq 0$.

   (d) Supposons $f \geq 0$. Le barycentre trivial $1f + 0g$ convient alors.
Supposons maintenant $f \leq 0$ et $f \not\geq 0$. En dehors des zéros de f, on a alors $f < 0$, d'où $g \geq 0$ par le point 1c. Or f s'annule au plus deux fois d'après le point (1b), donc la continuité de g (impliquée par sa convexité) permet de propager sa positivité à tout I et le barycentre trivial $0f + 1g$ convient.

   (e) Soit $a \in I$ tel que $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) \neq 0 \end{cases}$. On a alors l'équivalence (de fonctions) $f \overset{a}{\sim} (\mathrm{Id} - a) f'(a)$; puisque a n'est pas une borne de I, il y a donc un intervalle dont a est une borne où f est strictement négative, donc (point 1c) g est positif sur un tel intervalle, d'où en appliquant $\lim_a$ la positivité de $g(a)$.

   (f) D'après le point (1d), on peut supposer que le signe de f n'est pas constant. Puisque f est continue (car convexe), elle s'annule sur $\mathring{I}$ par le TVI : soit $a \in \mathring{I}$ un zéro de f. Abrégeons $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix}$ et $\delta := \mathrm{Id} - a$. Puisque f est (par convexité) au-dessus de sa tangente en a, on a la minoration
$$f \geq f(a) + f'(a)(\mathrm{Id} - a) = \alpha\delta.$$
FIG

Si α était nul, f serait alors positive et le point (1d) conclurait. On peut donc supposer $\alpha \neq 0$. Le point (1e) donne alors $g(a) \geq 0$, d'où (par convexité de g) la minoration
$$g \geq g(a) + g'(a)(\mathrm{Id} - a) \geq 0 + \beta\delta.$$

Par conséquent, on a pour chaque $(\lambda, \mu) \in [0,1]^2$ de somme 1 la minoration

$$\lambda f + \mu g \geq \lambda (\alpha\delta) + \mu (\beta\delta) = (\lambda\alpha + \mu\beta)\, \delta.$$

Si $\alpha\beta \leq 0$, la comparaison ci-dessus permet de conclure comme au point (1a).

Si $\alpha, \beta > 0$, alors quitte à rétrospectivement imposer que a soit le *plus petit* zéro de f (on peut d'après le point (1b)), nous pouvons supposer $f < 0$ à la gauche stricte de a, d'où (point 1c) $g \geq 0$ à la stricte gauche de a ; or g est déjà positive à droite de a (grâce à la majoration $g \geq \beta\delta$), donc g est positive tout court et le point (1d) conclut. Même raisonnement si $\alpha, \beta < 0$ en imposant rétrospectivement que a soit le *plus grand* zéro de f.