Réduction (deuxième partie) : polynômes d'endomorphismes, de matrices

Marc Sage (collab. Michel Wigneron)

19 septembre 2017

Table des matières

1 Morphismes d'évaluation polynomiale **2**
1.1 Définition . . . 2
1.2 Lemme de décomposition des noyaux . . . 8
1.3 Polynômes minimaux . . . 11

2 Lien avec la réduction **18**
2.1 Théorème de Cayley-Hamilton . . . 18
2.2 Spectre et polynômes annulateurs . . . 23
2.3 Nilpotents, diagonalisables, synthèse . . . 26
2.4 Un pas vers la réduction de Dunford . . . 32

3 Compléments (hors programme) sur les nilpotents **36**

4 Le point des compétences **41**

Comme au chapitre précédent, on fixe pour tout ce cours :

1. un corps K ;
2. un K-espace vectoriel E ;
3. un naturel n ;
4. un endomorphisme $f \in L(E)$;
5. une matrice carrée $A \in M_n(K)$.

Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre, soit $a \in \mathcal{A}$. En pratique, dans ce chapitre et sauf mention explicite du contraire,

$$\text{le couple } \binom{\mathcal{A}}{a} \text{ désignera toujours } \binom{L(E)}{f} \text{ ou } \binom{M_n(K)}{A}.$$

1 Morphismes d'évaluation polynomiale

1.1 Définition

Définition – Propriété

On appelle ***évaluation polynomiale***[1] ***en*** *a l'application*[2] *linéaire définie sur la base $\left(X^N\right)_{N\in\mathbb{N}}$ de $K[X]$ par*

$$X^N \mapsto a^N \text{ pour chaque naturel } N.$$

On la note

$$\underset{a}{\text{eval}} : \left\{ \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array} \right. .$$

Remarques

• Bien observer l'image des constantes, le polynôme 1 (unité de l'algèbre $K[X]$) étant envoyé sur l'unité de l'algèbre $\mathcal{A}$:

$$1(a) = 1_{\mathcal{A}}, \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{c} 1(A) = I_n \\ 1(f) = \mathrm{Id}_E \end{array} \right. .$$

• Lorsque $\mathcal{A} = K$, on retrouve l'évaluation des fonctions polynomiales en a, d'où la cohérence de la notation $P(a)$.

• Lorsque $\binom{\mathcal{A}}{a} = \binom{K[X]}{X}$, alors eval_X (par définition) fixe chaque monôme, donc (par linéarité) vaut l'identité et la notation $P(X)$ désigne P. Ici encore, la notation $P(a)$ est cohérente[3].

[1] Si le contexte polynomial est clair, on parlera simplement d'***évaluation en*** a.

[2] L'article défini « l' » sous-entend *unicité* d'une telle application.

[3] Ces deux dernières remarques seront le seul endroit de ce cours où le couple $\binom{\mathcal{A}}{a}$ est autre que $\binom{L(E)}{f}$ ou $\binom{M_n(K)}{A}$.

- Soit $P =: \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$ un polynôme de $K[X]$. On a alors les égalités

$$P(a) = \underset{a}{\operatorname{eval}}(P) = \underset{a}{\operatorname{eval}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \underset{a}{\operatorname{eval}}(X^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n a^n.$$

Dit en français :

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{pour évaluer un polynôme } P \textit{ en } a,\\ \textit{remplacer dans } P \textit{ son indéterminée par } a.\end{array}}$$

On retiendra donc pour chaque $d \in \mathbb{N}$ et chaque $c \in K^{d+1}$ les égalités[4]

$$\begin{array}{rcl} \left[c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_d X^d\right](A) & = & c_0 I_n + a_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_d A^d \\ \text{et } \left[c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_d X^d\right](f) & = & c_0 \operatorname{Id} + c_1 f + c_2 f^2 + \cdots + c_d f^d. \end{array}$$

- Soit B une matrice carrée. On a alors pour chaque polynôme $P \in K[X]$ l'égalité

$$P\begin{pmatrix} A & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & P(B) \end{pmatrix}.$$

En effet, cette égalité étant linéaire en P, il suffit de la montrer pour P élément de la base canonique de $K[X]$, ce qui est immédiat d'après le calcul diagonal par blocs.

On généraliserait aisément : pour chaque suite finie $(A_1, A_2, ..., A_\ell)$ de matrices carrées, le calcul triangulaire par blocs permet écrire

$$P\begin{pmatrix} A_1 & ? & \cdots & ? \\ & A_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & A_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A_1) & ¿ & \cdots & ¿ \\ & P(A_2) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ¿ \\ & & & P(A_\ell) \end{pmatrix} \text{ pour chaque } P \in K[X].$$

Propriété – Définition

L'évaluation en a est un morphisme d'algèbres :

$$[PQ](a) = P(a)\,Q(a) \text{ pour chaques polynômes } P, Q \in K[X].$$

Son image est la sous-algèbre engendrée par a, algèbre notée

$$K[a] := \{P(a)\ ;\ P \in K[X]\} = \operatorname{Im} \underset{a}{\operatorname{eval}}.$$

*Son noyau s'appelle l'**idéal annulateur**[5] de a.*

Démonstration

Soient $P, Q \in K[X]$. Puisque eval_a est linéaire, l'égalité

$$[PQ](a) = P(a)\,Q(a) \text{ à montrer est bilinéaire en } (P, Q)$$

[4] Bien observer le terme constant mettant en jeu I_n ou Id.

[5] Sous-entendu : idéal des *polynômes* annulateurs.

et il suffit de la montrer pour P et Q éléments d'une base de $K[X]$. Imposons donc (P, Q) de la forme (X^p, X^q) pour certains naturels p et q. On a alors les égalités

$$[PQ](a) = [X^p X^q](a) = X^{p+q}(a) = a^{p+q} = a^p a^q = P(a) Q(a), \text{ c. q. f. d.}$$

L'égalité décrivant $\operatorname{Im} \operatorname{eval}_a$ est immédiate.

Remarques – Soient P et Q deux polynômes dans $K[X]$.

- Puisque l'algèbre source $K[X]$ est commutative, on a les égalités

$$P(a) Q(a) = [PQ](a) = [QP](a) = Q(a) P(a).$$

Il en résulte que

l'algèbre $K[a]$ est commutative.

En particulier, f commute avec chaque polynôme en f et le lemme utile de la section **??** montre que

$$f \text{ stabilise } \operatorname{Ker} P(f).$$

- Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f. L'exercice d'application section **??** a donné sens et établi pour chaque naturel N les égalités[6]

$$\left[f_{|V}\right]^N = \left[f^N\right]_{|V}, \text{ d'où par linéarité l'égalité } P\left(f_{|V}\right) = P(f)_{|V}.$$

- Soit i un inversible de $\mathcal{A}$. On a alors pour chaque naturel N les égalités

$$\left[X^N\right]\left(i^{-1} a i\right) = \left(i^{-1} a i\right)^N \underset{\text{immédiate}}{\overset{\text{récurrence}}{=}} i^{-1} a^N i,$$

d'où par linéarité les égalités

$$P\left(i^{-1} a i\right) = i^{-1} P(a) i.$$

Voilà en quoi[7] le calcul polynomial (en particulier celui des puissances) motive la réduction :

trouver un "réduit" iai^{-1} facilitant l'évaluation de $P(a) = iP\left(i^{-1} a i\right) i^{-1}$.

Par exemple, on pourrait raisonnablement être démotivé pour évaluer à la main $A^{42!}$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 89 & -198 & -507 \\ 40 & -89 & -233 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or, en posant $\Lambda := \operatorname{Diag}(2, 1, -1)$, le calcul du polynôme caractéristique

$$\chi_A = (X-1)(X-2)(X+1) \text{ simplement scindé}$$

[6] On parle ici d'*induits* sur V (et non de restrictions).

[7] Dans le jargon mathématique, on dit que les évaluations polynomiales *commutent aux* conjugaisons.

montre que A est diagonalisable de spectre $\{-1,1,2\}$ (donc semblable à Λ) et la description de ses sous-espaces propres par résolution de systèmes fournit la matrice de passage suivante[8] :

$$A=P\Lambda P^{-1} \text{ avec } P:=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul démotivant devient alors facile[9] :

$$\begin{aligned} A^{42!} &= \left(P\Lambda P^{-1}\right)^{42!} = P\Lambda^{42!}P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\left(2^{42!},1^{42!},(-1)^{42}\right)P^{-1} \\ &\overset{\text{abréger}}{\underset{\Theta:=2^{42!}}{=}} \begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -11 & -28 \\ -4 & 9 & 23 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Theta \\ 5 & -11 & -28 \\ -4 & 9 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\Theta \\ 0 & 1 & 3(1-\Theta) \\ 0 & 0 & \Theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple : soit $a\in\mathbb{C}^n$. Réduisons la matrice[10] $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ constante sur chaque "diagonale" $\diagdown$ et précisons son spectre.

Notons Γ la matrice considérée[11]. Elle se réécrit

$$\Gamma = a_1 I_n + a_2\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & I_{n-2} \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Voyons le lien avec les itérés de la matrice

$$C:=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Vu l'action de C sur les vecteurs colonnes (décaler *modulo* n les coordonnées d'un cran vers le haut), la matrice C agit par multiplication à gauche sur chaque matrice donnée en décalant *modulo* n les lignes de cette matrice d'un cran vers le haut, ce qui permet de décrire les puissances de C : une récurrence immédiate livrerait les égalités

$$\forall i\in[0,n|]\,,\ C^i=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-i} \\ I_i & 0 \end{pmatrix}.$$

[8] On peut aussi directement vérifier l'égalité $AP=P\Lambda$ si on nous donne Λ et P à l'avance.

[9] La matrice de dilatation $\mathrm{Diag}(\Theta,1,1)$ agit sur les *lignes* de sa matrice de *droite* en multipliant la première par Θ.

[10] *Culture* : une telle matrice est dite ***circulante***.

[11] Γ comme C comme « **c**ycle »

En notant $\pi := \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i$, on peut donc réécrire

$$\Gamma = a_1 C^0 + a_2 C^1 + a_3 C^2 + \cdots + a_n C^{n-1} = \pi(C)$$

et la réduction de Γ revient à celle de C.

Or le polynôme caractéristique χ_C vaut $X^n - 1$ (d'après un calcul déjà effectué), donc est simplement scindé sur $\mathbb{C}$ (ou vaut 1), ce qui permet d'évoquer une matrice $\Lambda \in M_n(\mathbb{C})$ diagonale (à valeurs dans $\mathbb{U}_n$) et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $C = P \Lambda P^{-1}$, d'où les égalités[12]

$$\pi(C) = \pi\left(P \Lambda P^{-1}\right) = P \pi(\Lambda) P^{-1}.$$

La matrice Γ est par conséquent diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et son spectre vaut $\pi(\mathbb{U}_n)$.

Sanity check : lorsque $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$, on retrouve une matrice de la forme $\begin{pmatrix} b & a & - & a \\ a & \diagdown & \diagdown & | \\ | & \diagdown & \diagdown & a \\ a & - & a & b \end{pmatrix}$ dont on a déjà établi la diagonalisabilité (*cf.* section **??**). Le polynôme π vaut alors

$$b + a\left(X + X^2 + \cdots X^{n-1}\right) = (b-a) + a\frac{X^n - 1}{X - 1},$$

ce qui permet de retrouver les valeurs propres $b-a$ et $b+(n-1)a$ avec les multiplicités resp. $n-1$ et 1.

Exercices d'application

1. *Imposons A inversible. Montrer alors l'appartenance $A^{-1} \in K[A]$.*
2. *On fixe un polynôme $P \in K[X]$.*
   (a) *Soit $g \in L(E)$ tel que $[f, g] = \mathrm{Id}$. Montrer les égalités*

   $$[f, P(g)] = P'(g).$$

   (b) *Soit $B \in M_n(K)$* telle que *$[A, B] = 0$. Montrer les égalités*

   $$P\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

3. *Soit B une matrice carrée. On impose A et B resp. annulées par deux polynômes premiers entre eux. Montrer alors l'égalité*

   $$\left\{\begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}\right\}_{P,Q \in K[X]} = K\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right].$$

   Discuter l'hypothèse de primalité relative.

[12] La matrice $P := \left(\omega^{ij}\right)_{i,j \in [1,n|]}$ conviendrait (*cf.* remarque finale de l'exercice d'application section **??**).

1. La famille $\left(1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$ a une longueur strictement supérieure à la dimension de l'espace vectoriel $M_n(K)$ où elle prend ses valeurs, donc est liée, ce qui permet d'évoquer un polynôme $P \neq 0$ annulateur de A. Notons v la valuation de P (ce qui fait sens puisque P est non nul). Le polynôme $Q := \frac{P}{X^v}$ a alors un coefficient constant non nul, donc s'écrit $c(1 - XR)$ pour un certain scalaire c et un certain polynôme R. Puisque a est inversible et c non nul, on peut simplifier par ca^v l'égalité $P(a) = 0$, ce qui donne $[1 - XR](a) = 0$, *i. e.* $1(a) = XR(a)$, ou encore $aR(a) = 1_{\mathcal{A}}$, d'où $a^{-1} = R(a)$.

Remarque – Cette démarche est *effective* dès lors que l'on s'est donné un polynôme annulateur (non nul) de A. La recherche effective de tels polynômes pourra donc servir cette démarche.

2. Les deux égalités à montrer étant linéaires en P, il suffit de les montrer lorsque P est un élément de la base canonique de $K[X]$. Procédons par récurrence.

(a) Pour chaque naturel N,

$$\text{notons } e_N \text{ l'égalité } \left[f, g^N\right] = Ng^{N-1}$$

et montrons $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ e_N$ par récurrence.

L'égalité e_1 est notre hypothèse :

$$1g^{1-1} = g^0 = \mathrm{Id} = [f, g] = \left[f, g^1\right].$$

Soit ensuite $N \in \mathbb{N}^*$ tel que e_N. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} \left[f, g^{N+1}\right] &= fg^{N+1} - g^{N+1}f = \left(fg^N\right)g - g^N(gf) \\ &\overset{e_1}{=} \left(\left[f, g^N\right] + g^N f\right)g - g^N(fg - \mathrm{Id}) \\ &\overset{e_N}{=} Ng^{N-1}g + g^N fg - g^N fg + g^N \\ &= Ng^N + g^N = (N+1)g^N, \text{ d'où } e_{N+1}. \end{aligned}$$

(b) Pour chaque naturel N,

$$\text{notons } E_N \text{ l'égalité } \begin{pmatrix} A & B \\ {\scriptstyle 0} & A \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} A^N & NA^{N-1}B \\ {\scriptstyle 0} & A^N \end{pmatrix}$$

et montrons $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ E_N$ par récurrence.

À $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, les deux membres de l'égalité E_N ont même partie triangulaire inférieure d'après le calcul triangulaire par blocs : il ne reste donc qu'à montrer l'égalité des deux blocs en position "haut-droite".

Lorsque $N = 1$, ce bloc vaut $B^1 = 1A^0B$ dans les deux cas, d'où E_1.

Soit ensuite $N \in \mathbb{N}^*$ tel que E_N. On a alors les égalités

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {\scriptstyle 0} & A \end{pmatrix}^{N+1} = \begin{pmatrix} A & B \\ {\scriptstyle 0} & A \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} A & B \\ {\scriptstyle 0} & A \end{pmatrix} \overset{E_N}{=} \begin{pmatrix} A^N & NA^{N-1}B \\ {\scriptstyle 0} & A^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ {\scriptstyle 0} & A \end{pmatrix}$$

dont le bloc "haut-droite" vaut

$$A^N B + NA^{N-1}BA \underset{\text{commutent}}{\overset{A \text{ et } B}{=}} A^N B + NA^N B = (N+1)A^N, \text{ d'où } E_{N+1}.$$

3. L'inclusion $\supset$ est immédiate d'après une remarque précédente (fondée sur le calcul par blocs diagonal). Montrons la réciproque.

Soient α et β deux polynômes premiers entre eux tels que $\begin{cases} \alpha(A) = 0 \\ \beta(B) = 0 \end{cases}$ (permis par hypothèse). Soient $P, Q \in K[X]$. Le lemme chinois permet d'évoquer un polynôme π tel que

$\begin{cases} \pi = P \mod \alpha \\ \pi = Q \mod \beta \end{cases}$, mettons $\pi = \begin{cases} P + U\alpha \\ Q + V\beta \end{cases}$ pour certains polynômes U et V.

On en déduit les égalités

$$\pi(A) = [P + U\alpha](A) = P(A) + U(A)\underbrace{\alpha(A)}_{=0} = P(A) \text{ et de même } \pi(B) = Q(B),$$

d'où $\begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(A) & 0 \\ 0 & \pi(B) \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, ce qui conclut.

Montrons que l'hypothèse est nécessaire dès que $n \geq 1$: en effet, lorsque[13] $A = B$, pour chaque polynôme π, la matrice

$$\pi \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(A) & 0 \\ 0 & \pi(A) \end{pmatrix} \text{ a ses termes diagonaux égaux,}$$

ce qui n'est pas le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 0(A) & 0 \\ 0 & 1(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$,

donc l'inclusion $\subset$ souhaitée n'est pas réalisée.

Remarque – **Culture hors programme**. Cette hypothèse de primalité relative permet de décrire simplement les sous-espaces vectoriels stables par $\operatorname{Diag}(A, B)$ à l'aide de deux de A et de B. Donnons (sans preuve) une traduction en termes d'endomorphismes : *si f stabilise deux sous-espaces vectoriels supplémentaires S et T tels que les induits $f_{|S}$ et $f_{|T}$ sont annulés resp. par deux polynômes premiers entre eux, alors les sous-espaces vectoriels stables par f sont les sommes directes d'un sous-espace vectoriel de S stables par $f_{|S}$ et d'un sous-espace vectoriel de T stable par $f_{|T}$*. Plus précisément, un tel sous-espace vectoriel Σ se décompose selon $E = S \oplus T$ en[14]

$$\Sigma = (\Sigma \cap S) \oplus (\Sigma \cap T).$$

1.2 Lemme de décomposition des noyaux

Proposition

[13] Nous verrons que les polynômes annulateurs de A ont en commun un diviseur non constant (si $n > 0$), donc les matrices A et B ne sauraient lorsqu'elles sont égales être annulés resp. par deux polynômes premiers entre eux.

[14] Cette décomposition peut intervenir dans les exercices sur les sous-espaces vectoriels stables et nous encourageaons les lectrices et lecteurs motivés à la démontrer.

Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux. On a alors l'égalité

$$\operatorname{Ker} PQ(f) = \operatorname{Ker} P(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f).$$

Démonstration

Notons $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}P(f)\\ Q(f)\end{pmatrix}$: le produit $\alpha\beta$ vaut alors $P(f)Q(f) = PQ(f)$ et l'on veut donc montrer

$$\operatorname{Ker}\alpha\beta = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta.$$

Soient (par Bézout) U et V deux polynômes tels que $PU+QV = 1$ et notons $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}U(f)\\ V(f)\end{pmatrix}$: on a alors l'égalité

$$\mathrm{Id} = 1(f) = [PU+QV](f) = P(f)U(f) + Q(f)V(f) = \alpha u + \beta v.$$

L'endomorphisme $u\alpha$ s'annule sur $\operatorname{Ker}\alpha$, de même $v\beta$ sur $\operatorname{Ker}\beta$, donc leur somme Id s'annule sur $\operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta$, d'où la nullité de cette intersection, ce qui montre que ces noyaux sont en somme directe.

De même, le produit $\alpha\beta$ s'annule sur $\operatorname{Ker}\alpha$ et sur $\operatorname{Ker}\beta$, donc le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\alpha\beta$ inclut leur somme.

Il reste pour conclure à montrer l'inclusion

$$\operatorname{Ker}\alpha\beta \overset{?}{\subset} \operatorname{Ker}\alpha + \operatorname{Ker}\beta.$$

Soit $k \in \operatorname{Ker}\alpha\beta$: l'image $\alpha u(k)$ est annulée par β vu les égalités[15]

$$\beta(\alpha u(k)) = u(\alpha\beta(k)) = u(0) = 0,$$

de même $\beta v(k)$ est annulé par α, d'où les égalités et appartenance

$$k = \mathrm{Id}(k) = [\beta v + \alpha u](k) = \beta v(k) + \alpha u(k) \in \operatorname{Ker}\alpha + \operatorname{Ker}\beta, \textit{ c. q. f. d.}$$

Corollaire (lemme de décomposition des noyaux)

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de polynômes de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux dont note π le produit. On a alors l'égalité

$$\operatorname{Ker}\pi(f) = \bigoplus_{P\in\mathcal{P}} \operatorname{Ker} P(f).$$

Démonstration

Pour chaque naturel c, notons L_c l'énoncé ci-dessus[16] quantifié universellement sur les $\mathcal{P}$ de cardinal c. Montrons $\forall c \in [2,\infty|[,\ L_c$ par récurrence (L_0 et L_1 sont triviaux).

[15] Bien observer que α, β, u, v (tous des polynômes en f) commutent entre eux.

[16] L pour « lemme »

Nous venons d'établir L_2 (*cf.* proposition précédente)

Soit $c \geq 2$ tel que L_c. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $c+1$ polynômes deux à deux premiers entre eux dont on note π le produit. Soit $p \in \mathcal{P}$, notons $\mathrm{P}^* := \mathcal{P} \backslash \{p\}$ et $\pi^* := \prod_{P \in \mathcal{P}^*} P$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \pi(f) &= \operatorname{Ker} p\pi^*(f) \overset{L_2}{=} \operatorname{Ker} p(f) \oplus \operatorname{Ker} \pi^*(f) \overset{L_c}{=} \operatorname{Ker} p(f) \oplus \bigoplus_{P \in \mathcal{P}^*} \operatorname{Ker} P(f) \\ &\underset{\text{la somme directe}}{\overset{\text{associativité de}}{=}} \bigoplus_{P \in \{p\} \amalg \mathcal{P}^*} \operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{Ker} P(f), \text{ ce qui montre } L_{c+1}. \end{aligned}$$

Corollaire

Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.

Démonstration

La famille $(E_\lambda)_{\lambda \in \operatorname{Vp} f}$ étant en somme directe ssi chacun de ses sous-familles *finies* l'est, évoquons une partie Λ finie de $\operatorname{Vp} f$. L'ensemble $\{X - \lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est alors fini et formé de polynômes deux à deux premiers entre eux, donc (d'après le lemme de décomposition des noyaux) les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}[X - \lambda](f) = E_\lambda(f)$ sont en somme directe pour λ décrivant Λ, ce qui conclut.

Exercice d'application

Soit I un intervalle réel infini. On impose $E = C^\infty(I, \mathbb{C})$ et on note δ l'opérateur de dérivation. Pour éviter les confusions, on abrègera

$$\operatorname{Id} := \underset{E}{\operatorname{Id}} \in L(E) \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{id} := \underset{I}{\operatorname{Id}} \in E.$$

a. *Soient $g \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{N}$. Montrer les égalités*

$$\begin{aligned} [\delta - \lambda \operatorname{Id}]^\omega \left(g e^{\lambda \operatorname{id}}\right) &= g^{(\omega)} e^{\lambda \operatorname{id}} \ \textit{et} \\ \operatorname{Ker}(\delta - \lambda \operatorname{Id})^\omega &= e^{\lambda \operatorname{id}} \mathbb{C}_{\omega-1}[X]. \end{aligned}$$

b. *Soit $a \in \mathbb{C}^n$. Résoudre l'équation différentielle*

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0 \ \textit{d'inconnue } f \in E.$$

---

a. L'opérateur δ est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, ce qui donne sens à l'itéré $[\delta - \lambda \operatorname{Id}]^\omega$ dans $L(E)$. Vu les égalités

$$[\delta - \lambda \operatorname{Id}] \left(g e^{\lambda \operatorname{id}}\right) = e^{\lambda \operatorname{id}} (g' - \lambda g) - \lambda g e^{\lambda \operatorname{id}} = g' e^{\lambda \operatorname{id}},$$

une récurrence immédiate livre la première égalité désirée.

On en déduit à $f \in E$ fixé les équivalences

$$f \in \operatorname{Ker}(\delta - \lambda \operatorname{Id})^{\omega} \underset{g:=fe^{-\lambda \operatorname{id}}}{\overset{\text{définir}}{\iff}} [\delta - \lambda \operatorname{Id}]^{\omega} \left(ge^{\lambda \operatorname{id}}\right) = 0 \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{point}}{\iff}} g^{(\omega)} e^{\lambda \operatorname{id}} = 0$$
$$\iff g^{(\omega)} = 0 \iff g \in \mathbb{C}_{\omega-1}[X] \iff fe^{-\lambda \operatorname{id}} \in \mathbb{C}_{\omega-1}[X] \iff f \in e^{\lambda \operatorname{id}} \mathbb{C}_{\omega-1}[X],$$

d'où la seconde égalité demandée.

b. Scindons sur $\mathbb{C}$ (ou égalons à 1) le polynôme $P := X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, mettons

$$P = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X - \lambda)^{\omega_\lambda} \quad \begin{array}{l} \text{pour une certaine partie finie } \Lambda \subset \mathbb{C} \\ \text{et pour une certaine famille } \omega \in \mathbb{N}^{\Lambda}. \end{array}$$

L'équation considérée se réécrivant $\left[\delta^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \delta^i\right](f) = 0$, *i. e.* $[P(\delta)](f) = 0$, ses solutions forment le noyau

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} P(\delta) & \underset{\text{des noyaux}}{\overset{\text{lemme de déc.}}{=}} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Ker} \ [(X-\lambda)^{\omega_\lambda}](\delta) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Ker} \ (\delta - \lambda \operatorname{Id})^{\omega_\lambda} \\ & \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{point}}{=}} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} e^{\lambda \operatorname{id}} \mathbb{C}_{\omega-1}[X] = \operatorname*{Vect}_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ d \in [0, \omega_\lambda[}} \left\{ t \mapsto e^{\lambda t} t^d \right\}. \end{aligned}$$

Remarque – On décrirait par une méthode analogue les suites vérifiant une récurrence linéaire à coefficients constants. L'analogue séquentiel des solutions continues $t \mapsto e^{\lambda t} t^d$ serait les suites $n \mapsto \lambda^n n^d$.

1.3 Polynômes minimaux

On impose désormais que[17]

$\mathcal{A}$ soit de dimension finie.

Proposition – Définition

1. *L'idéal annulateur de a est engendré par un unique polynôme unitaire, appelé le **polynôme minimal**[18] de a et noté μ_a :*

$$\operatorname{Ker} \operatorname*{eval}_a = (\mu_a).$$

2. *Les polynômes annulateurs de a sont les multiples de son polynôme minimal :*

$$P(a) = 0 \iff \mu_a \mid P.$$

[17] L'algèbre $M_n(K)$ étant de dimension finie n^2, cette imposition équivaut (dans ce cours) à ce que E soit de dimension finie.

[18] Par soucis de lisibilité, μ_a poura être noté $\mu(a)$.

3. *La sous-algèbre $K[a]$ admet pour base*[19] *la famille* $\left(1, a, a^2, ..., a^{\deg \mu_a - 1}\right)$ *:*

$$K[a] = \bigoplus_{i \in [0, \deg \mu_a[} K a^i.$$

Démonstration

1. L'anneau $K[X]$ étant principal, l'idéal-noyau $\operatorname{Ker} \operatorname{eval}_a$ est un idéal principal de $K[X]$, donc de la forme (M) pour un certain M. Puisque l'espace vectoriel but $\mathcal{A}$ de eval_a est de dimension finie mais pas son espace vectoriel source $K[X]$, cette application linéaire ne saurait être injective, donc son noyau est non nul, d'où la non-nullité de M. Ce dernier admet donc un unique représentant unitaire (obtenu en normalisant M).
2. On a pour chaque polynôme P les équivalences

$$P(a) = 0 \iff P \in \operatorname{Ker} \underset{a}{\operatorname{eval}} \iff P \in (\mu) \iff \mu_a \mid P.$$

3. Montrons le caractère générateur. Soit $b \in K[a]$, soit $P \in K[X]$ tel que $b = P(a)$. Puisque μ_a est non nul, on peut évoquer (division euclidienne) deux polynômes Q et R tels que

$$P = Q\mu_a + R \text{ avec } \deg R < d := \deg \mu_a,$$

d'où il vient

$$P(a) = [Q\mu_a + R](a) \underset{\text{morphisme}}{\overset{\operatorname{eval}_a \text{ est un}}{=}} Q(a) \underbrace{\mu_a(a)}_{=0} + R(a) = R(a) \in \underset{i \in [0,d[}{\operatorname{Vect}} a^i.$$

Montrons le caractère libre. Soit $\lambda \in K^d$ tel que $\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i a^i = 0$ (relation de liaison). Alors le polynôme $\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i X^i$ annule a, donc est multiple de μ_a ; étant par ailleurs de degré strictement plus petit que $\deg \mu_a$, ce multiple doit être nul, ce qui s'écrit $\lambda = 0$, *c. q. f. d.*

Remarques

- Le point (2) peut se reformuler comme suit :

le polynôme minimal μ_a est (au sens de la divisibilité)
le plus petit polynôme unitaire annulateur de a.

En d'autres termes encore[20] :

μ_a est le polynôme unitaire annulant a de degré minimal.

- Soient $P \in K[X]$ et φ un morphisme de K-algèbres de source $\mathcal{A}$. La nullité de l'élément $P(\varphi(a)) = \varphi(P(A))$ équivalant à celle de $P(A)$, les éléments a et $\varphi(a)$ ont même idéal annulateur, donc même polynôme minimal.

[19] *Culture* : la dimension $\dim K[a] = \deg \mu_a$ s'appelle le ***degré*** de a.
[20] Toutes ces variations doivent rendre limpide la terminologie *minimal*.

En particulier, le polynôme minimal est inchangé par conjugaison[21] :

$$\forall i \in \mathcal{A}^{\times},\ \mu\left(iai^{-1}\right) = \mu_a.$$

Autre cas particulier, lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme f et sa matrice dans chaque base de E ont même polynôme minimal :

$$\mu_f = \mu\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f\right) \text{ pour chaque base } \mathcal{B} \text{ de } E.$$

Dernier cas particulier[22], la matrice A et l'endomorphisme $A\cdot$ ont même polynôme minimal :

$$\mu\left(A\cdot\right) = \mu\left(A\right).$$

Ces deux dernières égalités permettront de passer d'une proposition mettant en jeu μ_A à son analogue mettant en jeu μ_f (et réciproquement) en imposant $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ (ou bien $f = A\cdot$).

- Soient $\lambda \in K$ et $P \in K[X]$. On a alors les équivalences

$$P\left(a + \lambda 1_{\mathcal{A}}\right) = 0 \iff \left[P\left(X+\lambda\right)\right](a) = 0 \iff \mu_a \mid P\left(X+\lambda\right) \iff \mu_a\left(X-\lambda\right) \mid P,$$

ce qui montre que l'idéal annulateur de $a + \lambda 1_{\mathcal{A}}$ est formé des multiples de $\mu_a(X-\lambda)$. En particulier[23] :

$$\mu\left(a + \lambda 1_{\mathcal{A}}\right) = \mu_a \circ \left(X - \lambda\right).$$

- Notons $d := \deg \mu_a$. Nous avons vu la liberté de la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^{d-1}\right)$; la dimension de $K[A]$ valant par ailleurs d, la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^d\right)$ n'est pas libre. On en déduit l'égalité

$$\deg \mu_a = \max\left\{N \in \mathbb{N} \ ; \ \left(1, A, A^2, ..., A^{N-1}\right) \text{ libre}\right\}.$$

- Soit L un corps dont K est un sous-corps. Le polynôme μ_A annulant A, il annule A_L, donc μ_{A_L} divise μ_A. Ces polynômes unitaires seront par conséquent égaux s'ils ont même degré. Or le point précédent et l'exercice d'application **??** section **??** montrent que $\deg \mu_A$ ne dépend pas du corps où l'on choisit de considérer les coefficients de A. On retiendra donc :

le polynôme minimal est inchangé par extension des scalaires.

- On a les équivalences

$$\mu_a = 1 \overset{\mu_a \text{ unitaire}}{\iff} 1 \in (\mu_a) \iff 1 \in \operatorname{Ker} \operatorname*{eval}_a \iff 1(a) = 0 \iff 1_{\mathcal{A}} = 0 \iff \mathcal{A} = \{0\}.$$

Par conséquent, sauf cas pathologique de la dimension nulle, *un polynôme minimal n'est jamais constant* :

$$\deg \mu_a \geq 1 \qquad (\text{sauf si } \mathcal{A} = \{0\}).$$

[21] *À retenir : deux matrices semblables ont même polynôme minimal.*

[22] *Rappel* : pour chaque matrice carrée M, on note $M\cdot$ l'endomorphisme canoniquement associé à M.

[23] Ajouter un scalaire se traduit donc simplement sur le polynôme minimal.

• L'hypothèse « $\mathcal{A}$ de dimension finie » n'intervient qu'à un seul endroit : pour établir la non-injectivité de eval_a. Par conséquent, tout ce qui précède reste valide dès que eval_a n'est pas injectif (même en dimension infinie, hors programme), *i. e.* quand a admet un polynôme annulateur autre que (cas trivial) le polynôme nul[24].

• **Culture hors programme** : l'algorithme de Le Verrier présenté pour calculer χ_A permet également d'obtenir μ_A lorsque ce dernier se scinde. En effet, une fois calculé *via* l'algorithme le polynôme matriciel $M := \operatorname{com}(XI_n - A)$, il suffit d'utiliser l'identité

$$\mu_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (X - \lambda)^{\omega_\lambda - \operatorname{val} M(X+\lambda)}$$

(laquelle pourrait être établie avec les compléments présentés section 3).

Exemples

1. Imposons a nilpotent et notons ν son indice de nilpotence. Vu[25] que $a^\nu = 0 \neq a^{\nu-1}$, l'élément a est annulé par X^ν mais pas par $X^{\nu-1}$, donc μ_a divise X^ν mais pas $X^{\nu-1}$, d'où $\mu_a = X^\nu$:

$$a \text{ nilpotent} \Longrightarrow \mu_a = X^{\text{indice de nilpotence de } a}.$$

   On aura en particulier

$$\mu\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de taille } n\times n} = X^n \text{ d'où } \mu\underbrace{\begin{pmatrix} 18 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 18 \end{pmatrix}}_{n \text{ symboles } 18} = (X-18)^n.$$

2. Imposons a scalaire et notons λ son rapport. Le polynôme $X - \lambda$ annule alors a, donc est multiple de μ_a ; or ces deux polynômes ont même degré 1 (sauf cas pathologique où E est nul) et sont unitaires, donc sont égaux :

$$\begin{cases} f = \lambda \operatorname{Id} \Longrightarrow \mu_f = X - \lambda & (\text{sauf si } E = \{0\}) \\ A = \lambda I_n \Longrightarrow \mu_A = X - \lambda & (\text{sauf si } n = 0) \end{cases}.$$

   La réciproque est immédiate : si a est annulé par un polynôme unitaire de degré 1, ce dernier est alors de la forme $X - \rho$ et l'on a $a - \rho 1_{\mathcal{A}} = 0$. On retiendra donc les équivalences

$$a \text{ scalaire} \Longleftrightarrow \deg \mu_a \leq 1 \overset{\text{si } \mathcal{A}\neq 0}{\Longleftrightarrow} \deg \mu_a = 1.$$

3. Imposons plus généralement A diagonale. Un polynôme donné annule alors A ssi il s'annule en chacun de ses termes diagonaux, *i. e.* (le spectre se lisant sur la diagonale) ssi il s'annule en chacune de ses valeurs propres, ou encore ssi il est divisible par $X - \lambda$ pour chaque $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, ce qui revient (par Gauss) à être

[24] *Culture* : on dit alors que ***a admet un polynôme minimal***.
[25] En toute rigueur, traiter à part le cas pathologique $\nu = 0$.

multiple de $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,A}(X-\lambda)$. Nous venons de décrire l'idéal annulateur de A, lequel est par ailleurs inchangé par similitude, d'où l'implication

$$a \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \mu_a = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,a}(X-\lambda)\,.$$

Deux cas particuliers ressortent[26], les idempotents (de spectre inclus dans $\{0,1\}$) et les évolutifs (de spectre inclus dans $\{-1,1\}$) :

$$\begin{aligned} f \text{ projecteur non scalaire} &\implies \mu_f = X^2 - X. \\ f \text{ symétrie non scalaire} &\implies \mu_f = X^2 - 1. \end{aligned}$$

4. Imposons f de rang 1. En regardant sa matrice M dans une base de $\operatorname{Ker} f$ (noyau de dimension $\dim E - 1$) complétée en une base de E, matrice qui est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & \tau \end{pmatrix}$ pour un certain scalaire τ (valant $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} f$), le calcul par blocs donne l'égalité $M^2 = \tau M$, donc le polynôme $X^2 - (\operatorname{tr} f)\,X$ annule f. Lorsque $n \geq 2$, le polynôme μ_f n'est ni constant (sinon $n = 0$) ni affine (sinon f serait scalaire et son rang 1 vaudrait n ou 0), donc est de degré au moins 2 ; divisant par ailleurs $X^2 - (\operatorname{tr} f)\,X$, il lui est égal :

$$\operatorname{rg} f = 1 \Longrightarrow \mu_f = \begin{cases} X^2 - (\operatorname{tr} f)\,X \text{ si } n \geq 2 \\ X - \operatorname{tr} f \text{ si } n = 1 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

Sanity check : quand $n > 0$, la matrice $\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ | & \diagdown & | \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}$ est un projecteur de rang 1 et de trace 1.

5. Soit $(A_1, A_2, ..., A_\ell)$ une liste finie de matrices carrées. En reprenant le cas diagonalisable ci-dessus, on montrerait que l'idéal annulateur de $\operatorname{Diag}(A_1, A_2, ..., A_\ell)$ est formé des polynômes annulant chaque A_i, *i. e.* multiple de chaque μ_{A_i}, *i. e.* multiple de leur p. p. c. m. :

$$\mu\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\ell \end{pmatrix} = \mu_{A_1} \vee \mu_{A_2} \vee \cdots \vee \mu_{A_\ell}.$$

Propriété

Soit V un sous-espace vectoriel stable par f. Alors $\mu_{f_{|V}}$ divise μ_f.

Démonstration

[26] Les restrictions « non scalaire » excluent le projecteur nul (*a fortiori* le cas pathologique où E est nul), la symétrie centrale et le projecteur-symétrie identité.

En abrégeant $M := \mu_f$, on a les égalités

$$M\left(f_{|V}\right) = M(f)_{|V} = 0_{|V},$$

donc M annule $f_{|V}$, donc divise son polynôme minimal, *c. q. f. d.*

Sanity check : pour chaque matrice carrée B, le polynôme minimal μ_A divise bien celui $\mu_A \vee \mu_B$ de $\begin{pmatrix} A & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix}$.

Exercices d'application

1.
   (a) *Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(a)$ est inversible ssi P est premier avec μ_a.*

   (b) *En déduire que μ_f est scindé (ou vaut 1) ssi chaque sous-espace vectoriel non nul stable par f contient un vecteur propre de f.*

2. *Abrégeons $\mu := \mu_f$ et soit $v \in E$.*

   (a) *Donner sens au générateur unitaire, noté*[27] μ_v, *du noyau de l'application linéaire*
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & [P(f)](v) \end{array} \right. .$$

   (b) *Montrer l'équivalence $\mu = \mu_v \iff E = \operatorname{Ker} \mu_v(f)$.*

   (c) *Montrer l'inclusion $E \subset \bigcup_{e \in F} \operatorname{Ker} \mu_e(f)$ pour une certaine partie finie $F \subset E$.*

   (d) *On impose K infini. Montrer alors que E ne peut être recouvert par des sous-espaces vectoriels stricts en nombre fini*

   (e) *En déduire (toujours quand K est infini) que μ vaut μ_e pour un certain vecteur $e \in E$.*

1.
   (a) Supposons P et μ_a premiers entre eux. Soient (par Bézout) U et V deux polynômes tels que
   $$PU + \mu_a V = 1.$$
   Évaluer en a donne alors
   $$1_{\mathcal{A}} = 1(a) = [PU + \mu_a V](a) = P(a)U(a) + \underbrace{\mu_a(a)}_{=0} V(a) = P(a)U(a),$$
   ce qui montre que $P(a)$ et $U(a)$ sont inverses l'un de l'autre.

[27] Le polynôme μ_v s'appelle le ***polynôme minimal*** du vecteur v (pour f).

Supposons $P(f) \in GL(E)$. L'exercice d'application 1 section 1.1 montrait que $P(f)^{-1}$ est un polynôme en $P(f)$, *a fortiori* un polynôme en f, mettons $P(f)^{-1} = U(f)$ pour un certain polynôme U. On a alors $PU(f) = P(f)U(f) = \mathrm{Id}$, donc $1 - PU$ annule f, *i. e.* est multiple de μ_f, mettons $1 - PU = \mu_f V$ pour un certain polynôme V, d'où une relation de Bézout $1 = PU + \mu_f V$ et la primalité relative de P et μ_f.

(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit S un sous-espace vectoriel non nul stable par f. Le polynôme $\mu_{f_{|S}}$ divise alors μ_f (qui est scindé ou vaut 1) et ne vaut pas 1 (car S est non nul), donc est scindé.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Décomposons $\mu_f = \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\nu_P}$ en produit d'irréductibles unitaires ($\mathcal{P}$ est ici fini et l'on a $v_P \geq 1$ pour chaque $P \in \mathcal{P}$). Si $\mathcal{P}$ est vide, alors $\mu_f = 1$ et on a terminé. Soit sinon $P \in \mathcal{P}$. Le noyau $\mathrm{Ker}\, P^{v_P}(f)$ est alors stable par f : s'il est nul, l'endomorphisme $P^{v_P}(f)$ est inversible, d'où (par le point précédent) les égalités $1 = P^{v_P} \wedge \mu_f = P^{v_p}$, ce qui est absurde puisque $v_p \geq 1$.

On peut donc évoquer un vecteur propre v dans ce noyau : notons λ sa valeur propre associée. On a alors l'égalité

$$0 = 0(v) = [P^{v_P}(f)](v) = P^{v_P}(\lambda)\, v, \text{ donc } \lambda \text{ est racine de } P^{v_P}, \textit{ i. e.} \text{ de } P,$$

ce qui force cet irréductible à valoir $X - \lambda$.

Finalement, chaque $P \in \mathcal{P}$ est scindé, donc le produit $\prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\nu_P} = \mu_f$ est scindé (ou vaut 1).

2.

(a) L'application considérée $\mathrm{eval}_v \circ \mathrm{eval}_f$ est bien linéaire (comme composée d'applications linéaires), donc son noyau est un sous-espace vectoriel de $K[X]$: montrons que ce noyau en est un *idéal*, la principalité de $K[X]$ donnant alors sens au générateur unitaire de cet idéal.

Soient P et π deux polynômes tels que $\pi(f)(v) = 0$. On a alors les égalités

$$[P\pi(f)](v) = [P(f)](\ \pi(f)(v)\ ) = [P(f)](0) = 0, \text{ ce qui conclut.}$$

(b) Vu les égalités $[\mu(f)](v) = 0(v) = 0$, le polynôme μ_f est dans le noyau précédent, donc est un multiple de μ_v, d'où les équivalences

$$\mu = \mu_v \overset{\mu_v \mid \mu}{\Longleftrightarrow} \mu \mid \mu_v \overset{\text{prop. de } \mu}{\Longleftrightarrow} \mu_v(f) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, \mu_v(f) = E.$$

(c) Par définition de μ_v, le vecteur v appartient au noyau $\mathrm{Ker}\, \mu_v(f)$, ce qui montre que ces noyaux recouvrent E lorsque v parcourt ce dernier :

$$E \subset \bigcup_{e \in E} \mathrm{Ker}\, \mu_e(f).$$

Puisque μ_v est un diviseur unitaire de μ, l'ensemble $\mathcal{D} := \{\mu_e\}_{e \in E}$ est inclus dans l'ensemble des diviseurs unitaires de μ, lequel est fini (puisque chaque polynôme de $K[X]$ n'a *modulo* association qu'un nombre fini de diviseurs), d'où une partie finie $F \subset E$ telle que $\mathcal{D} = \{\mu_e\}_{e \in F}$. On peut alors reparamétrer la réunion

$$\bigcup_{e \in E} \mathrm{Ker}\, \mu_e(f) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \mathrm{Ker}\, D(f) = \bigcup_{e \in F} \mathrm{Ker}\, \mu_e(f), \text{ ce qui conclut.}$$

(d) Soient par l'absurde $V_0, V_1, ..., V_m$ des sous-espaces vectoriels stricts recouvrant E où m est défini *minimal*. Par minimalité de m, on peut évoque un vecteur v hors de $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m$ (donc dans V_0) et un "point" a hors de V_0. Montrons que la droite $\Delta := a + Kv$ rencontre chaque V_i en au plus un point, l'inclusion

$$\Delta = E \cap \Delta \subset \bigcup_{i=0}^{m} \underbrace{V_i \cap \Delta}_{\text{fini}} \quad \begin{array}{l}\text{conduisant alors à la finitude de } \Delta,\\ \text{donc à celle de } K \text{ : contradiction.}\end{array}$$

Soit $i \in [1, m|]$. La différence de deux points de $V_i \cap \Delta$ est alors d'une part colinéaire à v (car v dirige Δ) d'autre part dans V_i (car V_i est stable par addition), donc est nulle puisque $v \notin V_i$ (et car V_i est stable par homothéties). D'autre part, si V_0 contient un point de Δ, en ajoutant à ce point un certain multiple du vecteur directeur u (qui est dans V_0), on trouvera alors dans V_0 le point a, ce qui est absurde.

(e) Supposons par l'absurde que $\operatorname{Ker} \mu_e(f)$ soit un sous-espace vectoriel *strict* de E pour chaque $e \in E$. Le point (iii) montre alors que E est recouvert par des sous-espaces vectoriels stricts en nombre fini et le point (iv) montre que cela n'est pas possible, d'où la contradiction.

Remarque – La démonstration précédente a l'avantage d'expédier le cas complexe (lequel peut aussi se montrer par récurrence en évoquant un hyperplan stable par f). Dans le cas général, en décomposant $\mu = \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\nu_P}$ en produit d'irréductibles, on montrerait pour chaque irréductible $P \in \mathcal{P}$ que chaque vecteur hors de $\operatorname{Ker} P^{\nu_P - 1}(f)$ a pour polynôme minimal P^{ν_P} puis l'on établirait l'implication $\mu_v \wedge \mu_w = 1 \Longrightarrow \mu_{v+w} = \mu_v \mu_w$ afin d'obtenir un vecteur de polynôme minimal μ.

---

2 Lien avec la réduction

Rappelons que le couple $\begin{pmatrix}\mathcal{A}\\ a\end{pmatrix}$ désigne $\begin{pmatrix}L(E)\\ f\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}M_n(K)\\ A\end{pmatrix}$.
On impose désormais E de dimension finie n.
Il fera donc sens de parler des éléments propres de a ainsi que de ses spectre, polynômes caractéristique et minimal.

2.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème (Cayley-Hamilton[28])

[28] La première démonstration de ce théorème, publiée au journal de Crelle, remonte à 1878 et est signée Ferdinand Georg Frobenius (bien qu'Arthur Cayley et William Hamilton aient également contribué à l'essor de la théorie matricielle en cette période).

Chaque élément de $\mathcal{A}$ est annulé par son polynôme caractéristique :

$$\chi_a(a) = 0.$$

Démonstration (non exigible)

Montrons le cas $a = f$. (On en déduira le cas $a = A$ en remplaçant f par l'endomorphisme $A\cdot$).

Fixons un vecteur $v \in E$. Nous allons exhiber un sous-espace vectoriel $V \subset E$ contenant v et stable[29] par f tel que, en abrégeant $\pi := \chi_{f_{|V}}$, l'endomorphisme $\pi(f)$ annule v. Nous en déduirons, en notant $D := \frac{\chi_f}{\pi}$ (qui est un polynôme), les égalités

$$\left[\chi_f(f)\right](v) = [D\pi(f)](v) = D(f)([\pi(f)](v)) = D(f)(0) = 0, \text{ ce qui conclura.}$$

Pour chaque naturel i, abrégeons $v_i := f^i(v)$ et notons d le plus petit naturel tel que soit libre[30] la famille $(v_0, v_1, ..., v_{d-1})$. Montrons alors que

$$f \text{ stabilise } V := \operatorname*{Vect}_{i \in [0,d|[} v_i.$$

D'une part, pour chaque $i \in [0, d-1|[$ le vecteur v_i est envoyé (par f) sur v_{i+1} qui reste dans V (car $i + 1 \in [0, d|[$), d'autre part, l'itéré v_d est lié aux précédents par minimalité de d, donc l'image $f(v_{d-1})$ reste dans V. Il en résulte, par linéarité de f, que l'image de chaque vecteur de $\mathrm{Vect}_{i\in[0,d-1|]} v_i$ reste dans V.

Nous avons dit que v_d était lié aux v_i pour $i \in [0, d|[$: on peut donc évoquer une famille $a \in K^{d+1}$ de scalaires tels que

$$\sum_{i=0}^{d} a_i v_i = 0 \text{ et même imposer } a_d = 1.$$

On en déduit la matrice de $f_{|V}$ dans la base $(v_0, v_1, ..., v_{d-1})$ de V :

$$\operatorname*{Mat}_{(v_0,v_1,...,v_{d-1})} f_{|V} = \begin{pmatrix} {\scriptscriptstyle 0} & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & {\scriptscriptstyle 0} & -a_{d-2} \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà rencontré cette matrice (*cf.* exemple 6 section **??**) et calculé son polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \pi = \chi_{f_{|V}} &= \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \text{ d'où } \pi(f) = \left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right)(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i, \text{ puis} \\ [\pi(f)](v) &= \left[\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right](v) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i(v) = \sum_{i=0}^{d} a_i v_i = 0, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

Remarques

[29] Pour construire une partie stable par une application donnée et contenant un élément donné de l'ensemble source, on *doit* penser aux itérés de cet élément par cette application.

[30] La famille $(v_i)_{i\in[0,d|[}$ étant vide pour $d = 0$, elle est libre (tautologique), ce qui donne sens à d.

• En termes de polynôme minimal, le théorème de Cayley-Hamilton affirme la divisibilité
$$\mu_a \mid \chi_a.$$
On en déduit la majoration
$$\deg \mu_a \leq n.$$

• Le théorème de Cayley-Hamilton admet de nombreuses démonstrations (aucune n'est exigible). En voici d'autres, brièvement esquissées pour la lectrice et le lecteur intéressés :

1. vérifier le théorème sur les matrices triangulaires par une récurrence "forte" (sur la nullité des colonnes) et utiliser la trigonalisabilité de chaque matrice complexe ;
2. vérifier le théorème sur les matrices diagonales et utiliser la densité des matrices diagonalisables complexes[31] ainsi que la continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$;
3. lorsque A est complexe, utiliser pour chaque complexe r assez petit en module les égalités (valides[32] pour chaque naturel N)
$$A^N = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(re^{i\theta}\right)^{N+1}}{re^{i\theta} - A} \frac{d\theta}{2\pi} \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} \left(re^{i\theta}\right)^{N+1} \frac{d\theta}{2\pi} = 0$$
et utiliser la comatrice pour faire apparaître un polynôme P s'annulant en 0 tel que $\chi_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} P\left(re^{i\theta}\right) \frac{d\theta}{2\pi}$;
4. (la plus courte à notre connaissance) utiliser l'identité $M^{\,t}\operatorname{com} M = (\det M)\, I_n$ dans l'algèbre $M_n(K(X))$ avec $M := XI_n - A$, d'où une matrice T telle que
$$T \times (XI_n - A) = \chi_A I_n \qquad \text{dans } M_n(K[X]),$$
appliquer l'isomorphisme canonique d'algèbres $M_n(K[X]) \cong M_n(K)[X]$ qui permet par exemple d'identifier[33]
$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} X-8 & 4X^3+\pi \\ eX^6 & X^6+\sqrt{2}X \end{pmatrix} \text{ de } M_2(\mathbb{R}[X]) \text{ et le polynôme}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix} X^6 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de } M_2(\mathbb{R})[X],$$
puis remplacer X par A (*i. e.* appliquer l'évaluation[34] en A) pour annuler le membre de gauche (*a fortiori* celui de droite $\chi_A(A)\, I_n$).

[31] *Cf.* chapitre complémentaire sur la topologie matricielle.

[32] *Cf.* chapitres sur l'intégration et les séries entières à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

[33] Cet isomorphisme est *canonique* car échange les bases canoniques de ces deux algèbres. Il doit sembler naturel au vu de l'exemple donné (mais démontrer qu'il s'agit bien d'un isomorphisme d'algèbres est pédestre et fastidieux – le prix à payer pour cette preuve sinon d'une grande élégance).

[34] Même si l'évaluation $\left\{\begin{array}{ccc} M_n(K)[X] & \longrightarrow & M_n(K) \\ \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i X^i & \longmapsto & \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i A^i \end{array}\right.$ ne préserve pas forcément la multiplication (l'anneau $M_n(K)$ des coefficients n'est pas commutatif), on montre aisément l'égalité $[TM](A) = T(A)\, M(A)$ lorsque A commute avec chaque coefficient du polynôme M, ce qui est le cas ici (les coefficients de $M = I_n X - A$ sont I_n et $-A$).

• Attention au raisonnement naïf (et faux) qui consiste à remplacer X par A dans la définition de $\chi_A = \det(XI_n - A)$ pour obtenir directement

$$\chi_A(A) \stackrel{?}{=} \det(AI_n - A) = \det(A - A) = 0.$$

D'une part le résultat est un *scalaire* $\det(AI_n - A)$ tandis qu'on devrait trouver une *matrice* $\chi_A(A)$, ce qui est un non-sens[35], d'autre part on suppose implicitement que « remplacer X par A » est une opération qui commute avec l'application déterminant, ce qui est faux (sauf cas trivial). La "magie" de la dernière preuve esquissée est qu'elle permet de réaliser cette intuition.

Pour la lectrice et le lecteur intéressés par les détails (non exigibles), précisons tout cela à l'aide de quelques notations.

Abrégeons[36] $\mathcal{M} := M_n(K)$, $\mathcal{P} := K[X]$, notons ε l'évaluation en A, $\iota : \lambda \mapsto \lambda I_n$ l'injection canonique de K dans $\mathcal{M}$ et φ l'isomorphisme $\mathcal{M}[X] \cong M_n[\mathcal{P}]$ de la preuve ci-dessus. Tout peut alors se voir sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}[X] & \overset{\widetilde{\varphi}}{\longrightarrow} & M_n[\mathcal{P}] & \overset{\det}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{P} \\ \downarrow \varepsilon & & & & \downarrow \varepsilon \\ \mathcal{M} & \overset{\det}{\twoheadrightarrow} & K & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathcal{M} \end{array}.$$

Le raisonnement naïf consiste à croire que chaque élément de $\mathcal{M}[X]$ (en haut à gauche) a même image dans $\mathcal{M}$ (en bas à droite) si l'on l'évalue suivant les flèches $\widetilde{\longrightarrow} \twoheadrightarrow \downarrow$ ou suivant les flèches $\downarrow \twoheadrightarrow \hookrightarrow$, croyance qui s'écrit[37]

$$\iota \circ \det \circ \varepsilon \stackrel{?}{=} \varepsilon \circ \det \circ \varphi.$$

En particulier, pour le polynôme $I_nX - A$, on obtiendrait la nullité souhaitée

$$\begin{array}{ccccc} I_nX - A & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \mathrm{Diag}(X, X, ..., X) - A & \overset{\det}{\longmapsto} & \chi_A \\ | \downarrow \varepsilon & & & & | \downarrow \varepsilon \\ 0 & \overset{\det}{\longmapsto} & 0 & \overset{\iota}{\longmapsto} & 0 \stackrel{?}{=} \chi_A(A) \end{array}.$$

On pourrait toutefois montrer que notre diagramme n'est jamais commutatif sauf cas trivial où A est scalaire. Voici une esquisse de preuve : si λ dénote une valeur propre de A, le polynôme $I_n(X - \lambda)$ a alors pour image $0 = (A - \lambda)^n$, d'où $A = \lambda I_n + N$ où N nilpotent ; le polynôme $I_n(X + 1 - \lambda)$ a pour image $1 = (N + 1)^n$, donc μ_N divise $(X + 1)^n - 1$, donc $\nu(N) = 1$ et $N = 0$. Pour le sens réciproque, tout développer (les vecteurs selon la base $(E_{i,j}X^d)$, le déterminant selon son expression polynomiale).

Exercices d'application

1. *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ *n'admet pas de racine carrée dans* $M_2(\mathbb{R})$.

[35] À moins d'avoir pensé à identifier un scalaire à sa matrice scalaire associée, ce qui pour le coup ne serait pas vraiment naïf.

[36] $\mathcal{M}$ pour « **m**atrices », $\mathcal{P}$ pour « **p**olynômes », ε pour « **é**valuation » et ι pour « **i**njection ».

[37] On dirait alors que le diagramme est ***commutatif***.

2. *Montrer que f possède un polynôme annulateur (non nul) de degré au plus $1+\operatorname{rg} f$. Discuter le majorant proposé.*
3. *On dit qu'un endomorphisme est **irréductible** (ou **simple**) ssi il stabilise exactement deux sous-espaces vectoriels. Montrer que f est irréductible ssi χ_f est irréductible. (Pour le sens direct, on pourra considérer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Vect}_{N\in\mathbb{N}}\left\{f^{\circ N}(v)\right\}$.)*

---

1. Soit par l'absurde $R \in M_2(\mathbb{R})$ une racine carrée de $C := \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. Cette dernière a pour polynôme minimal $(X+7)^2$, donc la racine R est annulée par $\left(X^2+7\right)^2$, *i. e.*
$$\mu_R \mid \left(X^2+7\right)^2.$$
Or le facteur X^2+7 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $\deg \mu$ vaut au plus 2, ce qui force $\mu_R = X^2+7$, d'où la nullité de $R^2+7I_2 = C+7I_2$: contradiction.
2. Notons P le polynôme caractéristique de l'induit $f_{|\operatorname{Im} f}$: son degré vaut la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ sous-jacent, à savoir $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$. Par ailleurs, on a pour chaque $v \in E$ les égalités
$$0 = 0\,(f(v)) \underset{\text{Hamilton}}{\overset{\text{Cayley-}}{=}} [P(f)]\,(f(v)) = [XP(f)]\,(v)\,,$$
ce qui montre que le polynôme XP annule P. Comme son degré vaut $1+\deg P = 1+\operatorname{rg} f$, on a terminé

   Lorsque f possède une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, son rang vaut $n-1$ et son polynôme minimal X^n, donc le majorant proposé est atteint. Par ailleurs, chaque polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à $n = \deg \mu_f$ divise strictement μ_f, donc serait le polynôme nul, ce qui montre que le majorant proposé ne peut être abaissé.
3. Si $n=0$, alors $\chi_f = 1$ n'est pas irréductible et $E = \{0\}$ ne possède qu'un seul sous-espace vectoriel, d'où l'équivalence souhaitée (cas pathologique). On imposera donc $n \geq 1$. Observer que f stabilise toujours $\{0\}$ et E.

   Supposons f réductible et soit $V \neq E$ un sous-espace vectoriel non nul stable par f. Alors $\chi\left(f_{|V}\right)$ divise χ_f et est de degré
$$\deg \chi\left(f_{|V}\right) = \dim V \in [1,n|[= \left[1, \deg \chi_f|\right[, \text{ donc } \chi_f \text{ n'est pas irréductible.}$$

   Supposons f irréductible. Soit $v \in E$ non nul : le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}_{N\in\mathbb{N}}\left\{f^{\circ N}(v)\right\}$ est alors stable par f et est non nul (car contient $f^0(v) = v$), donc vaut tout E, *i. e.* est de dimension n. En particulier, si d dénote un naturel tel que
$$f^d(v) \in \operatorname*{Vect}_{N\in[0,d|[}\left\{f^{\circ N}(v)\right\}, \text{ une récurrence immédiate donne livre alors l'inclusion}$$
$$\operatorname*{Vect}_{N\in\mathbb{N}}\left\{f^{\circ N}(v)\right\} \subset \operatorname*{Vect}_{N\in[0,d|[}\left\{f^{\circ N}(v)\right\}, \text{ d'où les comparaisons}$$
$$n = \dim \operatorname*{Vect}_{N\in\mathbb{N}}\left\{f^{\circ N}(v)\right\} \leq \dim \operatorname*{Vect}_{N\in[0,d|[}\left\{f^{\circ N}(v)\right\} = \operatorname*{rg}_{N\in[0,d|[}\left\{f^{\circ N}(v)\right\} \leq d.$$

Par conséquent, chaque polynôme $P \neq 0$ tel que $P(f)(v) = 0$ a un degré valant au moins n. Utilisons ce fait pour conclure.

Soit $P \mid \chi_f$, notons $Q := \frac{\chi_f}{P}$ et $w := [Q(f)](v)$. Si w est nul, alors Q est de degré au moins n par ce qui précède, donc P est constant et on a terminé. Dans le cas contraire, vu les égalités

$$[P(f)](w) = [P(f)]\left([Q(f)](v) \right) = [PQ(f)](v) = \left[\chi_f(f)\right](v) \underset{\text{Hamilton}}{\overset{\text{Cayley}}{=}} 0(v) = 0,$$

ce qui précède montre que P est de degré au moins n par ce qui précède, donc Q est constant et on a terminé

2.2 Spectre et polynômes annulateurs

Lemme[38]

Soit (λ, v) un couple propre de a. On a alors pour chaque polyôme $P \in K[X]$ l'égalité

$$[P(a)](v) = P(\lambda)\, v.$$

Démonstration

L'égalité à montrer étant linéaire en P (vérification à la main immédiate), on peut imposer $P = X^N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. On a alors les égalités

$$[P(a)](v) = \left[X^N(a)\right](v) = a^N(v) \underset{\text{immédiate}}{\overset{\text{récurrence}}{=}} \lambda^N v = P(\lambda)\, v, \text{ \textit{c. q. f. d.}}$$

Remarque – Si l'on ne veut vraiment pas vérifier la linéarité à la main, on peut dire que le membre de gauche s'écrit $\mathrm{eval}_v(\mathrm{eval}_a(P))$ où les deux évaluations (l'une fonctionnelle, l'autre polynomiale) sont linéaires et que le membre de droite s'écrit $\pi(\mathrm{eval}_\lambda(P), v)$ où l'évaluation en λ est linéaire et où la loi $\pi : (t, \alpha) \mapsto t\alpha$ est bilinéaire (loi externe de $\mathcal{A}$).

Corollaire

Le spectre de a est inclus dans l'ensemble des racines de chaque polynôme annulateur de a :

$$\begin{matrix} \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, a \\ \forall P \in K[X] \end{matrix}, \quad P(a) = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = 0.$$

Démonstration

Pour chaque polynôme P annulateur a et chaque couple propre (λ, v) de a, on a les égalités

$$P(\lambda)\, v \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{point}}{=}} [P(a)](v) = 0(v) = 0, \text{ d'où } P(\lambda) = 0 \text{ puisque } v \text{ est non nul.}$$

[38] Résultat et preuve inchangés si $\mathcal{A}$ n'est plus imposée de dimension finie.

Ce dernier corollaire est simple et rend de précieux services. Nous l'utiliserons pour décrire en termes de polynôme minimal d'une part la nilpotence, d'autre part la diagonalisabilité.

Sanity checks : un projecteur étant annulé par $X^2-X = X(X-1)$ et une symétrie par $X^2-1 = (X-1)(X+1)$, on retrouve les inclusions

$$\begin{cases} \operatorname{Sp} f \subset \{0,1\} & \text{si } f \text{ projecteur} \\ \operatorname{Sp} f \subset \{-1,1\} & \text{si } f \text{ symétrie} \end{cases}.$$

Exemples

1. On impose $K = \mathbb{C}$ et $\begin{cases} \operatorname{tr} A = n \\ A^2 = A^3 \end{cases}$. Montrons que A est la matrice identité.

   La matrice A est annulée par le polynôme $X^3 - X^2 = X^2(X-1)$, donc son spectre est inclus dans $\{0,1\}$. On en déduit

   $$\omega_0 + \omega_1 = \deg \chi_A = n = \operatorname{tr} A = \omega_0 0 + \omega_1 1 = \omega_1, \text{ d'où } \omega_0 = 0 \text{ (dans } \mathbb{C}),$$

   ce qui montre que A est inversible. Simplifier $A^2 = A^3$ donne alors $A = I_n$.

2. On impose $K = \mathbb{R}$ et $A^3 = A + I_n$. Montrons que A est de déterminant strictement positif.

   On peut factoriser

   $$I_n = A^3 - A = A(A - I_n)(A + I_n), \text{ d'où l'inversibilité de } A \text{ et } \det A \neq 0.$$

   Si ce dernier déterminant était négatif, on aurait alors

   $$\det(A + I_n) = \det A^3 < 0, \text{ d'où } \det(A - I_n) = \frac{1}{\det A \ \det(A + I_n)} > 0\,;$$

   la fonction $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ s'annulerait donc sur $]0,1[$ par le théorème des valeurs intermédiaires, d'où une valeur propre $\lambda \in \,]0,1[$, laquelle devrait être racine du polynôme annulateur $X^3 - X - 1$, ce qui imposerait $\lambda^3 = \lambda + 1 > 1$: *contradiction*.

   De manière plus méthodique, on aurait pu étudier des racines du polynôme annulateur $X^3 - X - 1$. On aurait trouvé une seule racine réelle, strictement positive, d'où $\det A > 0$.

Propriété

Le spectre d'un nilpotent est nul (sauf si $\mathcal{A}$ est nulle[39]) :

$$a \text{ nilpotent} \Longrightarrow \operatorname{Sp} a = \{0\} \qquad (\textit{sauf si } \mathcal{A} = \{0\}).$$

Démonstration

[39] Quand $\mathcal{A}$ est nulle, $\operatorname{Sp} a$ est vide (cas pathologique).

Soit a nilpotent, soit $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^\nu = 0$. Chaque valeur propre de a est alors racine du polynôme annulateur X^ν, d'où l'inclusion $\operatorname{Sp} a \subset \{0\}$.

L'inclusion réciproque équivaut à ce que 0 soit valeur propre de a, *i. e.* à la non-injectivité de a, ce que nous avons établi en remarque lorsque $\mathcal{A} \neq \{0\}$.

Propriété (hors programme[40])

Les valeurs propres de a sont les racines de μ_a.

Démonstration

Chaque valeur propre de a est racine de μ_a car ce dernier annule a.

Chaque racine de μ_a annule χ_a d'après Cayley-Hamilton, donc est racine de χ_a, *i. e.* est valeur propre de a.

Exercices d'application

1. *Déterminer les matrices complexes M de trace 88 telles que $M^3+81M = 18M^2$.*
2. *Déterminer les matrices complexes M de trace n telles que $M^n = I_n$.*
3. *Soient b et c deux naturels, soient $B \in M_b(K)$ et $C \in M_c(K)$ nilpotentes, soient λ et μ deux scalaires distincts et imposons A de la forme $\begin{pmatrix} \lambda I_b + B & ? \\ {\scriptstyle 0} & \mu I_c + C \end{pmatrix}$. Montrons que A est diagonalisable ssi $\left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$.*

---

1. Soit M une telle matrice. Elle est annulée par le polynôme

$$X^3 - 18^2 + 81X = X\left(X^2 - 18X + 81\right) = X\left(X - 9\right)^2,$$

donc son spectre est inclus dans $\{0, 9\}$. On en déduit les égalités

$$88 = \operatorname{tr} A = \omega_0 0 + \omega_9 9 = 9\omega_9, \text{ d'où la divisibilité } 9 \mid 88 : \text{contradiction.}$$

2. Soit M une telle matrice. Elle est annulée par le polynôme $X^n - 1$ simplement scindé (ou valant 1), donc est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{U}_n$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de M (listées avec multiplicité). On a alors les comparaisons

$$n = |n| = |\operatorname{tr} M| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n| = 1 + 1 + \cdots + 1 = n\,;$$

comme il y a égalité partout, la comparaison triangulaire utilisée force les λ_i à être sur une même demi-droite d'origine 0. Les valeurs propres de M étant par ailleurs sur un même cercle centré en 0, elles sont égales et l'égalité $\operatorname{tr} M = n$ montre l'inclusion $\operatorname{Sp} M \subset \{1\}$. Vu enfin la diagonalisabilité de M, cette dernière est scalaire est vaut I_n.

Réciproquement, la matrice identité convient.

[40] Bien qu'hors programme, cette propriété éclaire grandement la preuve d'un énoncé à suivre (lui au programme) qui caractérise la diagonalisabilité en termes de polynôme minimal.

3. La matrice B étant nilpotente, on a l'inclusion $\operatorname{Sp} B \subset \{0\}$, d'où celle

$$\operatorname{Sp}(\lambda I_b + B) = \operatorname{Sp} B + \{\lambda\} \subset \{\lambda\} \text{ et l'égalité } \chi_{\lambda I_b + B} = (X-\lambda)^b.$$

On calculerait de même $\chi_{\mu I_c + C} = (X-\mu)^c$, d'où l'on déduit

$$\chi_A = \chi \begin{pmatrix} \lambda I_b + B & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & \mu I_c + C \end{pmatrix} = \chi_{\lambda I_b + B} \chi_{\mu I_c + C} = (X-\lambda)^b (X-\mu)^c.$$

Or on a $A - \mu I_{b+c} = \begin{pmatrix} (\lambda-\mu) I_b + B & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & C \end{pmatrix}$ avec $(\lambda-\mu) I_b + B$ inversible (son spectre inclus dans $\{\lambda-\mu\}$ ne contient pas 0 car λ et μ sont distincts), d'où $\operatorname{rg}(A-\mu I_{b+c}) = b + \operatorname{rg} C$. On montrerait de même l'égalité $\operatorname{rg}(A-\lambda I_{b+c}) = c + \operatorname{rg} B$. On en déduit les équivalences

$$A \text{ diagonalisable} \overset{\lambda\neq\mu}{\iff} \begin{cases} \operatorname{rg}(A-\lambda I_{b+c}) = (b+c) - \omega_\lambda \\ \operatorname{rg}(A-\mu I_{b+c}) = (b+c) - \omega_\mu \end{cases} \iff \begin{cases} c + \operatorname{rg} B = (b+c) - b \\ b + \operatorname{rg} C = (b+c) - c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \operatorname{rg} B = 0 \\ \operatorname{rg} C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}, \text{ ce qui conclut.}$$

2.3 Nilpotents, diagonalisables, synthèse

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes[41] *:*

1. *il y a une base de E où la matrice de f est triangulaire stricte ;*
2. *f est trigonalisable et* $\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$ *;*
3. $\chi_f = X^n$ *;*
4. $\mu_f \mid X^n$ *;*
5. *f est nilpotent.*

Démonstration

(1)$\Longrightarrow$(2) Soit $\mathcal{B}$ une base de E où $T := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est triangulaire stricte. En particulier, T est triangulaire, donc f est trigonalisable. Le spectre $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} T$ se lit par ailleurs sur la diagonale ; il est nul (ou bien vide si la longueur de la diagonale est nulle).

(2)$\Longrightarrow$(3) χ_f est scindé ou vaut 1 (car f est trigonalisable) et sa seule racine éventuelle est 0 (car $\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$), donc vaut $(X-0)^{\deg \chi_f} = X^n$.

(3)$\Longrightarrow$(4) D'après Cayley-Hamilton, μ_f divise $\chi_f = X^n$.

(4)$\Longrightarrow$(5) Le polynôme $\mu_f = X^n$ annule f, d'où l'égalité $f^n = 0$ et la nilpotence de f.

[41] Lorsque $n \geq 1$, on remplacera l'inclusion spectrale par une égalité $\operatorname{Sp} f = \{0\}$.

(5)$\Longrightarrow$(1) On raisonne comme dans notre démonstration de

$$\chi_f \text{ scindé} \Longrightarrow f \text{ trigonalisable.}$$

Appelons *strictement trigonalisable* toute matrice semblable à une matrice triangulaire stricte. Pour chaque naturel d, on note[42] $\mathcal{N}_d$ l'énoncé

$$\forall M \in M_d(K), \ M \text{ nilpotente} \Longrightarrow M \text{ strictement trigonalisable.}$$

Montrons $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_d$ par récurrence[43].

L'unique matrice (vide) de $M_0(K)$ étant triangulaire stricte (*a fortiori* strictement trigonalisable), l'énoncé $\mathcal{N}_0$ se réduit à une implication tautologique dont le conséquent est valide, d'où $\mathcal{N}_0$.

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_d$. Soit $M \in M_{d+1}(K)$ nilpotente : la matrice M n'étant pas vide (car $d \in \mathbb{N}$), son spectre vaut $\{0\}$, donc on peut évoquer un vecteur propre $V \in K^{d+1}$ associé à 0, vecteur non nul que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice $M = \mathrm{Mat}_{b.\ c.}(M\cdot)$ est alors semblable à

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(M\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix} \text{ pour un certain bloc } B \in M_d(K).$$

Leurs puissances ν-ième sont donc semblables pour chaque naturel ν : or celle de M est nulle pour ν assez grand et celle de $\begin{pmatrix} 0 & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ {\scriptscriptstyle 0} & B^\nu \end{pmatrix}$, d'où la nullité de B^ν (pour ν assez grand) et la nilpotence de B, laquelle est donc (d'après $\mathcal{N}_d$) strictement trigonalisable, mettons $B = PTP^{-1}$ pour une certaine matrice T triangulaire stricte et pour un certain $P \in GL_d(K)$. Finalement, la matrice M est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix} = Q \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & T \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire stricte}} Q^{-1}, \text{ donc est strictement trigonalisable, d'où } T_{d+1}.$$

Remarques

• *Sanity check* : avec la divisibilité $\mu_a \mid X^n$ et l'égalité $\mu_a = X^{\nu(a)}$, on retrouve la majoration de l'indice de nilpotence de a par n (prouvée section **??**).

• L'homologue matriciel de cette proposition serait la chaîne d'équivalences suivante[44] :

$$\begin{array}{c}\textit{A est semblable à une} \\ \textit{matrice triangulaire stricte}\end{array} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{A trigonalisable} \\ \textit{et } \operatorname{Sp} A \subset \{0\} \end{array} \right. \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \chi_A = X^N \\ \Longleftrightarrow \mu_A \mid X^N \end{array} \Longleftrightarrow \textit{A nilpotente.}$$

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *a admet un polynôme annulateur simplement scindé ;*

[42] $\mathcal{N}$ comme « **n**ilpotent »

[43] En dimension 1, chaque matrice nilpotente est nulle, donc triangulaire stricte, d'où $\mathcal{N}_1$.

[44] Lorsque $n \geq 1$, on remplacera l'inclusion spectrale par une égalité $\operatorname{Sp} A = \{0\}$.

2. μ_a *est simplement scindé (ou vaut* 1*) ;*
3. μ_a *vaut* $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)$ *;*
4. a *est diagonalisable.*

Démonstration

(1)$\Longrightarrow$(2) Soit P un polynôme annulateur simplement scindé de a. Alors μ_a divise P (car P annule a), donc ou bien est constant (et vaut alors 1) ou bien est simplement scindé (car P est simplement scindé).

(2)$\Longrightarrow$(3) Supposons μ_a simplement scindé ou $\mu_a = 1$. Il s'écrit donc $\mu_a = \prod_{\lambda \in Z} (X - \lambda)$ où Z dénote l'ensemble des racines de μ_a. Or une propriété précédente énonce l'égalité $Z = \operatorname{Sp} a$.

(3)$\Longrightarrow$(4) Supposons $\mu_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)$. On a alors les égalités

$$E = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Ker} \mu_f (f) = \operatorname{Ker} \left[\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda) \right] (f) \overset{\text{lemme de déc.}}{\underset{\text{des noyaux}}{=}} \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \overbrace{\operatorname{Ker} \underbrace{[X - \lambda] (f)}_{= f - \lambda \operatorname{Id}}}^{= E_\lambda},$$

d'où la diagonalisabilité de f.

Pour le cas matriciel, appliquer ce qui précède quand $f = A\cdot$ donne l'implication

$$\begin{aligned} \mu_{A\cdot} &= \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A\cdot} (X - \lambda) \Longrightarrow A\cdot \text{ diagonalisable, } i.\ e. \\ \mu_A &= \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (X - \lambda) \Longrightarrow A \text{ diagonalisable, } c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

(4)$\Longrightarrow$(1) Supposons f diagonalisable et montrons que le polynôme $\mu := \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)$ annule f. Lorsque $n \geq 1$, ce polynôme est simplement scindé, ce qui conclura. (Si $n = 0$, alors f est l'endomorphisme nul, donc est annulé par le polynôme X simplement scindé.)

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} f$ et posons $P := \frac{\mu}{X - \lambda}$ (c'est un polynôme car λ est racine de μ). On a alors les égalités

$$\mu (f) = [(X - \lambda) P] (f) = P (f) \circ [X - \lambda] (f) = P (f) \circ [f - \lambda \operatorname{Id}],$$

d'où, en évoquant un vecteur propre v associé à λ et en évaluant en v, les égalités

$$[\mu (f)] (v) = [P (f)] \left(\underbrace{[f - \lambda \operatorname{Id}] (v)}_{= f(v) - \lambda v = 0} \right) = [P (f)] (0) = 0.$$

On en déduit par linéarité que $\mu (f)$ est nulle sur la somme des sous-espaces propres de f. Or cette somme vaut tout E par hypothèse, ce qui conclut[45].

Application : notons $\alpha := M \mapsto AM$ la multiplication à gauche par A dans $M_n (K)$. Nous avons vu dans l'exercice d'application **??** section **??** une base dans laquelle la

[45] Le cas matriciel s'obtient en imposant $f = A\cdot$.

matrice de α vaut $\text{Diag}(A, A, ..., A)$. Un polynôme donné annulant cette dernière ssi[46] il annule A, l'endomorphisme α est annulé par un polynôme simplement scindé ssi la matrice A l'est, d'où l'équivalence

$$M \mapsto AM \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable.}$$

Remarque – On pourrait également caractériser la *trigonalisabilité* en termes de polynôme minimal (hors programme) :

$$a \text{ trigonalisable} \iff \mu_a \text{ scindé (ou vaut 1).}$$

Corollaire

Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f. On a alors l'implication :

$$f \textit{ diagonalisable} \implies f_{|V} \textit{ diagonalisable.}$$

Démonstration

Soit P un polynôme annulateur de f simplement scindé. Vu les égalités

$$P\left(f_{|V}\right) = P(f)_{|V} = 0_{|V} = 0,$$

l'endomorphisme $f_{|V}$ est annulé par un polynôme simplement scindé, donc est diagonalisable.

Remarques

- Apprécier ici l'utilisation des polynômes : comment sinon exhiber une base de V formée de vecteurs propres de f ?
- Le calcul ci-dessus en remplaçant P par μ_f (sans hypothèse de scission) montre que μ_f annule $f_{|V}$. Il en résulte que le polynôme minimal de $f_{|V}$ divise celui de f :

$$\mu_{f_{|V}} \mid \mu_f.$$

Application : soit $g \in L(E)$. Montrons qu'il y a une base de E diagonalisant f et[47] g ssi ces derniers sont diagonalisables et commutent.

Si l'on dispose d'une telle base de codiagonalisation, les matrices de f et g dans cette base sont alors diagonales, donc d'une part ces matrices commutent (*i. e.* f et g commutent), d'autre part f et g sont diagonalisables.

Supposons à présent f et g diagonalisables et commutant. Soit $\lambda \in \text{Sp} f$. Puisque g commute avec f, il stabilise le sous-espace propre $E_\lambda(f)$. Vu que g est diagonalisable, l'induit $g_{|E_\lambda(f)}$ est diagonalisable. Or l'induit $f_{|E_\lambda(f)}$ est scalaire, donc a une matrice diagonale dans chaque base de $E_\lambda(f)$, en particulier dans chaque base diagonalisant $g_{|E_\lambda(f)}$.

Finalement, on peut évoquer une famille $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp} f}$ telle que $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de $E_\lambda(f)$ diagonalisant $g_{|E_\lambda(f)}$ et $f_{|E_\lambda(f)}$ pour chaque $\lambda \in \text{Sp} f$. En évoquant une concaténée $\mathcal{B}$ de cette famille, les matrices $\text{Mat}_\mathcal{B} f$ et $\text{Mat}_\mathcal{B} g$ seront alors chacune diagonales par blocs diagonaux, donc diagonales tout court, ce qui conclut[48].

[46] Plus directement, pour chaque polynôme P, l'endomorphisme $P(\alpha)$ est la multiplication à gauche par $P(A)$.

[47] On dit alors que f et g sont ***codiagonalisables*** et qu'une telle base les ***codiagonalise***.

[48] Le même argument (inséré dans une récurrence sur $\dim E$) fournirait la généralisation suivante : *les éléments de chaque partie fixée de $L(E)$ sont codiagonalisables ssi ils sont diagonalisables et commutent.* (Indication : considérer les induits sur les sous-espaces propres d'un élément non scalaire.)

Résumé

Il est agréable de tout synthétiser dans un unique tableau :

racines de χ_a	$=$	valeurs propres de a	$\overset{\text{limite}}{\underset{\text{programme}}{=}}$	racines de μ_a
$\forall\lambda,\ \dim E_\lambda = \omega_\lambda$ et χ_a scindé (ou 1)	$\Longleftrightarrow$	a diagonalisable	$\Longleftrightarrow$	μ_a simplement scindé (ou 1)
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
χ_a scindé (ou 1)	$\Longleftrightarrow$	a trigonalisable	$\overset{\text{hors}}{\underset{\text{programme}}{\Longleftrightarrow}}$	μ_a scindé (ou 1)
$\Uparrow$		$\Uparrow$		$\Uparrow$
$\chi_a = X^n$	$\Longleftrightarrow$	a nilpotent	$\Longleftrightarrow$	$\mu_a \mid X^n$

Nous avons rencontré deux cas remarquables de diagonalisabilité :

1. celui où a possède (au moins) n valeurs propres.
2. celui où a est scalaire (il/elle possède alors au plus une valeur propre, notée ci-après ρ) ;

Nous les rajoutons à la synthèse précédente[49] :

χ_a simplement scindé (ou 1)	$\Longleftrightarrow$	$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} a = n$	$\Longleftrightarrow$	μ_a possède n racines
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$\forall\lambda,\ \dim E_\lambda = \omega_\lambda$ et χ_a scindé (ou 1)	$\Longleftrightarrow$	a diagonalisable	$\Longleftrightarrow$	μ_a simplement scindé (ou 1)
$\Uparrow$		$\Uparrow$		$\Uparrow$
$E_\rho = E$ et $\chi_a = (X-\rho)^n$	$\Longleftrightarrow$	a scalaire ($= \rho 1_{\mathcal{A}}$)	$\Longleftrightarrow$	$\mu_a = X - \rho$ (ou 1)

Exercices d'application

1. *Pour chaque $a \in \mathcal{A}$, on appelle **adjoint** de a l'endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$ défini par*
$$\underset{a}{\operatorname{ad}} := x \mapsto [a, x] = ax - xa.$$
   (a) *Imposons A nilpotente. Montrer alors que l'adjoint ad_A est nilpotent. Étudier la réciproque.*

   (b) *On se donne une sous-algèbre de $L(E)$ dont l'adjoint de chaque élément est diagonalisable. Montrer que cette sous-algèbre est commutative.*

2. *Imposons $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que A^N est diagonalisable. Montrer alors que A est diagonalisable. Discuter les hypothèses.*
3. *Montrer que chaque matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de carré $-I_n$ est semblable à une diagonale de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

[49] Les quatre équivalences des première et dernière lignes sont autant de petits exercices (parfois déjà traités en partie) permettant de tester l'assimilation du cours, c'est pourquoi nous les laissons à la lectrice et au lecteur.

1. (a) Montrons $\operatorname{Sp} \operatorname{ad}_A \subset \{0\}$, ce qui conclura à la nilpotence de ad_A.
Soit (λ, V) un couple propre de ad_A. On a alors l'égalité

$\lambda V = \operatorname{ad}_A V = AV - VA$, d'où $VA = (A - \lambda I_n) V$, une récurrence immédiate donnant alors $\forall N \in \mathbb{N},\ VA^N = (A - \lambda I_n)^N V$, d'où l'on tire $(A - \lambda I_n)^n V = VA^n = V0 = 0$.

Puisque V est non nul, on ne peut pas simplifier par $(A - \lambda I_n)^n$, donc cette dernière matrice n'est pas inversible, d'où l'appartenance

$$\lambda \in \operatorname{Sp} A \underset{\text{nilpotente}}{\overset{A \text{ est}}{\subset}} \{0\}, \text{ ce qui conclut.}$$

Lorsque $A = I_n$, l'adjoint ad_A est nul donc nilpotent mais la matrice A n'est pas nilpotente (sauf cas pathologique $n = 0$ où l'équivalence est triviale), donc la réciproque est fausse en générale si $n \geq 1$.

(b) Notons[50] $\mathcal{S}$ la sous-algèbre donnée. Elle sera commutative ssi

$$\forall s, t \in \mathcal{S},\ \operatorname{ad}_s t = 0,\ i.\ e. \text{ ssi } \forall s \in S,\ (\operatorname{ad}_s)_{|\mathcal{S}} = 0.$$

Soit donc $s \in \mathcal{S}$. Son adjoint stabilisant $\mathcal{S}$ (car $\mathcal{S}$ est un sous-anneau de $L(E)$), il induit un endomorphisme de $\mathcal{S}$ qui est diagonalisable comme restriction de ad_s (diagonalisable par hypothèse) : la nullité de cet induit $(\operatorname{ad}_a)_{|\mathcal{S}}$ revient par conséquent à sa nilpotence, *i. e.* à la nullité de chacune de ses valeurs propres.

Soit donc (λ, v) un couple propre de cet induit et supposons $\lambda \neq 0$ par l'absurde. L'exercice d'application **??** section **??** montre alors que v est nilpotent, d'où (par le point précédent) la nilpotence de $(\operatorname{ad}_v)_{|\mathcal{S}}$. Or ce dernier est diagonalisable par hypothèse (car v est dans $\mathcal{S}$), donc est nul, d'où

$$\lambda v = \operatorname{ad}_s(v) = 0, \text{ ce qui est absurde car } \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ v \neq 0 \end{cases}.$$

2. Abrégeons $\Lambda := \operatorname{Sp} A^N$. La matrice A^N est diagonalisable, donc annulée par le polynôme $\prod_{\lambda \in \Lambda} (X - \lambda)$. On en déduit que le polynôme

$P := \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(X^N - \lambda\right)$ annule A. Montrons qu'il est simplement scindé (ou vaut 1).

Déjà, étant donnés λ et μ distincts dans Λ, les polynômes $X^N - \lambda$ et $X^N - \mu$ n'ont pas de racines en commun (la puissance N-ième d'une telle racine devant valoir λ d'une part et μ d'autre part). Il suffit donc de montrer que chaque facteur $X^N - \lambda$ est simplement scindé.

Soit donc $\lambda \in \Lambda$ et soit ρ une racine N-ième de λ (légitime car $N \in \mathbb{N}^*$). La matrice A étant inversible, A^N l'est aussi, donc aucune de ses valeurs propres n'est nulle, d'où $\lambda \neq 0$ puis $\rho \neq 0$, ce qui donne sens à la factorisation

$$X^N - \lambda = X^N - \rho^N = \rho^N \left(\left(\frac{X}{\rho} \right)^N - 1 \right);$$

[50] $\mathcal{S}$ pour « sous-algèbre »

le membre de droite étant simplement scindé, on a terminé[51].

Les trois hypothèses sont nécessaires : on ne peut rien dire si $N = 0$ (même si on peut élargir l'hypothèse $N \in \mathbb{N}^*$ en $N \in \mathbb{Z}^*$), la matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) tandis que son carré $-I_2$ l'est, et chaque nilpotent non nul (*i. e.* non diagonalisable) a une puissance nulle (donc diagonalisable).

3. Soit M une telle matrice. Elle est annulée par le polynôme $X^2 + 1$ qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ avec pour valeurs propres i ou $-i$ (les racines de X^2+1). Étant par ailleurs réelle, chacune de ses valeurs propres non réelles a même ordre que sa conjuguée, d'où $\omega_i = \omega_{-i}$, ce qui montre que M est semblable à une diagonale de blocs[52] $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

   Or la matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie aussi l'hypothèse de l'énoncé (quand $n =$ 2), donc est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. En notant P une matrice de passage[53] de $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ vers $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le calcul par blocs montre que la diagonale de $\frac{n}{2}$ blocs P est une matrice de passage de la diagonale de $\frac{n}{2}$ blocs $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ vers la diagonale de $\frac{n}{2}$ blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc M est semblable à cette matrice réelle diagonale par blocs.

   Il suffit pour conclure d'utiliser un résultat classique[54] : deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont dans $M_n(\mathbb{R})$.

2.4 Un pas vers la réduction de Dunford

La dernière proposition (au programme) de ce chapitre est un premier pas vers les réductions de Dunford et de Jordan (toutes deux hors programme, la première étant d'ailleurs nommée à tort car Camille Jordan et Claude Chevalley l'avaient établie resp. en 1870 et 1950 avant les travaux de Nelson Dunford).

Proposition

Imposons f annulé par un polynôme scindé. L'espace vectoriel E est alors somme directe de sous-espaces vectoriels stables chacun par f et sur chacun desquels f induit la somme d'une homothétie et d'un nilpotent.

[51] Autre argument (implicite) : $X^N - \lambda$ n'a aucune racine multiple (d'une part chaque racine de la dérivée NX^{N-1} est nulle, d'autre part 0 n'est pas racine de $X^N - \lambda$).

[52] Et, au passage, que le naturel $n = \omega_i + \omega_{-i} = 2\omega_i$ est pair.

[53] On peut par exemple imposer $P := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

[54] *Cf.* chapitre réduction1 section *extension des scalaires*.

Démonstration

Soit P un polynôme comme dans l'énoncé. En notant R son ensemble (non vide) des racines et $(\omega_\rho) \in \mathbb{N}^R$ la famille des ordres de multiplicité de ses racines, définissons[55]

$$n_\rho := f - \rho \operatorname{Id} \text{ et } E^\rho := \operatorname{Ker} n_\rho^{\omega_\rho} \text{ pour chaque } \rho \in R.$$

L'espace E est alors somme directe des E^ρ d'après le lemme de décomposition des noyaux :

$$E = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} \left[\prod_{\rho \in R} (X - \rho)^{\omega_\rho} \right] (f) = \bigoplus_{\rho \in R} \operatorname{Ker} (f - \rho \operatorname{Id})^{\omega_\rho} = \bigoplus_{\rho \in R} E^\rho.$$

Soit par ailleurs $\rho \in R$ fixé. L'espace E^ρ est alors le noyau d'un polynôme en f (à savoir $(X - \rho)^{\omega_\rho}$), donc est un sous-espace vectoriel de E stable par f. Par ailleurs, la restriction n_ρ à E^ρ fait sens (car f et $\rho \operatorname{Id}$ stabilisent E^ρ, donc leur différence aussi) et est nilpotente vu les égalités

$$\left([n_\rho]_{|E^\rho} \right)^{\omega_\rho} = \left(n_\rho^{\omega_\rho} \right)_{|E^\rho} = \left(n_\rho^{\omega_\rho} \right)_{|\operatorname{Ker}\left(n_\rho^{\omega_\rho} \right)} = 0_{E^\rho},$$

ce qui montre que $f = \rho \operatorname{Id} + n_\rho$ induit sur E^ρ la somme d'une homothétie et d'un nilpotent.

Remarques

- La démonstration reste inchangée si E n'est plus de dimension finie. En particulier, elle s'applique sur le corps des complexes dès que f admet un polynôme annulateur non constant.
- En utilisant la trigonalisabilité des nilpotents, on obtiendrait l'homologue matriciel de cette proposition :

si μ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs chacun triangulaires et à diagonale constante.

- Il nous arrivera de rencontrer certains objets fonctions de f définis par les restrictions de f à chacun des blocs d'une décomposition de E en sous-espaces vectoriels stables par f. La proposition précédente montre que l'on pourra alors imposer f somme d'un scalaire et d'un nilpotent, ce qui rendra de précieux services[56].
- Avec les notations précédentes, pour chaque $\lambda \in \operatorname{Sp} f$, l'induit f_λ a pour polynôme caractéristique $\chi_{f_\lambda} = (X - \lambda)^{\dim E^\lambda}$. Le produit de ces derniers valant χ_f (le voir par exemple matriciellement), égaler les ordres de multiplicités montre que

chaque espace caractéristique E^λ est de dimension la multiplicité ω_λ de la valeur propre correspondante.

[55] *Culture* : lorsque P est minimal en degré, les espaces E^λ pour λ décrivant $\operatorname{Vp} f$ sont appelés les ***sous-espaces caractéristiques*** de f.

[56] *Cf.* chapitre complémentaire sur la topologie des matrices.

• Rappelons que chaque famille $(f_\rho) \in \prod_{\rho \in R} L(E^\rho)$ définit un endomorphisme[57] sur $\bigoplus_{\rho \in R} E^\rho$ dont la restriction à E^ρ vaut f_ρ pour chaque $\rho \in R$.

Par exemple, la famille d'homothéties $(\rho \, \mathrm{Id})$ définit un endomorphisme diagonalisable (concaténer des bases de chaque E^ρ donne une base de vecteurs propres) et la famille de nilpotents (n_ρ) définit un nilpotent (car annulé après $\max_{\rho \in R} \omega_\rho$ itérations sur chacun des E^ρ, donc sur leur somme).

• On propose en complément de montrer que chaque matrice nilpotente est semblable à une diagonale de blocs de la forme[58] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouvera (avec la proposition précédente) que chaque matrice dont le polynôme minimal est scindé est semblable à une diagonale de blocs chacun de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

Réciproquement, un théorème (hors programme) de Camille Jordan affirme que deux matrices réelles sont semblables ssi elles ont même spectre complexe[59] et si, pour chacun de leurs valeurs propres complexes, les suites décroissantes des longueurs des blocs de la forme ci-dessus sont égales[60].

Exercices d'application

1. *On impose χ_A scindé. Montrer alors que A est somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente chacune dans $K[A]$.*
2. *Soit[61] $\mathcal{P}$ une $\mathbb{C}$-algèbre unifère commutative de dimension finie dont chaque nilpotent est nul. Montrer que $\mathcal{P}$ est isomorphe à l'algèbre produit $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{P}}$.*
3. *On impose χ_A scindé. Montrer alors que A est diagonalisable ssi*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A, \ \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) = \mathrm{rg}\left((A - \lambda I_n)^2\right).$$

---

1. Traitons pour alléger le cas où A possède *deux* valeurs propres, notées λ et μ et dont les ordres respectifs seront notés b et c La proposition précédente montre alors que A est semblable à

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_\lambda & 0 \\ 0 & A_\mu \end{pmatrix}}_{\text{notée } A'} := \begin{pmatrix} \lambda I_b + B & 0 \\ 0 & \mu I_c + C \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda I_b & 0 \\ 0 & \mu I_c \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} + \underbrace{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{\text{notée } N}.$$

[57] Appelé la ***somme directe*** de (f_ρ) suivant $\bigoplus_{\rho \in R} E^\rho$. Matriciellement : une diagonale de blocs de la forme $\mathrm{Mat}\, f^\rho$.

[58] Un tel bloc est dit de Jordan.

[59] En général, on peut remplacer $\mathbb{C}$ par un corps de décomposition des polynômes minimaux des matrices considérées.

[60] Pour plus de détails, on pourra consulter le bel ouvrage de Rached Mneimné sur la réduction des endomorphismes.

[61] $\mathcal{P}$ comme « **p**uissance »

pour certaines matrices nilpotentes B et C. Vu l'égalité

$$D = \begin{pmatrix} P(A_\lambda) & 0 \\ 0 & Q(A_\mu) \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} P \text{ dénote le polynôme constant } \lambda \\ Q \text{ dénote le polynôme constant } \mu \end{cases},$$

l'exercice d'application 3 section 1.1 montre cette dernière matrice est un polynôme en $\begin{pmatrix} A_\lambda & 0 \\ 0 & A_\mu \end{pmatrix} = A'$.

Concluons. Soit P une matrice inversible telle que $A = PA'P^{-1}$ et soit π un polynôme tel que $D = \pi(A')$. On a alors les égalités

$$PDP^{-1} = P\pi(A')P^{-1} = \pi\left(PA'P^{-1}\right) = \pi(A),$$

ce qui montre que $\pi(A)$ est diagonalisable, et l'on montrerait de même la nilpotence de $[X - \pi](A) = PNP^{-1}$. Additionner ces deux polynômes en A donne bien A, ce qui conclut.

2. Soit $\alpha \in \mathcal{P}$. Dans $L(\mathcal{P})$, l'endomorphisme $\alpha\cdot$ a un polynôme minimal (car $\mathcal{P}$ est de dimension finie) scindé ou valant 1 (car le corps de base est $\mathbb{C}$), donc est la somme d'un diagonalisable et d'un nilpotent ν. Le point précédent montre que l'on peut imposer $\nu = \pi(\alpha\cdot) = \pi(\alpha)\cdot$ pour un certain polynôme π. Puisque ν est nilpotent, l'itérer suffisamment de fois puis appliquer en 1 montre que $\pi(\alpha)$ est nilpotent dans $\mathcal{P}$, donc (par hypothèse) est nul. Ainsi, $\alpha\cdot$ est diagonalisable. Or, l'algèbre $\mathcal{P}$ étant commutative, les $\alpha\cdot$ commutent lorsque α décrit $\mathcal{P}$, donc sont *co*diagonalisables dans une certaine base $\mathcal{B}$. On vérifie alors aisément que l'application qui à chaque $\alpha \in \mathcal{P}$ associe le -uplet formé par la diagonale de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\cdot)$ est un isomorphisme d'algèbres.

Remarque – La lectrice et le lecteur auront bien sûr satisfait leur curiosité en vérifiant réciproquement que, pour chaque naturel d, l'algèbre produit $\mathbb{C}^d$ est bien une $\mathbb{C}$-algèbre unifère commutative ***réduite*** (*i. e.* dont 0 est le seul nilpotent).

3. Regardons tout d'abord le cas où A est nilpotente. Sa diagonalisabilité équivaut alors à sa nullité et son spectre est inclus dans $\{0\}$, de sorte qu'il s'agit d'établir l'équivalence

$$(f \text{ étant imposé nilpotent}) \qquad f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2.$$

Le sens direct est immédiat. Supposant $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$, l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ devient alors une égalité pour des raisons dimensionnelles et une récurrence immédiate montrerait pour chaque naturel $N > 0$ l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^N$. Pour N assez grand, on obtient $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} 0 = E$, *i. e.* $f = 0$.

Revenons au cas général et traitons pour alléger le cas où A possède *deux* valeurs propres. Avec les mêmes notations qu'à la question 1, la matrice A est semblable à

$$A' := \begin{pmatrix} \lambda I_b + B & 0 \\ 0 & \mu I_c + C \end{pmatrix}.$$

Comme à l'exercice d'application 3 section 2.2, on montre alors les égalités

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(A - \mu I_n) = b + \operatorname{rg} C \\ \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = \operatorname{rg} B + c \end{cases} \text{ et de même } \begin{cases} \operatorname{rg}\left((A - \mu I_n)^2\right) = b + \operatorname{rg} C^2 \\ \operatorname{rg}\left((A - \lambda I_n)^2\right) = \operatorname{rg} B^2 + c \end{cases},$$

d'où les équivalences

$$\forall\rho\in\operatorname{Sp}A,\ \operatorname{rg}(A-\rho I_n)=\operatorname{rg}\left((A-\rho I_n)^2\right)\Longleftrightarrow\begin{cases}\operatorname{rg}C=\operatorname{rg}C^2\\ \operatorname{rg}B=\operatorname{rg}B^2\end{cases}$$

$$\underset{\text{nilpotentes}}{\overset{C\text{ et }B}{\Longleftrightarrow}}\begin{cases}C=0\\ B=0\end{cases}\underset{\text{section 2.2}}{\overset{\text{exercice 3}}{\Longleftrightarrow}}A'\text{ diagonalisable}\Longleftrightarrow A\text{ diagonalisable.}$$

---

3 Compléments (hors programme) sur les nilpotents

On impose toujours E de dimension finie n.

Pour chaque $N\in\mathbb{N}^*$, notons $J_N:=\begin{pmatrix}0 & I_{N-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ la matrice nilpotente d'indice N canonique. On a ainsi :

$$J_1=(0)\,,\ J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ J_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ J_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}...$$

Proposition – Définition

Quand f est nilpotent, il y a une longueur $\ell\in[0,n|]$ et une suite $(n_i)_{i\in[1,\ell|]}\in\mathbb{N}^{*\ell}$ décroissante, chacune uniques, telles que f a une matrice valant $\operatorname{Diag}(J_{n_1},J_{n_2},...,J_{n_\ell})$.

*La matrice précédente s'appelle la **réduite de Jordan** de f et est fonction du n-uplet décroissant $\left(\operatorname{rg}f,\operatorname{rg}f^2,...,\operatorname{rg}f^n\right)$.*

Démonstration

Imposons f nilpotente et notons r son indice de nilpotence.

1. **Existence**. On raisonne par récurrence sur n (sans montrer la décroissance, laquelle découlera immédiatement d'un réordonnement des blocs J_{n_i}) Quand $n=0$, la longueur nulle et la suite vide conviennent ; imposons donc $n\geq 1$. L'indice r vaut alors au moins 1, donc l'itéré f^{r-1} fait sens et l'on peut évoquer un vecteur $v\notin\operatorname{Ker}f^{r-1}$. On note alors φ la forme linéaire coordonnée de $f^{r-1}(v)$ dans une base de E obtenue en complétant la famille libre $\left(f^{r-1}(v)\right)$ et l'on définit
$$V:=K[f](v)\ \text{ et }\ S:=\bigcap_{i\in[0,r|[}\operatorname{Ker}\left(\varphi\circ f^i\right).$$
Il est clair que V est stable par f et l'on vérifiera aisément que la famille $\left(v,f(v),f^2(v),...,f^{r-1}(v)\right)$ en est une base dans laquelle l'induit $f_{|V}$ a pour matrice J_r. Pour conclure, il suffit de

montrer que l'espace S est un supplémentaire de V stable par f :

en effet, la dimension $\dim S$ sera alors strictement inférieure à n (car S ne contiendra pas le vecteur $f^{r-1}(v)$ non nul de V) et l'on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence sur l'induit $f_{|S}$.

Puisque $\operatorname{Ker}(\varphi \circ f^r) = \operatorname{Ker}(\varphi \circ 0) = \operatorname{Ker} 0 = E$, on peut indexer l'intersection définissant S par $[0, r|]$ au lieu de $[0, r|[$. Ainsi, pour chaque $s \in S$, pour chaque $i \in [0, r|[$, le vecteur s est dans $\operatorname{Ker}\left(\varphi \circ f^{i+1}\right)$ (même si $i = r-1$), ce qui s'écrit $f(s) \in \operatorname{Ker}\left(\varphi \circ f^i\right)$, donc $f(s)$ reste dans S, d'où la stabilité de S par f.

Soit $s \in S \cap V$ supposé non nul par l'absurde, mettons $s = [P(f)](v)$ pour un certain polynôme P non nul dont on notera c le coefficient devant $X^{\operatorname{val} P}$. Puisque $f^r = 0$, on peut supposer $\operatorname{val} P < r$, ce qui permet d'utiliser l'appartenance $s \in S \subset \operatorname{Ker}\left(\varphi \circ f^{r-1-\operatorname{val} P}\right)$, laquelle se réécrit $\varphi\left(c f^{r-1}(v)\right) = 0$. Or c est non nul et $\varphi\left(f^{r-1}(v)\right) = 1$ (par définition de φ), ce qui est absurde. Par conséquent, S et V sont en somme directe.

Enfin, la dimension de S, intersection de r hyperplans, est minorée par[62] $n - r = n - \dim V$, ce qui montre que la somme directe $S \oplus V$ est de dimension au moins n, donc vaut tout E.

2. **Unicité**. On raisonne matriciellement. Imposons A de la forme $\operatorname{Diag}(J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots, J_{n_\ell})$. Pour chaque naturel N, on a alors les égalités[63]

$$\operatorname{rg} A^N = \operatorname{rg} \operatorname{Diag}\left(J_{n_1}^N, J_{n_2}^N, \ldots, J_{n_\ell}^N\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{rg} J_{n_i}^N = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & I_{[n_i - N]^+} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\ell} [n_i - N]^+ ,$$

$$\text{d'où } \operatorname{rg} A^N - \operatorname{rg} A^{N+1} = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{[n_i - N]^+ - [n_i - N - 1]^+}_{=1 \text{ si } N < n_i \quad \text{et} \quad =0 \text{ si } N \geq n_i} = \operatorname{Card}\{i \in [1, \ell|] \ ; \ n_i > N\},$$

$$\text{d'où } \operatorname{Card}\{i \in [1, \ell|] \ ; \ n_i = N\} \overset{\text{si } N \geq 1}{=} \operatorname{Card}\{i \in [1, \ell|] \ ; \ n_i \geq N\} - \operatorname{Card}\{i \in [1, \ell|] \ ; \ n_i > N\}$$
$$= \left(\operatorname{rg} A^{N-1} - \operatorname{rg} A^N\right) - \left(\operatorname{rg} A^{N+1} - \operatorname{rg} A^N\right).$$

La suite (n_i) prolongée par une infinité de 0 étant décroissante, elle est entièrement déterminée par les cardinaux ci-dessus, lesquels ne dépendent que des rangs des itérés de A. La longueur ℓ quant à elle est le plus grand indice où cette suite (infinie) prend une valeur non nulle.

Enfin, la suite $\left(\operatorname{rg} A^N\right)$ décroît puisque la différence $\operatorname{rg} A^N - \operatorname{rg} A^{N+1}$ est un cardinal (donc positif) pour chaque naturel N et, vu les égalités $\operatorname{rg} A^0 = n$ et $\operatorname{rg} A^N = 0$ pour chaque naturel $N \geq n$, cette suite est fonction du n-uplet $\left(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} A^2, \ldots, \operatorname{rg} A^n\right)$, ce qui conclut.

Remarque – La démonstration ci-dessus pourrait s'adapter pour montrer que chaque matrice est semblable à une diagonale de matrices compagnes de polynômes formant une suite décroissante pour la divisibilité (réduite dite de Frobenius). On vérifiera que la réduite de Frobenius d'un nilpotent est sa réduite de Jordan.

Exercices d'application

[62] *Fait* : intersecter par un hyperplan fait décroître la dimension au plus de 1.
[63] L'exposant + dénote une *partie positive*.

1. *Montrer que chaque matrice est semblable à sa transposée.*
2. *Soit $B \in M_n(K)$. Montrer que A et B sont semblables ssi*[64]

$$\forall \lambda \in K,\ \forall i \in [1,n|],\ \operatorname{rg}\left((A-\lambda I_n)^i\right) = \operatorname{rg}\left((B-\lambda I_n)^i\right).$$

3. *Montrer que f admet un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables ssi K est fini ou s'il y a un vecteur $v \in E$ tel que $E = K[f](v)$ (un tel endomorphisme f est dit* ***cyclique****). On pourra montrer pour le sens réciproque l'égalité $\mu_f = \chi_f$.*

---

1. Le résultat est valide pour les matrices de la forme J_N (utiliser la matrice de passage $\sum_{x+y=n+1} E_{x,y}$ formée d'une anti-diagonale de 1), donc est valide pour les diagonales de telles matrices (mettre les matrices de passages bout à bout), *a fortiori* pour les matrices nilpotentes (d'après la proposition précédente), donc pour les sommes d'une matrice nilpotente et d'une matrice scalaire (car chaque matrice scalaire est inchangée par conjugaison), donc pour les diagonales de telles matrices (mettre les matrices de passages bout à bout). Or, en évoquant un corps L où μ_A se scinde et dont K est un sous-corps, la matrice A est semblable dans $M_n(L)$ à une telle diagonale (d'après la proposition section 2.4), donc est semblable à ${}^tA$ dans $M_n(L)$, donc lui est semblable dans $M_n(K)$ d'après l'exercice d'application **??** section **??**.

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Rajouter une homothétie ne changeant pas la similitude, les matrices $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables, donc chacune de leurs itérées aussi, *a fortiori* ont même rang.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Remplacer i par 1 montre que A et B ont même spectre. (Ce remplacement est légitime si $n \geq 1$; sinon A et B sont égales donc semblables).

   Soit L un corps où χ_A et χ_B se scindent et dont K est un sous-corps. La proposition de la section 2.4 montre alors que A est semblable dans $M_n(L)$ à une diagonale (lorsque λ décrit $\operatorname{Sp}_L A$) de blocs $A_\lambda := \lambda I_{\omega_\lambda} + N_\lambda$ où N_λ est nilpotente (d'indice au plus $\omega_\lambda \leq n$).

   Soit $\mu \in L$: la matrice $(A - \mu I_n)$ est alors semblable à une diagonale de blocs $(\lambda - \mu) I_{\omega_\lambda} + N_\lambda$ et, chacun de ces blocs étant inversible si $\mu \neq \lambda$ (car de spectre $\{\lambda - \mu\}$ ne contenant pas 0), on a l'égalité des corangs

$$n - \operatorname{rg}(A - \mu I_n) = \omega_\mu - \operatorname{rg} N_\mu.$$

   On montrerait de même et plus généralement les égalités

$$\begin{array}{c}\forall \lambda \in L \\ \forall i \in [1,n|]\end{array},\ n - \operatorname{rg}\left((A-\lambda I_n)^i\right) = \omega_\lambda - \operatorname{rg} N_\lambda^i,$$

   ce qui permet de réécrire les hypothèses sous la forme

$$\begin{array}{c}\forall \lambda \in L \\ \forall i \in [1,n|]\end{array},\ \omega_\lambda(A) - \operatorname{rg}\left[N_\lambda(A)^i\right] = \omega_\lambda(B) - \operatorname{rg}\left[N_\lambda(B)^i\right].$$

[64] Théorème d'Eduard Weyr publié en 1885. Pour une histoire de son lien avec le théorème de Jordan, on renvoie à l'œuvre (déjà mentionnée) de F. Brechmacher.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_K A = \mathrm{Sp}_K B$. Remplacer i par n montre alors l'égalité $\omega_\lambda(A) = \omega_\lambda(B)$, d'où l'égalité des suites $\left(\mathrm{rg}\, N_\lambda(A)^i\right)_{i\in[1,\omega_\lambda(A)|]}$ et $\left(\mathrm{rg}\, N_\lambda(B)^i\right)_{i\in[1,\omega_\lambda(B)|]}$, ce qui montre que les matrices nilpotentes $N_\lambda(A)$ et $N_\lambda(B)$ ont même réduite de Jordan, *a fortiori* sont semblables, d'où la similitude de A_λ et B_λ. Recoller ces blocs montre que A et B sont semblables dans $M_n(L)$, donc dans $M_n(K)$

3. $\boxed{\Longrightarrow}$ Les espaces $K[f](v)$ sont stables et en nombre fini lorsque v décrit E, donc E est réunion finie de sous-espaces $K[f](v)$. Si K est infini, l'un de ces espaces doit valoir E (d'après un lemme classique démontré dans l'exercice d'application 2d section 1.3), ce qui conclut.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si K est fini, l'espace vectoriel E (qui est isomorphe à $K^{\dim E}$) est de cardinal $(\mathrm{Card}\, K)^{\dim E}$, donc admet un nombre fini de parties, *a fortiori* un nombre fini de sous-espaces vectoriels (en particulier de sous-espaces vectoriels stables par f).

Soit sinon un v comme dans l'hypothèse. Abrégeons $d := \deg \mu_f$. De la nullité de $\left[\mu_f(f)\right](v)$ l'on déduit l'appartenance $f^d(v) \in \mathrm{Vect}_{i\in[0,d|[}\, f^i(v)$, d'où par une récurrence immédiate l'égalité

$$K[f](v) = \operatorname*{Vect}_{i\in[0,d|[} f^i(v).$$

Prendre les dimensions donne alors

$$n = \dim E = \dim K[f](v) = \dim \operatorname*{Vect}_{i\in[0,d|[} f^i(v) = \mathrm{rg}\, \left\{f^i(v)\right\}_{i\in[0,d|[} \leq \mathrm{Card}\,[0,d|[= d,$$

ce qui montre l'égalité $d = n$, *i. e.* $\deg \mu_f = \deg \chi_f$, d'où l'on déduit $\mu_f = \chi_f$ (d'après Cayley-Hamilton), *i. e.* $\mu_A = \chi_A$ en imposant que A soit une matrice de f. Raisonnons à présent matriciellement.

Soit L un corps où χ_A se scinde et dont K est un sous-corps. La matrice A est alors semblable dans $M_n(L)$ à une diagonale (lorsque λ décrit $\mathrm{Sp}_L A$) de blocs $A_\lambda := \lambda I_{\omega_\lambda} + N_\lambda$ où N_λ est nilpotente (donc d'indice au plus ω_λ). Puisque $(X-\lambda)^{\omega_\lambda}$ annule A_λ pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}_L A$, on a les divisibilités

$$\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, A} (X-\lambda)^{\omega_\lambda} = \chi_A = \mu_A = \bigvee_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, A} \mu_{A_\lambda} \mid \bigvee_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, A} (X-\lambda)^{\omega_\lambda} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, A} (X-\lambda)^{\omega_\lambda} \ ;$$

les deux membres extrêmes étant égaux, on a égalité partout (*modulo* association). Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_L A$: on a alors l'égalité $\mu_{A_\lambda} = (X-\lambda)^{\omega_\lambda}$, *i. e.* $\mu_{A_\lambda - \lambda\,\mathrm{Id}} = X^{\dim E^\lambda}$, ce qui montre que la matrice nilpotente $N_\lambda \in M_{\omega_\lambda}(L)$ est d'indice ω_λ, donc stabilise exactement $\omega_\lambda + 1$ sous-espaces vectoriels (les noyaux de ses itérés, *cf.* exercice d'entraînement 3.a), ce qui revient à dire que A_λ stabilise exactement $\omega_\lambda + 1$ sous-espaces vectoriels (ajouter une homothétie ne change pas le caractère stable d'un sous-espace vectoriel). La remarque finale de l'exercice d'application 3 section 1.1 montre alors (avec une récurrence immédiate) que A stabilise exactement $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_L A} (\omega_\lambda + 1)$ sous-espaces vectoriels de L^n, donc A ne stabilise d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de K^n, *c. q. f. d.*

Remarque – Cet exercice riche est souvent posé dans le cadre plus simple où f est diagonalisable, la cyclicité de f équivalant alors à la simplicité de chacune de ses valeurs propres. On utilisera d'une part le fait qu'un plan propre inclut (si K est infini) une infinité de droites stables, d'autre part la décomposition $S = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, f} (S \cap E_\lambda)$ pour chaque chaque sous-espace vectoriel S stable par f.

4 Le point des compétences

Formulaire

On évoque pour tout ce formulaire :

1. K un corps ;
2. E un K-espace vectoriel ;
3. n un naturel ;
4. f et g deux endomorphismes dans $L(E)$;
5. A et B deux matrices dans $M_n(K)$.

Afin d'unifier chaque proposition ou définition dépendant de f et de $L(E)$ avec son homologue matriciel traitant de A et de $M_n(K)$,

$$\text{nous abrégerons } \binom{\mathcal{A}}{a} \text{ pour désigner } \binom{L(E)}{f} \text{ ou bien } \binom{M_n(K)}{A}.$$

1. Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

- Est un morphisme de K-algèbres l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ P =: \sum_{i\geq 0} c_i X^i & \longmapsto & P(a) := \sum_{i\geq 0} c_i a^i \end{array}\right. \quad \text{où } a^0 = 1_{\mathcal{A}} = \left\{\begin{array}{l} I_n \text{ si } \mathcal{A} = M_n(K) \\ \mathrm{Id}_E \text{ si } \mathcal{A} = L(E) \end{array}\right. .$$

L'image $P(a)$ de chaque polynôme P s'obtient en remplaçant dans P son indéterminée par a.

- Le noyau de $\left\{\begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}\right.$ s'appelle l'***idéal annulateur*** de a :

$$[\text{idéal annulateur de } a] := \{P \in K[X] \ ; \ P(a) = 0\}.$$

- L'image de $\left\{\begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}\right.$ est la sous-K-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par a, notée

$$K[a] := \{P(a) \ ; \ P \in K[X]\}.$$

Cette sous-algèbre est commutative :

$$K[a] \text{ sous-algèbre commutative de } \mathcal{A}.$$

On impose à présent E de dimension finie.

- L'idéal annulateur de a est engendré par un unique polynôme unitaire, appelé le ***polynôme minimal*** de a et noté

$$\mu_a := \text{le générateur unitaire de l'idéal annulateur de } a.$$

• La sous-algèbre $K[a]$ admet pour base la famille $\left(1, a, a^2, ..., a^{\deg \mu_a - 1}\right)$:

$$K[a] = \bigoplus_{i \in [0, \deg \mu_a[} K a^i.$$

• Pour évaluer un polynôme en a en un vecteur propre de a, l'évaluer d'abord en la valeur propre associée puis multiplier le vecteur propre en question par le scalaire obtenu :

$$\begin{array}{c} \forall (\lambda, v) \text{ propre pour } a \\ \forall P \in K[X] \end{array}, \ [P(a)](v) = P(\lambda) v.$$

• Le spectre de a est inclus dans l'ensemble des racines de chaque polynôme annulateur de a :

$$\begin{array}{c} \forall \lambda \in \operatorname{Sp} a \\ \forall P \in K[X] \end{array}, \ P(a) = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = 0.$$

• **Théorème de Cayley-Hamilton** : chaque élément de $\mathcal{A}$ est annulé par son polynôme caractéristique (démonstration non exigible) :

$$\chi_a(a) = 0.$$

2. Lemme de décomposition des noyaux

• Chaque n-uplet $\overrightarrow{P}$ de polynômes de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux vérifie l'égalité

$$\operatorname{Ker}\ [P_1 P_2 \cdots P_n](f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_n(f).$$

3. Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

On impose E de dimension finie n.

• Chaque élément de $\mathcal{A}$ est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou encore (quand $\mathcal{A}$ est non nulle) ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples :

$$\begin{array}{rcl} a \text{ diagonalisable} & \Longleftrightarrow & \exists P \in K[X], \ \begin{cases} P \text{ scindé à racines simples} \\ P(a) = 0 \end{cases} \\ & \overset{\text{si } n \geq 1}{\Longleftrightarrow} & \mu_a \text{ scindé à racines simples.} \end{array}$$

• Le polynôme minimal de chaque endomorphisme induit divise celui de l'endomorphisme induisant :

$$\forall V \text{ sous-espace vectoriel de } E, \ f(V) \subset V \Longrightarrow \mu_{f_{|V}} \mid \mu_f.$$

• La diagonalisabilité de chaque endomorphisme de E implique celle de l'endomorphisme qu'il induit sur chaque sous-espace vectoriel de E qu'il stabilise :

$$\forall V \text{ sous-espace vectoriel de } E, \ f(V) \subset V \Longrightarrow \left[f \text{ diagonalisable} \Longrightarrow f_{|V} \text{ diagonalisable}\right].$$

4. Endomorphismes à polynôme minimal scindé

- Si f est annulé par un polynôme scindé, l'espace vectoriel E est alors somme directe de sous-espaces vectoriels stables chacun par f et sur chacun desquels f induit la somme d'une homothétie et d'un nilpotent.

- Si μ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs chacun triangulaires et à diagonale constante.

Exercices d'entraînement

Le chapitre précédent suffit pour résoudre les exercices 3, 5, 6, 9 et 10.

On fixe un corps K, un K-espace vectoriel E, un naturel n et un endomorphisme $f \in L(E)$. (La lettre A reste "libre".)

1. ★*Soit* $A \in M_n(K)$.
   (a) *Imposons* $K \subset \mathbb{C}$. *Montrer alors l'équivalence*
   $$A \text{ diagonalisable} \iff \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ diagonalisable.}$$
   (b) *Soit* $C \in M_n(K)$ *commutant avec* A. *Montrer alors l'équivalence*
   $$\begin{pmatrix} A & C \\ {\scriptscriptstyle 0} & A \end{pmatrix} \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} A \text{ diagonalisable} \\ C \text{ nulle} \end{cases}.$$
   Discuter l'hypothèse de commutativité.
2. ★★*On impose* E *de dimension finie* n. *Montrer alors que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$ *;*
   (b) $\operatorname{Ker} f$ *admet un supplémentaire stable par* f *;*
   (c) $\operatorname{val} \mu_f \leq 1$ *;*
   (d) f *est annulé par un polynôme de valuation au plus* 1.
3. ★★*Décrire le commutant de chaque matrice diagonalisable ainsi que la dimension de ce commutant.*
4. ★★
   (a) *Soit* G *un sous-groupe de* $GL_n(K)$ *dont chaque élément est involutif. Montrer que* G *est fini de cardinal au plus* 2^n.
   (b) *Soient* $a, b \in \mathbb{N}$ *tels que les groupes* $GL_a(K)$ *et* $GL_b(K)$ *sont isomorphes. Montrer l'égalité* $a = b$.
5. ★★
   (a) *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *semblable à* A^N *pour chaque* $N \in \mathbb{N}^*$. *Montrer l'inclusion* $\operatorname{Sp} A \subset \{0, 1\}$.
   (b) *Soit* $\varphi : SL_n(\mathbb{Q}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$ *un morphisme de groupes. Montrer que* φ *est constant. (On pourra admettre que chaque matrice orthogonale est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$.*)*
6. ★★*Pour chaques matrices* M *et* N *dans* $M_n(K)$, *on appelle* ***produit tensoriel*** *de* M par N *la matrice par blocs*
   $$M \otimes N := (m_{i,j} N)_{i,j \in [1,n|]} \text{ (prononcer « } M \textbf{ tenseur } N \text{ »).}$$
   Soient A *et* B *deux matrices dans* $M_n(K)$, *soit* A' *semblable à* A *et soit* B' *semblable à* B.

(a) *Montrer que l'endomorphisme* $M \mapsto A\ M\ {}^tB$ *de* $M_n(K)$ *a pour matrice* $A \otimes B$ *dans la base*

$$(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{3,1} ..., E_{n,1}, \quad E_{1,2}, E_{2,2}, E_{3,2} ..., E_{n,2}, \quad ..., \quad E_{1,n}, E_{2,n}, E_{3,n} ..., E_{n,n}).$$

(b) *En déduire que les trois matrices* $A \otimes B$, $A' \otimes B'$ *et* $B \otimes A$ *sont semblables.*

(c) *Montrer que* $A \otimes B$ *est diagonalisable si* A *et* B *le sont. Étudier la réciproque.*

(d) *Lorsque* $K = \mathbb{C}$, *montrer l'égalité spectrale*

$$\operatorname{Sp}(A \otimes B) = (\operatorname{Sp} A)(\operatorname{Sp} B) \qquad \text{(multiplication complexe "parties")}$$

et préciser les ordres de multiplicités de chaque valeur propre de $A \otimes B$.

7. ★★

(a) *Soit* v *un vecteur de* E *dont les itérés par* f *engendrent tout* E. *Montrer alors que chaque endomorphisme de* E *commutant avec* f *est un polynôme en* f.

(b) *Décrire le commutant de la matrice* $J := \begin{pmatrix} {\scriptscriptstyle 0} & I_{n-1} \\ {\scriptscriptstyle 0} & {\scriptscriptstyle 0} \end{pmatrix}$ *et donner sa dimension.*

(c) *(plus difficile) Même question avec les diagonales de blocs de la forme* J *de tailles non nécessairement égales.*

8. ★★★*Soit* G *un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$ *dont le p. p. c. m. des ordres des éléments est fini. On veut montrer que* G *est fini.*

(a) *Justifier l'existence d'un ensemble fini* Φ *tel que* $\Phi \subset G \subset \operatorname{Vect} \Phi$.
On évoque un tel Φ *et l'on considère l'application*

$$\tau := \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\Phi} \\ g & \longmapsto & (\operatorname{tr}(g\varphi))_{\varphi \in \Phi} \end{array} \right. .$$

(b) *Montrer que l'image de* G *par* τ *est finie.*

(c) *Soient* $a, b \in G$ *tels que* $\tau(a) = \tau(b)$. *Montrer alors l'inclusion* $\operatorname{Sp}(ab^{-1}) \subset \{1\}$ *et conclure.*

9. ★★★*Soient* $A, B \in M_n(K)$. *On note* $\mathcal{S} := \operatorname{Sp} A \cap \operatorname{Sp} B$ *et* $s := \operatorname{Card} \mathcal{S}$.

(a) *Soit* $M \in M_n(K)$ *telle que* $MA = BM$. *Montrer alors la minoration*

$$\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geq \operatorname{rg} M.$$

et en déduire lorsque $K = \mathbb{C}$ *et* $M \neq 0$ *que* $\mathcal{S}$ *est non vide. Discuter l'hypothèse* $K = \mathbb{C}$.

(b) *Montrer qu'il y a une matrice* $M \in M_n(K)$ *de rang* s *telle que* $AM = MB$. *(On pourra regarder le cas* $s = 1$ *pour intuiter une matrice* M *convenant.)*

10. ★★★

(a) *Les matrices diagonalisables de* $M_n(K)$ *forment-elles un groupe ?*

(b) *Les matrices diagonalisables de* $GL_n(K)$ *forment-elles un groupe ?*

(c) *Déterminer lorsque* K *est infini le sous-groupe de* $GL_n(K)$ *engendré par les matrices diagonalisables inversibles.*

(d) *(plus difficile) Même question sur un corps fini.*

Solutions des exercices d'entraînement

1.

(a) Cet exercice prolonge son analogue vu au chapitre précédent. Donnons-en une cinquième solution, de loin la plus rapide

Soit $P =: \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ un polynôme simplement scindé qui annule A. Vu à $N \in \mathbb{N}^*$ fixé l'égalité (obtenue par une récurrence immédiate)

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^N = 2^N \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \qquad \text{(fausse si } N = 0 \neq n\text{)},$$

l'évaluation en $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ du polynôme $P\left(\frac{X}{2}\right) = \sum_{N\in\mathbb{N}} a_N \left(\frac{X}{2}\right)^N$ vaut

$$a_0 I_{2n} + \sum_{N\in\mathbb{N}^*} a_N \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) - a_0 I_n \\ P(A) - a_0 I_n & P(A) \end{pmatrix} \overset{P(A)=0}{=} \begin{pmatrix} 0 & -a_0 I_n \\ -a_0 I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette évaluation est donc nulle si $a_0 = 0$, *i. e.* si $X \mid P$. Si ce n'est pas le cas, on remplace P par XP, ce qui ne change ni son caractère simplement scindé ni le fait qu'il annule A. Finalement, on a trouvé un polynôme $P\left(\frac{X}{2}\right)$ annulateur simplement scindé, *c. q. f. d.*

Réciproquement, le calcul déjà effectué des évaluations polynomiales en $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ montre que chaque polynôme annulant $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ annule $2A$ et en évoquer un simplement scindé conclut.

Remarque – Le résultat reste valide dès que $2 \neq 0$ dans K. Par ailleurs, si $K = \{0, 1\}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable, ce qui montre la nécessité de l'hypothèse $2 \neq 0$.

(b) Si A est diagonalisable, alors la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ l'est aussi, d'où le sens $\boxed{\Longleftarrow}$.

Supposons $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$ diagonalisable et soit P un polynôme simplement scindé l'annulant. Rappelons (de l'exercice d'entraînement 2b section 1.1) l'égalité

$$P\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\,C \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} \qquad \text{(démontrable par linéarité et récurrence).}$$

Le membre de gauche étant nul, celui de droite aussi : la nullité de $P(A)$ montre la diagonalisabilité de A (car P est simplement scindé), la nullité de $P'(A)\,C$ permettra de conclure $C = 0$ si l'on montre l'inversibilité de $P'(A)$. Adaptons pour ce faire notre démonstration de l'implication

$$P(A) \text{ inversible si } P \wedge \mu_A = 1 \text{ (exercice d'entraînement 1a section 1.3).}$$

Les polynômes P et P' sont premiers entre eux (car P est simplement scindé), d'où par Bézout deux polynômes U et V tels que $PU + P'V = 1$:

évaluer en A montre que $P'(A)$ et $V(A)$ sont inverses l'un de l'autre, ce qui conclut le sens $\boxed{\Longrightarrow}$.

Lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (qui est diagonalisable car est un projecteur) et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (qui est non nulle), on vérifiera aisément que

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est un projecteur,}$$

donc est diagonalisable, ce qui infirme l'équivalence de l'énoncé.

2. Supposons (a). Alors $\operatorname{Im} f$ est trivialement un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$, d'où (b).

Supposons (b) et soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ stable par f. L'induit $f_{|S}$ est alors injectif (car de noyau $S \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$), *i. e.* ne possède pas 0 comme valeur propre, ce qui revient à dire que son polynôme minimal est de valuation nulle. Par ailleurs, chaque endomorphisme s'annulant sur son noyau, l'induit $f_{|\operatorname{Ker} f}$ est annulé par X, donc son polynôme minimal divise X et est de valuation au plus 1. Enfin, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et S étant supplémentaires et stables par f, on a l'égalité $\mu_f = \mu_{f_{|\operatorname{Ker} f}} \vee \mu_{f_{|S}}$, d'où

$$\operatorname{val} \mu_f = \max \left\{ \underbrace{\operatorname{val} \mu_{f_{|\operatorname{Ker} f}}}_{\text{au plus 1}}, \underbrace{\operatorname{val} \mu_{f_{|S}}}_{\text{nulle}} \right\} \leq 1 \text{ et (c).}$$

Supposons (c). Le polynôme μ_f annule alors f et est de valuation au plus 1, d'où (d).

Supposons (d) et soit P un polynôme annulant f de valuation au plus 1. Les dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ayant pour somme $\dim E$, il suffit pour avoir (a) de montrer que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Soit donc w dans leur intersection et soit $v \in E$ tel que $w = f(v)$. Les itérés de v sont alors nuls (à l'exception possible de v et $f(v)$), d'où l'égalité

$$[P(f)](v) = P(0)\, v + P'(0)\, f(v).$$

Si P est de valuation 1, on obtient $0 = P'(0)\, f(v)$, *i. e.* $0 = w$, ce qui conclut. Dans le cas contraire, le scalaire 0 n'est pas valeur propre de f (chaque $\lambda \in \operatorname{Sp} f$ devant annuler P), *i. e.* f est injectif et ses noyau $\{0\}$ et image E sont clairement en somme directe.

Remarque – Notre dernière implication aurait également pu se rédiger à l'aide du lemme de décomposition des noyaux.

3. Pour chaque matrice M, on notera $\operatorname{Comm} M$ son commutant. Soit $M \in M_n(K)$.

Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable. Énumérons ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ où $s := \operatorname{Card} \operatorname{Sp} A$ et soit P inversible telle que $A = P \Lambda P^{-1}$ avec

$$\Lambda := \operatorname{Diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, ..., \lambda_s I_{n_s}) \text{ où } \forall i \in [1, s|],\ n_i := \omega_{\lambda_i}(A).$$

Vu les équivalences

$$\begin{aligned} & M \in \operatorname{Comm} A \Longleftrightarrow AM = MA \Longleftrightarrow P\Lambda P^{-1} M = MP\Lambda P^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \Lambda \left(P^{-1} MP\right) = \left(P^{-1} MP\right) \Lambda \Longleftrightarrow P^{-1} MP \in \operatorname{Comm} \Lambda, \end{aligned}$$

d'une part on a l'égalité $\operatorname{Comm} A = P^{-1} (\operatorname{Comm} \Lambda) P$, d'autre part il est pertinent de découper la matrice $C := P^{-1} MP$ en blocs $C_{i,j}$ selon la décomposition de Λ. Vu l'action multiplicative des matrices diagonales, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned} & C \in \operatorname{Comm} \Lambda \Longleftrightarrow \Lambda C = C\Lambda \Longleftrightarrow \forall i, j \in [1, s|] \,, \ \lambda_i C_{i,j} = \lambda_j C_{i,j} \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall i, j \in [1, s|] \,, \ (i \neq j \Longrightarrow C_{i,j} = 0) \Longleftrightarrow C \text{ diagonale par blocs.} \end{aligned}$$

On en déduit qu'est un isomorphisme d'espaces vectoriels l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{s} M_{n_i}(K) & \widetilde{\longrightarrow} & \operatorname{Comm} A \\ (M_1, M_2, ..., M_s) & \longmapsto & P^{-1} \operatorname{Diag}(M_1, M_2, ..., M_s) P \end{array} \right. .$$

En particulier, on a les égalités dimensionnelles

$$\dim \operatorname{Comm} A = \dim \prod_{i=1}^{s} M_{n_i}(K) = \sum_{i=1}^{s} \dim M_{n_i}(K) = \sum_{i=1}^{s} n_i^2 = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \omega_\lambda^2.$$

Sanity check : retrouver le fait que chaque matrice scalaire commute avec chaque matrice.

4.

(a) Il est classique qu'un tel groupe est commutatif (chaque élément vaut son propre inverse, d'où des égalités $ab = (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = ba$). Ses éléments étant chacun diagonalisables (car involutifs), ils sont *co*diagonalisables à spectre inclus dans $\{-1, 1\}$. Les réduites diagonales peuvent donc prendre au plus 2^n valeurs (2 choix pour chacun des n coefficients diagonaux), d'où la finitude et la majoration attendues.

(b) Soit $\varphi : GL_a(K) \widetilde{\longrightarrow} GL_b(K)$ un isomorphisme de groupes. La partie de $GL_a(K)$ formée des matrices diagonales à coefficients dans $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe source dont chaque élément est involutif, donc (puisque φ est un morphisme de groupes) son image est un sous-groupe but dont chaque élément est involutif. D'après le premier point, ce sous-groupe but est de cardinal au plus 2^b. Or son cardinal est celui 2^a du sous-groupe source (car φ est bijective), d'où la comparaison $2^a \leq 2^b$. Remplacer φ par φ^{-1} (qui est aussi un isomorphisme de groupes) donnerait $2^b \leq 2^a$, d'où l'égalité $2^a = 2^b$, ce qui conclut à $a = b$.

5.

(a) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$. Puisque $\lambda^N \in \operatorname{Sp} A^N = \operatorname{Sp} A$ pour chaque naturel N, la suite $\left(\lambda^N\right)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs ($\operatorname{Sp} A$ est fini), donc n'est pas injective, d'où deux naturels $p < q$ tels que $\lambda^p = \lambda^q$, ce qui montre ou bien la nullité de λ ou bien que λ est une racine de l'unité.

Notons $\mathcal{S} := \operatorname{Sp} A \backslash \{0\}$ et soit $(N_\lambda) \in \mathbb{N}^{*\mathcal{S}}$ tel que $\lambda^{N_\lambda} = 1$ pour chaque $\lambda \in \mathcal{S}$ (légitime par ce qui précède). En notant $N := \prod_{\lambda \in \mathcal{S}} N_\lambda$, on aura alors $\lambda^N = 1$ pour chaque $\lambda \in \mathcal{S}$, d'où les inclusions

$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} A^N = \left\{\lambda^N\right\}_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \subset \left\{0^N\right\} \amalg \left\{\lambda^N\right\}_{\lambda \in \mathcal{S}} \subset \{0\} \amalg \{1\} = \{0, 1\}.$$

(b) Rappelons que $SL_n(\mathbb{Q})$ est engendré par les transvections de $M_n(\mathbb{Q})$: le morphisme φ est donc déterminé par les images de ces dernières et il suffit de montrer que chacune de ces images vaut I_n.

Soit $T \in M_n(\mathbb{Q})$ une transvection, mettons $T = I_n + \lambda E_{i,j}$ pour un certain scalaire $\lambda \neq 0$ et certains indices $i \neq j$ dans $[1, n|]$. Montrons que la matrice $\varphi(T)$ vérifie l'hypothèse du point précédent : son spectre complexe sera alors inclus dans $\{0, 1\}$, donc dans $\{1\}$ (car chaque matrice orthogonale est inversible) et la diagonalisabilité admise forcera l'égalité $\varphi(T) = I_n$, ce qui conclura.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Rappelons les égalités

$$T^N = (I_n + \lambda E_{i,j})^N = I_n + \lambda N E_{i,j}.$$

En notant P la matrice diagonale dont chaque coefficient (diagonal) vaut 1 sauf le j-ième qui vaut N, on vérifiera l'égalité $P(NE_{i,j})P^{-1} = E_{i,j}$ (en utilisant par exemple la description de l'action multiplicative des matrices diagonales), d'où les égalités

$$PT^NP^{-1} = P(I_n + \lambda N E_{i,j})P^{-1} = I_n + \lambda E_{i,j} = T,$$

ce qui montre la similitude de T avec T^N, *a fortiori* (appliquer le morphisme φ) celle de $\varphi(T)$ avec $\varphi(T)^N$, *c. q. f. d.*

Remarque – Deux transvections quelconques de $M_n(K)$ sont en fait toujours conjuguées (par exemple à $I_n + E_{1,2}$). Ainsi, l'égalité $T^N = I_n + \lambda N E_{i,j}$ ci-dessus montre que T^N est une transvection si $\lambda N \neq 0$, donc est conjuguée à la transvection T dès que K est de caractéristique nulle (hypothèse plus générale et plus pertinente que celle « $K = \mathbb{Q}$ » de l'énoncé).

6. Notons $\mathcal{B}$ la base considérée par l'énoncé. Toutes les matrices seront prises dans cette base.

(a) L'endomorphisme $M \mapsto A\ M\ {}^tB$ étant la composée (commutative) des endomorphismes $\left\{\begin{array}{l} M \mapsto A\ M \\ M \mapsto M\ {}^tB \end{array}\right.$, il suffit de déterminer les matrices de ces deux derniers. Or l'exercice d'application **??** section **??** montre que ces matrices valent

$$(a_{i,j} I_n)_{i,j \in [1,n|]} = A \otimes I_n \text{ et } \operatorname{Diag}\left({}^t\left({}^tB\right), {}^t\left({}^tB\right), ..., {}^t\left({}^tB\right)\right) = \operatorname{Diag}(B, B, ..., B).$$

Vu que la matrice par blocs $\operatorname{Diag}(B, B, ..., B)$ agit en multipliant chaque blocs par B, le produit (commutatif) des deux matrices précédentes vaut

$$(a_{i,j} I_n\ B)_{i,j \in [1,n|]} = (a_{i,j} B)_{i,j \in [1,n|]} = A \otimes B, \text{ c. q. f. d.}$$

(b) Nous allons reprendre la démarche de l'exercice d'application section **??** (en tenant compte des transpositions).

Appelons τ (comme « **t**enseur ») l'endomorphisme $M \mapsto A\ M\ {}^tB$ et notons t la transposition $M \mapsto\ {}^tM$ (qui est une symétrie vectorielle de $M_n(K)$). Vu à $M \in M_n(K)$ fixé les égalités

$$t\left(\tau\left(t^{-1}(M)\right)\right) = {}^t\left(A\ {}^tM\ {}^tB\right) = {}^t\left({}^tB\right)\ {}^t\left({}^tM\right)\ {}^tA = B\ M\ {}^tA,$$

les endomorphismes $[M \mapsto A\ M\ {}^tB] = \tau$ et $[M \mapsto B\ M\ {}^tA] = t\tau t^{-1}$ sont conjugués, donc leurs matrices $A \otimes B$ et $B \otimes A$ sont semblables).

Soient P et Q deux matrices inversibles telles que $\binom{A'}{B'} = \binom{P^{-1}AP}{Q^{-1}BQ}$, appelons τ' l'endomorphisme $M \mapsto A'\ M\ {}^tB'$ et notons α l'automorphisme $M \mapsto P\ M\ {}^tQ$ (de réciproque $M \mapsto P^{-1}\ M\ {}^tQ^{-1}$). Vu à $M \in M_n(K)$ fixé les égalités

$$\begin{aligned} \alpha\left(\tau'\left(\alpha^{-1}(M)\right)\right) &= P\ \left[\left(P^{-1}AP\right)\ \alpha^{-1}(M)\ {}^t\left(Q^{-1}BQ\right)\right]\ {}^tQ \\ &= A\ P\ \left(P^{-1}M\ {}^tQ^{-1}\right)\ {}^tQ\ {}^tB = AM\ {}^tB = \tau(M), \end{aligned}$$

les endomorphismes τ et $\tau' = \alpha\tau'\alpha^{-1}$ sont conjugués, donc leurs matrices $A \otimes B$ et $A' \otimes B'$ sont semblables.

(c) Soient Λ et M diagonales semblables resp. à A et B. La matrice $A \otimes B$ est alors semblable à $\Lambda \otimes M$, qui est diagonale par blocs (car Λ est diagonale) diagonaux (car M est diagonale), donc diagonale, ce qui conclut.

La réciproque est fausse en générale : si $K = \mathbb{R}$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le produit tensoriel $A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est alors involutif donc diagonalisable mais ni A ni B n'est diagonalisable.

(d) Imposons tout d'abord A et B triangulaires supérieures. La matrice $A \otimes B$ est alors triangulaire supérieure par blocs (vu la forme de A) triangulaires supérieurs (vu la forme de B), donc est triangulaire supérieure. Notons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ les valeurs propres respectives de A et B listées avec multiplicité. La diagonale $\operatorname{Diag}(\alpha_1 B, \alpha_2 B, ..., \alpha_n B)$ de $A \otimes B$ est alors formée des scalaires

$$\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, ..., \alpha_1\beta_n, \quad \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2, ..., \alpha_2\beta_n, \quad ..., \quad \alpha_n\beta_1, \alpha_n\beta_2, ..., \alpha_n\beta_n,$$

d'où le polynôme caractéristique

$$\chi_{A\otimes B} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(X - \alpha_i\beta_j\right) = \prod_{\lambda\in\operatorname{Sp} A}\left(\prod_{\mu\in\operatorname{Sp} B}(X-\lambda\mu)^{\omega_\lambda(B)}\right)^{\omega_\mu(A)} = \prod_{\lambda\in\operatorname{Sp} A}^{\mu\in\operatorname{Sp} B}(X-\lambda\mu)^{\omega_\lambda(A)\ \omega_\mu(B)}.$$

Il en résulte l'égalité spectrale annoncée ainsi que la description des multiplicités :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} B,\ \omega_{\lambda\mu}(A \otimes B) = \omega_\lambda(A)\ \omega_\mu(B).$$

Dans le cas général, A et B sont trigonalisables, donc semblables à des matrices triangulaires dont le produit tensoriel est semblable à $A\otimes B$ (donc a même polynôme caractéristique) et l'on est ramené au cas précédent.

Remarque – **Culture**. La définition de $A\otimes B$ n'admet en fait aucune restriction sur les tailles de A et B et tout ce qui précède reste valide (reprendre les même preuves en étant attentif aux indices).

7.

(a) Pour chaque naturel N, notons $v_N := f^N(v)$. Soit $c \in L(E)$ commutant avec f. L'image $c(v)$ se décompose alors dans la famille génératrice donnée : soit $\lambda \in K^{(\mathbb{N})}$ tel que

$$c(v) = \sum_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N v_N = \sum_{N\in\mathbb{N}} \left(\lambda_N f^N(v)\right) = \left[\sum_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N f^N\right](v) = [P(f)](v) \text{ où } P := \sum_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N X^N.$$

Puisque l'on veut écrire c comme un polynôme en f, l'égalité $c(v) = [P(f)](v)$ suggère de considérer sérieusement le candidat P : il suffit pour conclure de montrer que les endomorphismes c et $P(f)$ coïncident sur chaque itéré de v par f. On vient de le dire pour le 0-ième. Par ailleurs, puisque c commute avec chaque polynôme en f, on a pour chaque naturel N les égalités

$$\begin{aligned} c(v_{N+1}) &= c\left(f^N(v)\right) = \left[cf^N\right](v) \overset{cf=fc}{=} \left[f^N c\right](v) = f^N(c(v)) = f^N\left(\ [P(f)](v)\ \right) \\ &= \left[f^N P(f)\right](v) \overset{cf=fc}{=} \left[P(f)\, f^N\right](v) = [P(f)]\left(f^N(v)\right) = [P(f)](v_{N+1}),\ c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

(b) La matrice J vérifie les hypothèses du point précédent, donc son commutant est formé des polynômes en J. Les puissances de J ont été décrites en cours (matrices ayant une surdiagonale constante et étant nulles ailleurs). Le commutant de J est donc formé des matrices triangulaires supérieures constantes sur chaque surdiagonale et sa dimension vaut n (un degré de liberté par surdiagonale).

On aurait pu raisonner de façon plus élémentaire en égalant directement les coefficients de MJ et JM.

(c) Pour chaque matrice M, on notera $\operatorname{Comm} M$ son commutant. Soit $M \in M_n(K)$.

Pour chaque naturel N, notons $J_N := \begin{pmatrix} 0 & I_{N-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $(n_1, n_2, ..., n_\ell)$ une suite de naturels de somme n, notons $D := \operatorname{Diag}(J_{n_1}, J_{n_2}, ..., J_{n_\ell})$ et décomposons la matrice M en blocs $M_{i,j}$ selon D. On a alors l'équivalence

$$DM = MD \Longleftrightarrow \forall i,j \in [1,\ell|]\,,\ J_{n_i} M_{i,j} = M_{i,j} J_{n_j}\,,$$

ce qui nous ramène à l'équation $J_p X = X J_q$ d'inconnue $X \in M_{p,q}(K)$ à p,q fixés. Résolvons cette équation en utilisant le paragraphe précédent.

Soient $p,q \in \mathbb{N}$ et $X \in M_{p,q}(K)$. Imposons $p \leq q$ (le cas $q \geq p$ sera similaire). Complétons alors X en une matrice carrée $Y := \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in$

$M_q(K)$, écrivons $J_q =: \begin{pmatrix} J_p & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ pour certaines matrices α et β (avec β carrée) et découpons de même $X =: (\gamma\ \delta)$ où γ est carrée. Le calcul par blocs livre alors les équivalences

$$\begin{aligned} & J_pX = XJ_q \iff J_p(\gamma\ \delta) = (\gamma\ \delta)\begin{pmatrix} J_p & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \iff (J_p\gamma\ J_p\delta) = (\gamma J_p\ \gamma\alpha + \delta\beta) \\ \iff & \begin{pmatrix} J_p\gamma & J_p\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma J_p & \gamma\alpha + \delta\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} J_p & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_p & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ \iff & J_qY = YJ_q \iff Y \in \operatorname{Comm} J_q \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{point}}{\iff}} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \text{ triangulaire supérieure à surdiagonales constantes} \\ \iff & \exists T \in M_p(K),\ X = (0\ T) \text{ et } T \text{ est triangulaire supérieure à surdiagonales constantes.} \end{aligned}$$

On montrerait de même, lorsque $p \geq q$, l'équivalence

$$J_pX = XJ_q \iff \exists T \in M_q(K),\ X = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \text{ et } T \text{ est triangulaire } \textit{inf}\text{érieure à } \textit{sous}\text{diagonales constantes.}$$

Dans les deux cas, l'espace des solutions a pour dimension $\min\{p, q\}$.

Conclusion : maintenant que l'on connaît la dimension de chacun des facteurs du produit cartésien

$$\prod_{i,j \in [1,\ell|]} \left\{ M \in M_{n_i,n_j}(K)\ ;\ J_{n_i}M = MJ_{n_j} \right\},$$

on obtient aisément celle de l'espace $\operatorname{Comm} D$ (qui est isomorphe à ce produit) :

$$\dim \operatorname{Comm} D = \sum_{i,j \in [1,\ell|]} \min\{n_i, n_j\}.$$

Dans le cas simple où les n_i décroissent, la sommande ci-dessus est constante sur chaque équerre $\llcorner$ du carré $[1, \ell|]^2$ et se simplifie donc en $\sum_{i=1}^{\ell}(2i-1)\,n_i$.

Remarque – Avec ce résultat et le complément hors programme sur les nilpotents, on décrirait facilement la dimension du commutant de chaque matrice réelle.

8. Notons e l'exposant du groupe G (*i. e.* le p. p. c. m. des ordres de ses éléments).

(a) L'espace $\operatorname{Vect} G$ est de dimension finie (comme sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$) et est engendré par G, donc cette dernière partie génératrice inclut une partie basique de l'espace $\operatorname{Vect} G$. Une telle partie Φ vérifie par ailleurs les inclusions

$$\Phi \subset G \subset \operatorname{Vect} G = \operatorname{Vect} \Phi, \text{ ce qui conclut.}$$

(b) Soit $g \in G$: par hypothèse, g est annulé par le polynôme $X^e - 1$ simplement scindé, donc est diagonalisable à spectre inclus dans l'ensemble des racines e-ièmes de l'unité, donc sa trace (qui vaut $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} g} \omega_\lambda \lambda$ puisqu'on est sur $\mathbb{C}$) ne peut prendre qu'au plus e^n valeurs (au plus e choix pour chacune des n valeurs propres comptées avec multiplicité), donc l'image $\tau(g)$ ne peut prendre qu'au plus $e^n \operatorname{Card} \mathcal{V}$ valeurs, ce qui conclut.

(c) Si l'on montre l'égalité $a = b$, on aura prouvé l'injectivité de τ : l'image de τ étant par ailleurs finie, son ensemble source G devra par conséquent être fini, ce qui conclura.

Abrégeons donc $c := ab^{-1}$ et montrons $c = I_n$. Puisque l'élément $c \in G$ est diagonalisable, l'égalité désirée équivaut à l'inclusion indiquée $\operatorname{Sp} c \subset \{1\}$. Notons donc $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de c listées avec multiplicité et montrons $\lambda_i = 1$ pour chaque $i \in [1, n|]$.

L'élément $b^{-1} \in G$ étant engendré par Φ et la trace étant linéaire, on peut déduire de l'hypothèse $\forall f \in \Phi,\ \operatorname{tr}(a\varphi) = \operatorname{tr}(b\varphi)$ les égalités

$$\operatorname{tr} c = \operatorname{tr}\left(ab^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(bb^{-1}\right) = \operatorname{tr} I_n = n.$$

On a donc le cas d'égalité dans la comparaison triangulaire

$$|\operatorname{tr} c| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underset{\text{des racines } e\text{-ième de l'unité}}{\overset{\text{les valeurs propres de } c \text{ sont}}{=}} \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

ce qui force les termes λ_i à être sur une même demi-droite. Comme ces valeurs propres sont sur un même cercle (ce sont des racines e-ième de l'unité), elles sont égales ; leur somme valant par ailleurs n, elle valent chacune 1, *c. q. f. d.*

Remarque – La lectrice et le lecteur intéressés par le problème de Burnside (un groupe d'exposant fini est-il fini ?) que nous venons ici de résoudre positivement pour les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ (démontré par William Burnside en 1905 et publié dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*) pourront se renseigner sur les contributions de Pyotr Novikov et Sergei Adjan (1968) et de Efim Zelmanov (1989).

9.

(a) Abrégeons $r := \operatorname{rg} M$, $J := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et soient $P, Q \in GL_n(K)$ tels que $M = PJQ$, de sorte que l'hypothèse $MA = BM$ se réécrive

$$PJQA = BPJQ,\ i.\ e.\ J\left(QAQ^{-1}\right) = \left(PBP^{-1}\right) J.$$

En décrivant $QAQ^{-1} =: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $PBP^{-1} =: \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ selon la décomposition par blocs de J, l'hypothèse devient

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ i.\ e.\ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

$$i.\ e.\ \begin{cases} a = \alpha \\ \beta = 0 \\ c = 0 \end{cases},\ \text{d'où} \begin{cases} \chi_A = \chi\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} = \chi_a \chi_d \\ \chi_B = \chi\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \chi_\alpha \chi_\delta \end{cases},\ \text{ce qui montre que}$$

$\chi_a = \chi_\alpha$ est un facteur commun à χ_A et χ_B, d'où $\chi_a \mid \chi_A \wedge \chi_B$.
Or $a \in M_r(K)$, d'où $\deg \chi_a = r$, ce qui conclut.

Sanity check : lorsque M est inversible, le facteur commun $\chi_A \wedge \chi_B$ est degré $\deg \chi_A = n = \deg \chi_B$, d'où l'égalité $\chi_A = \chi_{A \wedge B} = \chi_B$. On retrouve ainsi le fait que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Quand $K = \mathbb{C}$ et $M \neq 0$, le facteur $\chi_A \wedge \chi_B$ est de degré au moins $\operatorname{rg} M \geq 1$, donc admet une racine (on est sur $\mathbb{C}$), d'où une racine commune à χ_A et χ_B, *i. e.* une valeur propre commune à A et B, d'où la non-vacuité de $\mathcal{S}$.

Si K n'est pas algébriquement clos, on peut évoquer un polynôme sans racines et imposer $A = B$ valant la matrice compagne d'un tel polynôme : le spectre de A est alors vide, *a fortiori* l'intersection $\mathcal{S}$.

(b) Regardons comme suggéré le cas $s = 1$. Soit $\lambda \in \mathcal{S}$, soient V et W non nuls dans K^n tels que $\left\{\begin{array}{c} AV = \lambda V \\ BW = \lambda W \end{array}\right.$. Multiplier $\left\{\begin{array}{l} \text{à droite par } W \\ \text{à gauche par } V \end{array}\right.$ donne alors les égalités

$$A\,(VW) = (AV)\,W = (\lambda V)\,W = V\,(\lambda W) = VBW\,;$$

pour avoir du $AM = MB$ avec $M := VW$, il faudrait intervertir B et W. On y parvient en transposant au préalable : puisque $\operatorname{Sp} B = \operatorname{Sp}({}^tB)$, on peut rétrospectivement imposer ${}^tBW = \lambda W$ au lieu de $BW = \lambda W$, d'où les égalités

$$(AV)\ {}^tW = (\lambda V)\ {}^tW = V\ {}^t(\lambda W) = V\ {}^t\left({}^tBW\right) = V\ \left({}^tW\ B\right) = \left(V\ {}^tW\right)B.$$

Cette fois, la matrice $M := V\ {}^tW$ convient (son rang sera calculé plus tard).

Dans le cas général, soit $(V_\lambda, W_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{S}}$ une famille de vecteurs propres telle que

$$\forall \lambda \in \mathcal{S},\ \left\{\begin{array}{c} AV_\lambda = \lambda V_\lambda \\ BW_\lambda = \lambda W_\lambda \end{array}\right. \quad \text{et notons } M := \sum_{\lambda\in\mathcal{S}} V_\lambda\ {}^tW_\lambda.$$

En reprenant le même calcul que ci-dessus, on obtient par linéarité les égalités

$$AM = A\sum_{\lambda\in\mathcal{S}} V_\lambda\,{}^tW_\lambda = \sum_{\lambda\in\mathcal{S}} A\left(V_\lambda\ {}^tW_\lambda\right) \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{\lambda\in\mathcal{S}} \left(V_\lambda\ {}^tW_\lambda\right)B = \left(\sum_{\lambda\in\mathcal{S}} V_\lambda\ {}^tW_\lambda\right)B = MB.$$

Il reste à montrer $\operatorname{rg} M = s$. Nous allons pour ce faire montrer l'égalité

$$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker}\left({}^tW\right)$$

où W est une matrice de taille $n \times s$ obtenue en concaténant les s colonnes libres W_λ, ce qui permettra de conclure

$$\operatorname{rg} M = n - \dim \operatorname{Ker} M = n - \dim \operatorname{Ker}\left({}^tW\right) = \operatorname{rg} W = s$$

(bien vérifier les tailles des matrices M et ${}^tW$ pour s'assurer de la dimension des espaces sources intervenant dans la formule du rang). Or cette égalité nucléaire résulte à $X \in K^n$ fixé des équivalences

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} M \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in\mathcal{S}} V_\lambda\ {}^tW_\lambda X = 0 \underset{\text{de taille } 1\times 1}{\overset{{}^tW_\lambda X \text{ est}}{\Longleftrightarrow}} \sum_{\lambda\in\mathcal{S}} \left({}^tW_\lambda X\right)V_\lambda = 0 \\ &\underset{\text{des } V_\lambda}{\overset{\text{liberté}}{\Longleftrightarrow}} \quad \forall\lambda\in\mathcal{S},\ {}^tW_\lambda X = 0 \Longleftrightarrow\ {}^tWX = 0 \Longleftrightarrow X \in \operatorname{Ker}\left({}^tW\right). \end{aligned}$$

10.

(a) Lorsque $n = 0$, toutes les parties de $M_n(K)$ considérées sont des groupes triviaux (singletons). On imposera donc $n \geq 1$.

La matrice nulle est diagonalisable mais son inverse ne fait pas sens (car $n \geq 1$), donc les matrices diagonalisables de $M_n(K)$ ne forment pas un groupe.

Autre argument : les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des projecteurs, donc sont diagonalisables, et leur produit $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotent non nul, donc non diagonalisable ; compléter ces matrices avec les 0 permet de transporter ce contre-exemple quand $n \geq 2$.

(b) Chaque matrice de $M_1(K)$ est diagonale, donc les diagonalisables inversibles de taille 1×1 forment tout le groupe $GL_1(K)$.

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ont pour polynômes caractéristiques respectifs $X^2 + X - 2$ et $X^2 - 2X - 1$, lesquels sont tous deux simplement scindés et de valuation nulle, donc les deux matrices considérées sont diagonalisables et inversibles. En revanche, leur produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une transvection, donc n'est pas diagonalisable.

Finalement, les matrices diagonalisables de $GL_n(K)$ n'en forment jamais un sous-groupe – sauf cas triviaux $n \in \{0, 1\}$.

(c) Cette question précise la précédente.

Lorsque $n \in \{0, 1\}$ (cas triviaux), le sous-groupe cherché est tout $GL_n(K)$ et l'on imposera donc $n \geq 2$.

Rappelons que les transvections et les dilatations engendrent le groupe linéaire $GL_n(K)$. Chaque dilatation étant diagonalisable (car diagonale), si l'on arrive à montrer que les diagonalisables engendrent chaque transvection, le sous-groupe recherché sera tout $GL_n(K)$.

Soit donc T une transvection. Puisque K est infini, on peut évoquer une matrice diagonale D dont les coefficients sont non nuls et distincts. Alors T s'écrit $D^{-1}(DT)$ où la matrice DT est diagonalisable car triangulaire avec des termes distincts sur la diagonale (*cf.* action multiplication des matrices diagonale), ce qui conclut.

(d) Les cas triviaux $n \in \{0, 1\}$ ayant déjà été traités, on imposera $n \geq 2$. Tâchons de montrons que chaque transvection est engendrée par les diagonalisables de $GL_n(K)$.

Puisque chaque transvection de $GL_n(K)$ est semblable à la transvection $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, on est ramené au cas de la transvection $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (détailler au besoin le calcul par blocs).

En cherchant une décomposition du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1},$$

mettons avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ {\scriptscriptstyle 0} & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ {\scriptscriptstyle 0} & 1 \end{pmatrix}$ pour faire simple, on trouve qu'imposer $\mu := \frac{1}{\frac{1}{\lambda}-1}$ convient où λ est un scalaire évoqué dans $K \backslash \{0,1\}$.

Il reste le cas $K = \{0,1\}$: la seule matrice diagonalisable inversible est alors l'identité (*cf.* exercice **??**), donc le sous-groupe cherché est $\{I_n\}$, lequel strictement inclus dans $GL_n(K)$ car $n \geq 2$ et T n'est pas diagonalisable.

Conclusion : le sous-groupe cherché est le singleton $\{I_n\}$ si $\begin{cases} K = \{0,1\} \\ n \geq 2 \end{cases}$ et vaut tout $GL_n(K)$ sinon.