Réduction (reliquat)

Marc SAGE

1er mars 2018

Table des matières

1 puissnce d'un induit (version endo, pas matrices)

Exercice d'application

Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f.

a. *Montrer pour chaque $g \in L(E)$ l'égalité*

$$[g \circ f]_{|V} = g_{|V} \circ f_{|V} \text{ dans } L(V, E).$$

b. *Soient $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille de n endomorphismes de E stabilisant chacun V. Montrer que l'endomorphisme induit sur V par le produit des f_i fait sens et vaut le produit des endomorphismes induits sur V par chacun des f_i :*

$$[f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n]_{|V} = [f_1]_{|V} \circ [f_2]_{|V} \circ \cdots \circ [f_n]_{|V} \text{ dans } L(V).$$

c. *En déduire que l'égalité suivante fait sens et est vérifiée :*

$$[f^{\circ n}]_{|V} = \left[f_{|V}\right]^{\circ n} \text{ dans } L(V).$$

---

a. Soit $g \in L(E)$.

La composée $g \circ f$ reste alors dans $L(E)$, donc sa restriction à V fait sens dans $L(V, E)$.

Par ailleurs, la composée $g_{|V} \circ f_{|V}$ fait sens (dans $L(V, E)$) ssi le domaine du facteur de gauche contient l'image du facteur de droite, *i. e.* ssi $\operatorname{Dom} g_{|V} \supset \operatorname{Im} f_{|V}$, *i. e.* ssi $V \supset f(V)$, ce qu'on a.

Enfin, l'induit $[g \circ f]_{|V}$ et la composée $g_{|V} \circ f_{|V}$ coïncident sur leur domaine V (chaque $v \in V$ ayant pour même image $g(f(v))$). Finalement, elles sont égales

b. Le symbole de composition sera sous-entendu (multiplication dans l'algèbre $L(E)$).

Une récurrence immédiate montrerait l'inclusion $[f_1 f_2 \cdots f_n](V) \subset V$ (on a même égalité quand $n = 0$), ce qui donne sens à l'induit $[f_1 f_2 \cdots f_n]_{|V}$. Pour chaque naturel N, notons P_N l'égalité voulue[1] quantifiée universellement sur les familles de $L(E)^N$ dont chaque "élément" stabilise V et montrons $\forall N \in \mathbb{N},\ P_N$ par récurrence. (Remplacer N par n conclura alors.)

Pour l'unique famille (vide) de $L(E)^0$, le membre de droite est le produit vide de $L(V)$, à savoir Id_V, et son membre de gauche est l'induit à V du produit vide de $L(E)$, à savoir $(\mathrm{Id}_E)_{|V} = \mathrm{Id}_V$, d'où l'on déduit P_0.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que P_N. Soit $(f_i) \in L(E)^{N+1}$ telle que $\forall i \in [0, N|],\ f_i(V) \subset V$. Remplacer dans l'égalité du point précédent (g, f) par $(f_0, f_1 f_2 \cdots f_N)$ donne alors dans $L(V, E)$ l'égalité

$$[f_0 f_1 \cdots f_N]_{|V} = [f_0 \circ f_1 f_2 \cdots f_N]_{|V} \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{point}}{=}} [f_0]_{|V} \circ [f_1 f_2 \cdots f_N]_{|V} \overset{P_N}{=} [f_0]_{|V}\ [f_1]_{|V}\ [f_2]_{|V}\ \cdots\ [f_N]_{|V}.$$

Puisque chacun des deux membres de l'égalité ci-dessus stabilise V (récurrences immédiates), l'égalité a lieu en fait dans[2] $L(V)$, d'où P_{N+1}.

c. Appliquer le point précédent à la famille constante $(f, f, ..., f) \in L(E)^n$.

2 isom algèbres $M_n(K) \cong L(K^n)$

Exercice d'application

[1] On vient de dire pourquoi le membre de gauche de cette égalité fait sens (celui de droite étant par ailleurs un composé d'éléments de $L(V)$, il fait bien sens dans $L(V)$).

[2] Déjà mentionné pour le membre de gauche.

Montrer qu'est un isomorphisme d'algèbres l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(K) & \xrightarrow{\sim} & L(K^n) \\ M & \longmapsto & M\cdot \end{array} \right. . \textit{ Quelle est sa réciproque ?}$$

Notons φ l'application ci-dessus, qui fait bien sens car l'endomorphisme canoniquement associé à chaque matrice de $M_n(K)$ agit bien sur K^n.

Vu pour chaque matrice $M \in M_n(K)$ l'égalité[3] $\operatorname{Mat}_{b.\ c.}(M\cdot) = M$, l'application

$$\psi := \left\{ \begin{array}{ccc} L(K^n) & \longrightarrow & M_n(K) \\ f & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{b.\ c.} f \end{array} \right. \quad \text{vérifie } \psi \circ \varphi = \underset{M_n(K)}{\operatorname{Id}}.$$

Si l'on montre que ψ est un isomorphisme d'algèbres, alors d'une part sa réciproque sera un isomorphisme d'algèbres, d'autre part simplifier à gauche par ψ^{-1} dans la dernière égalité montrera que cette réciproque vaut φ, ce qui conclura.

Or le cours de première année nous dit que chaque base de $\mathcal{B}$ de E de longueur n induit un isomorphisme d'algèbres

$$\left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \xrightarrow{\sim} & M_n(K) \\ f & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f \end{array} \right. .$$

En particulier, quand $E = K^n$ et quand $\mathcal{B}$ est la base canonique de K^n, l'application précédente est ψ, ce qui conclut.

DEM explicite.

Afin d'alléger les écritures, nous noterons les images par φ à l'aide de tildes :

$$\widetilde{M} := \varphi(M) \text{ pour chaque matrice } M \in M_n(K).$$

Montrons que φ est un morphisme d'algèbres puis que sont réciproquees l'un de l'autre les applications[4] φ et

$$\psi := \left\{ \begin{array}{ccc} L(K^n) & \longrightarrow & M_n(K) \\ f & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{b.\ c.} f \end{array} \right. .$$

Soit $V \in K^n$. L'application φ préserve l'unité vu les égalités

$$\widetilde{I_n}(V) = I_n V = V = \underset{K^n}{\operatorname{Id}}(V), \text{ d'où l'on tire } \widetilde{I_n} = \underset{K^n}{\operatorname{Id}}.$$

Par ailleurs, vu pour chaque $(B, C, \lambda) \in M_n(K)^2 \times K$ les égalités

$$\begin{array}{rcl} (\widetilde{AB + \lambda C})(V) & = & (AB + \lambda C)(V) = (AB)V + (\lambda C)V = A(BV) + \lambda(CV) \\ & = & \widetilde{A}\left(\widetilde{B}(V)\right) + \lambda\left(\widetilde{C}(V)\right) = \left[\widetilde{A} \circ \widetilde{B}\right](V) + \left[\lambda\widetilde{C}\right](V) \\ & = & \left[\widetilde{A} \circ \widetilde{B} + \lambda\widetilde{C}\right](V), \text{ d'où vient } \widetilde{AB + \lambda C} = \widetilde{A}\widetilde{B} + \lambda\widetilde{C}, \end{array}$$

l'application φ préserve les combinaisons linéaires et le produit.

Montrons pour conclure que φ et ψ sont réciproques l'un de l'autre. On a déjà les égalités

$$[\psi \circ \varphi](A) = \psi(\varphi(A)) = \underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}}(A\cdot) = A = \underset{M_n(K)}{\operatorname{Id}}(A), \text{ d'où } \psi \circ \varphi = \underset{M_n(K)}{\operatorname{Id}}.$$

On a par ailleurs, en imposant $E = K^n$, pour chaque $V \in K^n$ les égalités[5]

$$\begin{array}{rcl} [[\varphi \circ \psi](f)](V) & = & [\varphi(\psi(f))](V) = \widetilde{\underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}} f}\ (V) = \left(\underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}} f\right)\left(\underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}} V\right) = \underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}} f(V) \\ & = & f(V), \text{ d'où } [\varphi \circ \psi](f) = f \text{ et enfin } \varphi \circ \psi = \underset{L(K^n)}{\operatorname{Id}}. \end{array}$$

---

[3] Ici $b.\ c.$ dénote la base canonique de K^n.

[4] Ici $b.\ c.$ dénote la base canonique de K^n. L'application ψ ne tombe pas du ciel, on l'introduit au vu de l'égalité $\operatorname{Mat}_{b.\ c.}(A\cdot) = A$.

[5] Rappelons l'égalité $v = \operatorname{Mat}_{b.\ c.} v$ pour chaque $v \in K^n$.

3 spectre d'une matrice stochsatique

1. *(plus difficile) Montrer que chaque valeur propre unitaire de A est racine de l'unité et donner des exemples. On pourra montrer que l'application*
$$\left\{\begin{array}{ccc}[1,n|] & \longrightarrow & [1,n|] \\ i & \longmapsto & \min\{j\ ;\ a_{i,j}\neq 0\}\end{array}\right. \quad \textit{stabilise la partie } \left\{i\ ;\ |v_i| = \max_{k\in[1,n|]}|v_k|\right\}.$$

2. Notons φ et M resp. l'application et la partie suggérées en indication. L'application φ fait bien sens car, à $i\in[1,n|]$ fixé, la partie $\{j\ ;\ a_{i,j}\neq 0\}$ est non vide (sinon la somme $1=\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ serait nulle). Soit (λ,V) un couple propre de A avec λ unitaire, soit $i\in M$ et notons $J:=\{j\ ;\ a_{i,j}\neq 0\}$.

   Reprenons les calculs de la question précédente en sommant sur J plutôt que sur tout $[1,n|]$: cela ne change pas les sommes vu la présence dans la sommande du facteur $a_{i,j}$ (lequel s'annule quand $j\notin J$). On obtient ainsi l'égalité des coordonnées de V *indexées par* J, ce qui s'écrit plus précisément[6]
$$\forall j\in J,\ v_j=\lambda v_i, \text{ d'où l'on déduit } v_{\varphi(i)}=v_{\min J}=\lambda v_i.$$
   Prendre les modules donne $\left|v_{\varphi(i)}\right|=|v_i|$ (puisque λ est unitaire), d'où $\varphi(i)\in M$.

   Concluons. Nous venons de montrer que la partie M était stable par φ, ce qui permet de définir par itération de φ une suite $(j_N)_{N\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}$ de premier terme $\min M$. La suite $(v_{j_N})_{N\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique de raison λ vu la relation
$$\forall m\in M,\ v_{j_{m+1}} \underset{\text{suite } (j_N)_{N\in\mathbb{N}}}{\overset{\text{définition de la}}{=}} v_{\varphi(j_m)} \overset{j_m\in M}{=} \lambda v_{j_m}$$
   et son premier terme $v_{\min M}$ est non nul puisque son module est maximal parmi ceux des coordonnées de V (lequel est non nul car propre). Cette suite prenant par ailleurs ses valeurs dans l'ensemble fini des coordonnées de V, elle ne peut être injective. Ces trois conditions suffisent à conclure : la raison λ est racine de l'unité[7].

   Pour exemples, lorsque A est la matrice cyclique $\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0\end{pmatrix}$, en abrégeant $\omega:=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, le vecteur $\left(\omega^N,\omega^{2N},\omega^{3N},...,\omega^{nN}\right)$ est alors pour chaque $N\in[1,n|]$ propre pour A avec pour valeur propre associée ω^N (qui est bien une racine de l'unité[8]).

4 Riemann dans exo réduction/analyse

On impose $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ et que f soit l'opérateur[9]
$$\varphi\mapsto\left[t\mapsto\varphi\left(\frac{t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{t+1}{2}\right)\right].$$
Montrons alors que chaque valeur propre de f est de module au plus 2.

Soit (λ,φ) un couple propre pour f, soit $t\in[0,1]$ tq $\varphi(t)\neq 0$. Une récurrence immédiate montrerait l'égalité[10]
$$\left[f^{\circ n}(\varphi)\right](t)=\sum_{i=1}^{2^n} f\left(\frac{t+i}{2^n}\right), \text{ d'où la tendance } \frac{\lambda^n}{2^n}\varphi(t)=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} f\left(\frac{t+i}{2^n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f.$$

Puisque $\varphi(t)\neq 0$, la suite géométrique $N\mapsto\left(\frac{\lambda}{2}\right)^N$ converge; sa raison $\frac{\lambda}{2}$ est donc majorée par 1 en module, ce qui conclut.

---

[6] *Attention* : on n'a plus forcément $v_i=v_j$ car il se pourrait que $i\notin J$, par exemple quand $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $V=\binom{1}{-1}$, $\lambda=-1$ et $i=1$ (alors $J=\{2\}$).

[7] Soient en effet $r\in\mathbb{N}$ et $N\in\mathbb{N}^*$ tels que $v_{j_{r+N}}=v_{j_r}$, ce qui s'écrit $\lambda^N v_{j_r}=v_{j_r}$, d'où $\lambda^N=1$ (puisque $v_{j_r}=\lambda^r v_{\min M}$ est non nul).

[8] Quand $n=2$, on retrouve un contre-exemple signalé plus haut.

[9] Bien s'assurer que f fait sens.

[10] On reconnaît une somme d'Eudoxe-Archimède.

5 codiag/cotrig général en dim finie

Soit $\mathcal{F} \subset L(E)$. Montrons qu'il y a une base de E diagonalisant chaque endomorphisme de $\mathcal{F}$ ssi les éléments de $\mathcal{F}$ sont chacun diagonalisables et commutent.

Pour le sens direct, étant donnée une telle base de codiagonalisation de $\mathcal{F}$, la matrice de chaque $\varphi \in \mathcal{F}$ dans cette base est diagonale, donc : d'une part chaque élément de $\mathcal{F}$ est diagonalisable, d'autre part toutes ces matrices commutent (çed la partie $\mathcal{F}$ est commutative).

Pour le sens réciproque, on raisonne par récurrence sur la dimension de E. Plus précisément, pour chaque naturel N notons D_N l'énoncé

$$\forall V \subset E \begin{array}{l}\text{sous-espace vectoriel}\\ \text{de dimension au plus } N\end{array}, \forall \mathcal{D} \subset L(V), \left\{\begin{array}{l}\forall d \in \mathcal{D},\ d \text{ diagonalisable}\\ \forall d, d' \in \mathcal{D},\ d \circ d' = d' \circ d\end{array}\right. \Longrightarrow [\exists \mathcal{V} \text{ base de } V,\ \forall d \in \mathcal{D},\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} d \text{ diagonale}]$$

et montrons $\forall N \in [0, n|]$, D_N par récurrence.

Dans chaque espace vectoriel de dimension 0 ou 1, chaque endomorphisme est scalaire, donc diagonalisable, ce qui rend tautologiques les énoncés D_0 et D_1.

Soit $N \in [0, n|[$ tel que D_N. Soit $V \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension au plus $N+1$, soit $\mathcal{D} \subset L(V)$ commutative dont chaque élément est diagonalisable. Si chaque élément de $\mathcal{D}$ est scalaire, on a terminé (comme pour D_1). Soit sinon $\delta \in \mathcal{D}$ non scalaire. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} \delta$. L'espace $E_\lambda(\delta)$ est alors stable par chaque $d \in \mathcal{D}$ (car un tel d commute avec δ), donc la partie de $L(V)$ formée des induits des éléments de $\mathcal{D}$ fait sens, est commutative (par restriction d'éléments commutant) et formée d'éléments diagonalisables (induits d'endomorphismes diagonalisables). Vu que $E_\lambda(\delta)$ est par ailleurs de dimension au plus N (sinon il vaudrait tout V et $\delta = \lambda \operatorname{Id}$ serait scalaire), on peut utiliser l'hypothèse D_N pour invoquer une base codiagonalisant les induits considérés. Finalement, on peut invoquer une famille $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \operatorname{Sp} f}$ telle que $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de $E_\lambda(\delta)$ diagonalisant $d_{|E_\lambda(\delta)}$ pour chaque $(d, \lambda) \in \mathcal{D} \times \operatorname{Sp} f$. En en invoquant une concaténée $\mathcal{B}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} d$ est alors (à $d \in \mathcal{D}$ fixé) diagonale par blocs diagonaux, donc diagonale tout court, ce qui conclut.

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{T} \subset L(E)$ formée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent. Montrer qu'il y a une base de E trigonalisant chaque $t \in \mathcal{T}$.

1. On raisonne matriciellement et par récurrence sur n. Pour chaque naturel N, notons $\mathcal{E}_N$ l'énoncé

$$\forall \mathcal{T} \subset M_N(\mathbb{C}), \left\{\begin{array}{l}\forall t \in \mathcal{T},\ t \text{ trigonalisable}\\ \forall t, t' \in \mathcal{T},\ tt' = t't\end{array}\right. \Longrightarrow \exists P \in GL_N(\mathbb{C}), \forall t \in \mathcal{T},\ PtP^{-1} \text{ triangulaire}$$

et montrons $\forall N \in \mathbb{N},\ \mathcal{E}_N$ par récurrence forte.

Lorsque $N \in \{0, 1\}$, chaque matrice de $M_N(\mathbb{C})$ est scalaire, donc triangulaire, d'où l'énoncé $\mathcal{E}_N$ en imposant $P := I_N$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \in [1, N|]$, $\mathcal{E}_i$ et soit $\mathcal{T}$ une partie commutative de $M_{N+1}(\mathbb{C})$ formée de matrices trigonalisables. Si $\mathcal{T}$ ne contient que des matrices scalaires, on a terminé (car ces dernières sont trivialement trigonalisables). Soit sinon $\tau \in \mathcal{T}$ non scalaire, soit $\lambda \in \operatorname{Sp} \tau$ (légitime car χ_τ est de degré $N+1 \geq 2$ et admet donc une racine complexe) et abrégeons $V := E_\lambda(\tau)$. Ce dernier espace est alors stable par chaque $t \in \mathcal{T}$ (car un tel t commute avec τ), de dimension au moins 1 (comme chaque sous-espace propre) et de dimension au plus N (sinon V vaudrait tout $\mathbb{C}^{N+1}$ et $\tau = \lambda \operatorname{Id}$ serait scalaire). En invoquant une base de V complétée en une base de $\mathbb{C}^{N+1}$ et en notant P la matrice de passage vers cette base depuis celle canonique, on peut alors écrire

$$\forall t \in \mathcal{T},\ P^{-1}tP = \begin{pmatrix} A_t & ? \\ 0 & B_t \end{pmatrix} \quad \text{pour deux familles} \left\{\begin{array}{l}(A_t) \in M_v(\mathbb{C})^{\mathcal{T}}\\ (B_t) \in M_w(\mathbb{C})^{\mathcal{T}}\end{array}\right. \text{de matrices}$$
$$\text{où l'on a abrégé } v := \dim V \text{ et } w := N+1-v$$

Le calcul par blocs montre que les parties $\{A_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ et $\{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ sont commutatives ; or on a à $t \in \mathcal{T}$ fixé l'égalité

$$\chi_t = \chi_{P^{-1}tP} = \chi \begin{pmatrix} A_t & ? \\ 0 & B_t \end{pmatrix} = \chi_{A_t} \chi_{B_t},$$

ce qui montre que χ_{A_t} et χ_{B_t} sont scindés (comme facteur du polynôme scindé χ_t), donc que les matrices A_t et B_t sont trigonalisables. Nous pouvons donc utiliser les hypothèses $\mathcal{E}_v$ et et $\mathcal{E}_w$: soient α et β deux matrices inversibles cotrigonalisant resp. $\{A_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ et $\{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$. Le calcul par blocs montre alors à $t\in\mathcal{T}$ fixé les égalités

$$P^{-1}tP=\begin{pmatrix} A_t & ? \\ 0 & B_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha T_t\alpha^{-1} & ? \\ 0 & \alpha U_T\beta^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_t & ¿ \\ 0 & U_T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{-1}$$

6 dgB de matrices trigB

Soient $\left\{\begin{array}{l} l\in\mathbb{N}^* \\ m\in\mathbb{N}^* \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} a\in\mathbb{N}^{*l} \\ b\in\mathbb{N}^{*m} \end{array}\right.$ *et* $\left\{\begin{array}{l} \lambda\in K^l \\ \mu\in K^m \end{array}\right.$ *injectives. En notant*

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha:=a_1+a_2+\cdots+a_l \\ \beta:=b_1+b_2+\cdots+b_m \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \Lambda:=\operatorname{Diag}\left(\lambda_1 I_{a_1},\lambda_2 I_{a_2},...,\lambda_l I_{a_l}\right) \\ M:=\operatorname{Diag}\left(\mu_1 I_{b_1},\mu_2 I_{b_2},...,\mu_m I_{b_m}\right) \end{array}\right. ,$$

soit $B\in M_{\alpha,\beta}(K)$ *vue comme matrice* $\left(B_i^j\right)_{i\in[1,l|]}^{j\in[1,m|]}$ *par* $l\times m$ *blocs découpés selon les familles* a *et* b*. Montrer alors que la matrice*

$$\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } \begin{array}{c} \forall i\in[1,l|] \\ \forall j\in[1,m|] \end{array},\ \lambda_i=\mu_j\Longrightarrow B_{i,j}=0.$$

Tout d'abord, le polynôme

$$\chi\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix}=\chi_\Lambda\chi_M=\prod_{i=1}^{l}(X-\lambda_i)^{a_i}\prod_{j=1}^{m}\left(X-\mu_j\right)^{b_j}$$

est scindé. Il reste à comparer les ordres de multiplicités. Un rappel sera indispensable :

si une matrice contient un coefficient non nul dont
la ligne *ou* la colonne associée est nulle ailleurs,
alors le rang de cette matrice vaut 1 plus le rang de matrice
obtenue en en retirant la ligne *et* la colonne associées.

eg : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Soit $i\in[1,l|]$.

Si $\lambda_i\notin\operatorname{Sp}M$, alors la matrice $M-\lambda_i I$ est inversible et λ_i est d'ordre a_i pour $\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix}$, d'où l'égalité

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix}-\lambda_i\right) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \Lambda-\lambda_i & B \\ 0 & M-\lambda_i \end{pmatrix}=\operatorname{rg}(\Lambda-\lambda_i)+\operatorname{rg}(M-\lambda_i) \\ &= (\alpha-\omega_\Lambda(\lambda_i))+\beta=(\alpha+\beta)-\omega_{\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix}}(\lambda_i).\end{aligned}$$

Soit sinon $j\in[1,b|]$ tel que $\lambda_i=\mu_j$. Cette dernière valeur propre est alors d'ordre a_i+b_j pour $\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix}$ et, dans la matrice $\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix}-\lambda_i\begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & I_\beta \end{pmatrix}$, les $a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}$ premières lignes possèdent chacune un unique coefficient non nul (de la forme $\lambda_{?<i}-\lambda_i$), de même pour les $b_m+b_{m-1}+\cdots+b_{j+1}$ dernières lignes,

d'où l'égalité

$$\operatorname{rg}\left[\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & I_\beta \end{pmatrix}\right] = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}) + r + (b_m + b_{m-1} + \cdots + b_{j+1})$$

$$\text{où l'on a abrégé } r := \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_i^{l+1} & \cdots & B_i^{l+j-1} & B_i^{l+j} \\ \lambda_{i+1}-\lambda_i & & & B_{i+1}^{l+1} & \cdots & B_{i+1}^{l+j-1} & B_{i+1}^{l+j} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \lambda_l - \lambda_i & B_l^{l+1} & \cdots & B_l^{l+j-1} & B_l^{l+j} \\ & & & \mu_1 - \mu_j & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \mu_{j-1}-\mu_j & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned} & \operatorname{rg}\left[\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & I_\beta \end{pmatrix}\right] = \operatorname{taille}\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} - \omega_{\lambda_i}\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} \\ \iff\ & (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}) + r + (b_m + b_{m-1} + \cdots + b_{j+1}) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_l) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{m+1}) - (a_i + b_j) \\ \iff\ & r = (a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_l) + (b_{j+1} + b_{j+2} + \cdots + b_m). \end{aligned}$$

Or sous-matrice obtenue en retirant la première ligne et la denière colonne est inversible (car diagonale à coefficients chacun non nuls), donc sera de rang $(a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_l) + (b_{j+1} + b_{j+2} + \cdots + b_m)$

ssi la première ligne est liée au autres. Or une telle relation de liaison ne peut faire intervernir les lignes avec les $\lambda_? - \lambda_i$ vu la nullité des premières coordonées, donc revient à être engendrée par $\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_j & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & \mu_{j-1}-\mu_j & 0 \end{pmatrix}$,

donc juste à avoir dernière coordonnée $B_{i,j}$ nulle, CQFD

7 seps en somme directe (démo formelle)

Notons $\mathcal{S} := \{\Lambda \subset \operatorname{Sp} f\ ;\ \Lambda \text{ fini}\}$ et pour chaque $\Lambda \in \mathcal{S}$ notons[11]

$$\mathcal{F}_\Lambda := \left\{ a \in \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\ ;\ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = 0 \right\}.$$

Le caractère "en somme directe" de la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\operatorname{Sp} f}$ revient alors[12] à celui de la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pour chaque $\Lambda \in \mathcal{S}$, ce qui s'écrit

$$\forall\Lambda \in \mathcal{S},\ \forall a \in \mathcal{F}_\Lambda,\ \forall\lambda \in \Lambda,\ a_\lambda = 0 \text{ (ce que l'on veut montrer).}$$

Idée : une égalité $0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ implique d'une part (appliquer f) $0 = \sum f(a_\lambda) = \sum \lambda a_\lambda$, d'autre part (multiplier par un λ_0 fixé) $0 = \sum \lambda_0 a_\lambda$, d'où par différence $\sum_{\lambda\neq\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) a_\lambda = 0$, ce qui incite à raisonner par récurrence sur $\operatorname{Card}\Lambda$.

Pour chaque naturel n, notons donc P_n la proposition

$$\forall\Lambda \in \mathcal{S},\ \operatorname{Card}\Lambda = n \Longrightarrow \mathcal{F}_\Lambda = \{(0)\}$$

et montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n$ par récurrence, ce qui conclura.

Soit $\Lambda \in \mathcal{S}$ de cardinal[13] 1, mettons $\Lambda = \{\lambda_0\}$ pour un certain $\lambda_0 \in \operatorname{Sp} f$. Soit $a \in \mathcal{F}_\Lambda$: on a alors d'une part $\forall\lambda \in \Lambda,\ a_\lambda = a_{\lambda_0}$, d'autre part $0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = a_{\lambda_0}$, d'où la nullité de la famille a, ce qui montre P_1.

[11] $\mathcal{S}$ pour « **s**pectre », $\mathcal{F}$ pour « **f**amille », Λ car ses éléments sont des λ.

[12] *Rappel* : une famille de sevs est en somme directe ssi chaque sous-famille *finie* l'est.

[13] On pourrait très bien initialiser la récurrence au rang 0 : la condition $\sum_{\lambda\in\emptyset} a_\lambda = 0$ étant toujours vérifiée (par définition de la somme vide), la partie $\mathcal{F}_\emptyset$ vaut tout le produit $\prod_{\lambda\in\emptyset} E_\lambda$, espace vectoriel singleton dont tous les éléments sont nuls, d'où $\mathcal{F}_\emptyset = \{(0)\}$, çed P_0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n. Soit $\Lambda \in \mathcal{S}$ de cardinal $n+1$. Soit $a \in \mathcal{F}_\Lambda$. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ (légitime vu que $\operatorname{Card} \Lambda \geq 2$) et posons $\Lambda^* := \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ (qui est de cardinal n, ce qui permettra d'utiliser P_n). On a alors les égalités

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \Lambda^*} (\lambda - \lambda_0)\, a_\lambda & \overset{\text{sommande nulle}}{\underset{\text{pour } \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda^*}{=}} \sum_{\lambda \in \Lambda} (\lambda - \lambda_0)\, a_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda a_\lambda - \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda_0 a_\lambda \\ & \overset{a_\lambda \in E_\lambda}{\underset{\text{à } \lambda \in \Lambda \text{ fixé}}{=}} \sum_{\lambda \in \Lambda} f(a_\lambda) - \lambda_0 \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = f\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda\right) - \lambda_0 \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda\right) \\ & = [f - \lambda_0]\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda\right) \overset{a \in \mathcal{F}_\Lambda}{=} [f - \lambda_0](0) = 0,\end{aligned}$$

d'où l'appartenance $((\lambda - \lambda_0)\, a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda^*} \in \mathcal{F}_{\Lambda^*}$. Utiliser P_n livre alors la nullité de la famille précédente, ce qui s'écrit

$$\forall \lambda \in \Lambda^*,\ \underbrace{(\lambda - \lambda_0)}_{\neq 0} a_\lambda = 0, \text{ çed } \forall \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\},\ a_\lambda = 0.$$

Il reste à montrer la nullité du vecteur

$$a_{\lambda_0} = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda^*} a_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda - \sum_{\lambda \in \Lambda^*} a_\lambda \quad :$$

or la somme sur Λ^* est nulle vu que a_λ est nul pour chaque $\lambda \in \Lambda^*$ (on vient de l'établir) et la somme sur Λ également puisque $a \in \mathcal{F}_\Lambda$ (argument déjà utilisé). Finalement, la famille $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est nulle, ce qui conclut.

RQ : comparer (1) seps en $\bigoplus$ et (2) liberté de veps associés à vps $\neq$. On aurait très bien pu montrer (2) comme l'on a montré (1) puis en déduire (1) rapidement. Cependant, on aurait alors partout remplacé a_λ par $\alpha_\lambda v_\lambda$, ce qui aurait été plus lourd.

8 petit lemme noyax

Lemme 1

Soient p et q deux endomorphismes de E de somme Id *et de produits nuls. Alors E est somme directe de leurs noyaux*[14] *:*

$$\begin{cases} p + q = \mathrm{Id} \\ pq = 0 = qp \end{cases} \Longrightarrow E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q.$$

DEM

Les noyaux $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} q$ sont en somme directe vu à $v \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ fixé les égalités

$$v = \mathrm{Id}(v) = [p + q](v) = \underbrace{p(v)}_{=0 \text{ car } v \in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{q(v)}_{=0 \text{ car } v \in \operatorname{Ker} q} = 0 + 0 = 0.$$

L'inclusion $E \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$ découle par ailleurs à $v \in E$ fixé des égalités et appartenance

$$v \overset{\text{calcul}}{\underset{\text{ci-dessus}}{=}} \underbrace{q(v)}_{\in \operatorname{Ker} p \text{ car } pq = 0} + \underbrace{p(v)}_{\in \operatorname{Ker} q \text{ car } qp = 0} \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q.$$

9 zeros polymin $=$ vp

Soit par ailleurs λ une racine de μ_a. Notons $P := \frac{\mu_a}{X - \lambda}$: c'est un polynôme, de degré strictement inférieur à celui de μ_a, donc qui n'annule pas a. Si λ n'était pas vp de a, alors $a - \lambda 1_{\mathcal{A}}$ serait injectif, donc régulier à gauche (pour la composition), ce qui permettrait de simplifier par $a - \lambda 1_{\mathcal{A}}$ dans les égalités

$$0 = \mu_a(a) = [(X - \lambda) P](a) = [X - \lambda](a)\ \ P(a) = (a - \lambda 1_{\mathcal{A}}) P(a)$$

et d'obtenir $P(a) = 0$, ce qui serait absurde.

[14] *Bonus* : p (resp. q) est le projecteur sur $\operatorname{Ker} q$ (resp. $\operatorname{Ker} p$).

10 isom matrices polynômes polynômes matrices

Observer que l'anneau $M_n(K[X])$ est une K-algèbre dont une base est[15]

$$\left(X^d \cdot E_{i,j}\right) \text{ lorsque } (d,i,j) \text{ parcourt } \mathbb{N}\times [1,n|]^2 .$$

De même, l'anneau $M_n(K)[X]$ est une K-algèbre dont une base est[16]

$$\left(E_{i,j} \cdot X^d\right) \text{ lorsque } (d,i,j) \text{ parcourt } \mathbb{N}\times [1,n|]^2 .$$

On peut par conséquent, en échangeant les vecteurs de base ci-dessus, définir un isomorphisme entre les K-espaces vectoriels $M_n(K[X])$ et $M_n(K)[X]$. Notons tout particulièrement

$$\varphi \text{ l'isomorphisme de } K\text{-espaces vectoriels } \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(K[X]) & \cong & M_n(K)[X] \\ X^d \cdot E_{i,j} & \longleftrightarrow & E_{i,j} \cdot X^d \end{array} \right. .$$

Ce dernier coïncide avec l'application de l'énoncé sur une base de l'espace vectoriel $M_n(K[X])$, donc lui est égal.

Il reste à montrer que φ préserve l'unité et le produit. Pour l'unité, vu les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_{M_n(K[X])} = X^0 \cdot I_n = X^0 \cdot \sum_{i=1}^n E_{i,i} = \sum_{i=1}^n \left(X^0 \cdot E_{i,i}\right) \\ 1_{M_n(K)[X]} = I_n \cdot X^0 = \left(\sum_{i=1}^n E_{i,i}\right) \cdot X^0 = \sum_{i=1}^n \left(E_{i,i} \cdot X^0\right) \end{array} \right. ,$$

on peut conclure

$$\varphi\left(1_{M_n(K[X])}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \left(X^0 \cdot E_{i,i}\right)\right) \underset{\text{additive}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} \sum_{i=1}^n \varphi\left(X^0 \cdot E_{i,i}\right) \underset{\text{de } \varphi}{\overset{\text{définition}}{=}} \sum_{i=1}^n \left(E_{i,i} \cdot X^0\right) = 1_{M_n(K)[X]}.$$

Pour le produit, il suffit par bilinéarité d'observer ce qui se passe sur une base :

$$\begin{array}{rcl} \left(X^d \cdot E_{i,j}\right)\left(X^\delta \cdot E_{k,\ell}\right) \underset{M_n(K[X])}{\overset{\text{calcul dans}}{=}} X^d X^\delta \cdot E_{i,j} E_{k,\ell} & = & X^{d+\delta} \cdot \left(\delta_j^k E_{i,\ell}\right) = \left(\delta_j^k X^{d+\delta}\right) \cdot E_{i,\ell}, \\ \text{d'où } \varphi\left(\left(X^d \cdot E_{i,j}\right)\left(X^\delta \cdot E_{k,\ell}\right)\right) & \underset{\text{homogène}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} & \delta_j^k \varphi\left(X^{d+\delta} \cdot E_{i,\ell}\right) \underset{\text{de } \varphi}{\overset{\text{définition}}{=}} \delta_j^k E_{i,\ell} \cdot X^{d+\delta}. \end{array}$$

On a par ailleurs

$$\varphi\left(X^d \cdot E_{i,j}\right) \varphi\left(X^\delta \cdot E_{k,\ell}\right) \underset{\text{de } \varphi}{\overset{\text{définition}}{=}} \left(E_{i,j} \cdot X^d\right)\left(E_{k,\ell} \cdot X^\delta\right) \underset{M_n(K)[X]}{\overset{\text{calcul dans}}{=}} \left(E_{i,j} E_{k,\ell}\right) \cdot X^d X^\delta = \delta_j^k E_{i,\ell} \cdot X^{d+\delta}.$$

11 Cayley Hamilton

DEM par matrices de polynômes et polynômes de matrices (HP)

Le cours de première année définit les polynômes et les matrices à coefficients dans un *corps*. Le calcul polynomial ou matriciel se généralise immédiatement lorsque les coefficients sont à valeurs dans un *anneau*. Ainsi, si $\mathcal{A}$ dénote un anneau unitaire (resp. commutatif, intègre), alors[17]

1. $\mathcal{A}[X]$ est un anneau unitaire (resp. commutatif, intègre) et
2. $M_n[\mathcal{A}]$ est un anneau unitaire (non commutatif et non intègre dès que $n \geq 2$) où la fonction polynomiale det fait sens et vérifie l'égalité
$$\forall M \in M_n(\mathcal{A}), \ M^{\ t}\operatorname{com} M = (\det M)\, I_n.$$

[15] Matrices dont le seul coefficient non nul est une puissance de l'indéterminée.

[16] Monômes dont le coefficient est une matrice élémentaire.

[17] Toute autre propriété devra être sciemment pensée et au besoin démontrée, les anneaux se comportant très différemment des corps.

Le cas qui nous intéresse est celui des matrices à coefficients dans $K[X]$ et celui des polynômes à coefficients dans $M_n(K)$. L'essentiel à retenir est que[18]

les algèbres $M_n(K[X])$ et $M_n(K)[X]$ seront identifiées
quitte à "voir" les monômes X^d comme des "scalaires".

Par exemple, on identifiera sans confusion possible

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} X-8 & 4X^3+\pi \\ eX^6 & X^6+\sqrt{2}X \end{pmatrix} \text{ de } M_2(\mathbb{R}[X]) \text{ et le polynôme}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix} X^6 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de } M_2(\mathbb{R})[X]$$

et l'on notera indifféremment
$$I_nX \text{ ou } XI_n = \operatorname{Diag}(X, X, ..., X).$$

Plus précisons, on pourrait montrer que l'identification ci-dessus, qui s'explicite en

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(K[X]) & \cong & M_n(K)[X] \\ \left(\sum_{d\geq 0} c_{d,i,j}X^d\right)_{i,j\in[1,n|]^2} & \longleftrightarrow & \sum_{d\geq 0}(c_{d,i,j})_{i,j\in[1,n|]^2} X^d \end{array} \right. ,$$

est un isomorphisme de K-algèbres qui échange $X^d \cdot E_{i,j} \longleftrightarrow E_{i,j} \cdot X^d$ pour chaque $(d,i,j) \in N \times [1,n|]^2$. La preuve est "pédestre" et ses détails laissées aux soins de la lectrice et du lecteur.[19]

Le fait que cette identification préserve le produit nous servira dans une démonstration (non exigible) du théorème de Cayley-Hamilton.

En notant T la transposée de la comatrice de $XI_n - A$, on a l'égalité

$$(XI_n - A)T = \det(XI_n - A)I_n = \chi_A I_n \text{ dans } M_n(K[X]).$$

Appliquer l'isomorphisme d'algèbres $M_n(K[X]) \cong M_n(K)[X]$ (vu à la section **??**) permet alors de voir l'égalité précédente dans $M_n(K)[X]$ où il fait sens de remplacer X par A (on applique eval_A). Le terme $XI_n - A$ s'annulant après évaluation en A, il en est de même du membre de gauche, donc de celui de droite, ce qui s'écrit $\chi_A(A)I_n = 0$. Puisque $n \geq 1$, on peut en déduire $\chi_A(A) = 0$, *c. q. f. d.*

DEM par récurrence complexe *Cas où $a = A$.*

Puisque A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, on peut invoquer une matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$. On a l'égalité

$$\chi_A = \chi_T, \text{ d'où les égalités } \chi_A(A) = \chi_T\left(PTP^{-1}\right) = P\chi_T(T)P^{-1}.$$

Il suffit donc de montrer $\chi_T(T) = 0$, ce qui permet de se ramener au cas où A est triangulaire.

Soit donc $\lambda \in \mathbb{K}^d$ tel que A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ On alors } \chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i).$$

La nullité de $\chi_A(A)$ équivaut à celles de ses colonnes : nous allons montrer un peu plus. Pour chaque $d \in [1,n|]$ définissons $A_d := \prod_{i=1}^{d}(A - \lambda_i I_n)$ et notons $\mathcal{E}_d$ l'énoncé

les d premières colonnes de A_d sont nulles.

Montrons alors $\forall d \in [0,n|]$, $\mathcal{E}_d$. On en déduira $\mathcal{E}_n$, ce qui conclura à la nullité de $A_n = \chi_A(A)$.

L'énoncé $\mathcal{E}_0$ est tautologique (la quantification universelle sur $[1,0|]$ est vide).

Soit $d \in [1,n|]$ tel que $\mathcal{E}_{d-1}$. Observer l'égalité

$$A_d = (A - \lambda_d I_n)A_{d-1}.$$

[18] Ainsi, chaque polynôme à coefficients matriciels "est" une matrice à coefficients polynomiaux.

[19] Observer que les matrices monomiales $X^d \cdot E_{i,j}$ forment une K-base de $M_n(K[X])$ et que les polynômes matriciels $E_{i,j} \cdot X^d$ forment une K-base de $M_n(K)[X]$.

Soit $i \in [1, d|[$. La i-ième colonne de A_{d-1} étant nulle par $\mathcal{E}_{d-1}$, on peut écrire

$$A_{d-1}E_i = 0, \text{ d'où } A_dE_i = (A - \lambda_d I_n)\, A_{d-1}E_i = 0.$$

Par ailleurs, la d-ième colonne de

$$A - \lambda_d I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_d & ? & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\ & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & \lambda_{d-1} - \lambda_d & \ddots & & & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_{d+1} - \lambda_d & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & ? \\ & & & & & & \lambda_n - \lambda_d \end{pmatrix}$$

a son d-ième coefficient nul, donc est engendrée par les $E_{i<d}$, d'où les égalités et appartenance

$$A_dE_d = A_{d-1} \underbrace{(A - \lambda_d I_n)\, E_d}_{\in \mathrm{Vect}\{E_1, E_2, \ldots, E_{d-1}\}} \in \mathrm{Vect}_{j \in [1,d|[} \underbrace{A_{d-1}E_j}_{=0 \text{ par } \mathcal{E}_{n-1}} = \{0\}\,.$$

Finalement, on a montré $\mathcal{E}_d$, ce qui conclut.

12 poly min & valuations de comatrice

mq si μ_f alors $\mu_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} (X - \lambda)^{\omega_\lambda - \mathrm{val}\, \mathrm{com}((X+\lambda)I_n - A)}$

1. mq $\mathrm{com}\, \mathrm{Diag}\,(A_i) = \mathrm{Diag}\left(\prod_{j \neq i} |A_j| \cdot \mathrm{com}\, A_i\right)$ (ok si A_i inversibles puis génériques)
2. mq $\mathrm{val}\, \mathrm{Diag}\,(M_i) = \min\{\mathrm{val}\, M_i\}$
3. mq $\mathrm{com}\,(tI_n - J) = \sum_{i=1}^{n} t^{n-i}\ {}^tJ^{i-1}$
4. mq $\mathrm{val}\, \mathrm{com}\,(XI_n - \mathrm{Diag}\,(J_{n_i})) = n - \max n_i$
5. mq si $\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda\}$, alors $\mathrm{val}\, \mathrm{com}\,((X + t)\, I_n - A) = \begin{array}{l} \text{si } t \in \mathrm{Sp}\, A : \omega_\lambda - \text{taillemax blocJordan}\lambda \\ \text{sinon } \infty \end{array}$

13 polymin & Jordan

Si A niln alors $\mu_A = X^{\max_{\mathbb{N}} n_i}$.
DEM
Si $E = 0$, alors $\max n_i = \max_{\mathbb{N}} \emptyset = \min \mathbb{N} = 0$ et $\mu_f = 1$.
Sinon, $\nu\,(\mathrm{Diag}\,(J_{n_i})) = \max \nu\,(J_{n_i}) = \max n_i$

si $f = \lambda + nilp$, alors $\mu_f = (X - \lambda)^{\max n_i}$
si μ_f scindé alors $\mu_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ où $m_\lambda = \max n_i$ de $[f - \lambda]_{|E^\lambda}$

14 algo calcul χ_A (Fadeev & co)

1. Définissons une suite $c \in K^n$ telle que
$$\chi_A = \sum_{i=0}^{n} c_i X^{n-i}.$$
   (a) *Rappeler les valeurs de c_0, c_1 et c_n.*

(b) *Montrer l'égalité*

$$\chi'_A = \operatorname{tr}\left[\operatorname{com}\left(XI_n - A\right)\right].$$

(c) *Justifier l'invocation d'une famille* $C \in M_n(K)^{n+1}$ *telle que*

$$^t\operatorname{com}\left(XI_n - A\right) = \sum_{i=-1}^{n-1} C_i X^{n-1-i}.$$

et préciser les valeurs de C_{-1} *et* C_{n-1}.

(d) *Montrer pour chaque* $i \in [0, n|]$ *les égalités*

$$(n-i)\, c_i = \operatorname{tr} C_i.$$

(e) *Montrer pour chaque* $i \in [0, n|]$ *les égalités*

$$C_i - AC_{i-1} = c_i I_n \qquad \text{et} \qquad ic_i = -\operatorname{tr} AC_{i-1}.$$

(f) *En déduire l'égalité*

$$\chi_A = X^n - \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{tr} A_i}{i} X^{n-i}$$

où la suite $(A_1, A_2, ..., A_n)$ *est définie par la récurrence*

$$A_0 := A \text{ et } \forall i \in [0, n|[\,,\ A_{i+1} = \left(A_i - \frac{\operatorname{tr} A_i}{i+1}\right) A.$$

(g) *Vérifier sur une matrice compagne.*

SOL

1. (a) On a vu l'égalité $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$, d'où l'on déduit

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = -\operatorname{tr} A \qquad \text{et} \qquad c_n = (-1)^n \det A.$$

(b) Reprenons l'égalité du cours :

$$\chi_A = \det\left(XE_1 - C_1, XE_2 - C_2, ..., XE_n - C_n\right).$$

Rappelons que, pour dériver une application n-linéaire, on choisit un "facteur" parmi les n, on dérive ce facteur

$$\frac{\partial}{\partial X} \Lambda\left(P_1, P_2, ..., P_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda\left(P_1, ..., P_{i-1}, P'_i, \right)$$

la formule de Leibniz s'obtient en dérivant

$$\begin{aligned}
\chi'_A &= \sum_{i=1}^{n} \det\left(XE_1 - C_1, ..., XE_{i-1} - C_{i-1}, E_i, XE_{i+1} - C_{i+1}, ..., XE_n - C_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det\left(XE_1 - C_1, ..., XE_{i-1} - C_{i-1}, XE_{i+1} - C_{i+1}, ..., XE_n - C_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\operatorname{com}\left(XI_n - A\right)\right]_{i,i} = \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}\left(XI_n - A\right)\right).
\end{aligned}$$

(c) Les mineurs de chaque matrice de M_n (? ? ?) étant des polynômes de degré $n-1$ en les coefficients de cette matrice, les cofacteurs de la matrice $XI_n - A$ sont chacun des polynômes de degré au plus $n-1$. Donc $C_{-1} = 0 = C_{n-1}$.

(d)

$$\begin{aligned} \chi'_A &= \operatorname{tr}\left({}^t\operatorname{com}\left(XA-I_n\right)\right)\\ \sum_{i=0}^{n}\left(n-i\right)c_iX^{n-i-1} &= \operatorname{tr}\sum_{i=-1}^{n-1}C_iX^{n-1-i}\\ \sum_{i=0}^{n-1}\left(n-i\right)c_iX^{n-i-1} &= \sum_{i=0}^{n-1}\operatorname{tr}\left(C_i\right)X^{n-1-i}\\ \left(n-i\right)c_i &= \operatorname{tr}C_i \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \chi_AI_n &= {}^t\operatorname{com}\left(XA-I_n\right)\ \left(XA-I_n\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}C_iX^{n-1-i}\\ \sum_{i=0}^{n}c_iI_nX^{n-i} &= \sum_{i=0}^{n}\left(C_i-C_{i-1}A\right)X^{n-i}\\ c_iI_n &= C_i-C_{i-1}A\\ \operatorname{tr}\left(c_iI_n\right) &= \operatorname{tr}C_i-C_{i-1}A)\\ nc_i &= \left(n-i\right)c_i-\operatorname{tr}C_{i-1}A\\ ic_i &= -\operatorname{tr}C_{i-1}A \end{aligned}$$

(f) def $A_i := AC_i$

(g) pour $A = \begin{array}{ccc} & & a_n \\ 1 & & \\ & & a_2 \\ & 1 & a_1 \end{array}$ on mq $C_k = \begin{array}{cccccccc} 0 & & & a_n & & & & \\ -a_{k-1} & \ddots & & \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{k+1} & \vdots & \ddots & & \\ -a_2 & & -a_{k-1} & a_k & \ddots & \vdots & \ddots & \\ -a_1 & \ddots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & a_n \\ 1 & \ddots & -a_2 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -a_1 & & & & \ddots & a_{k+1} \\ & & 1 & & & & & a_k \end{array}$ d'où $\operatorname{tr}C_k =$

ka_k et $\chi_A = X^n - \sum a_iX^{n-i}$ ok

15 sevs stables et poly annul étrangers

(plus difficile) On note m le naturel tel que $B \in M_m(K)$ et on identifie abusivement les espaces K^{n+m} et $K^n \times K^m$. Montrer alors que les sous-espaces vectoriels de K^{n+m} stables par $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont les produits cartésiens d'un sous-espace vectoriel de K^n stable par A par un sous-espace vectoriel de K^m stable par B. Traduire en termes d'endomorphismes.

1. (a) Soient S et T comme indiqué : l'image d'un vecteur $\binom{s}{t} \in S \times T$ par $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ vaut alors $\binom{As}{Bt}$ qui reste dans $S \times T$ vu que A et B stabilisent resp. S et T, ce qui montre qu'un tel $S \times T$ est bien stable par $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Soit Σ un sous-espace vectoriel stable par $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Nous allons montrer l'égalité[20]

$$\Sigma = p(\Sigma) \times q(\Sigma) \text{ où } \begin{array}{l} p \text{ dénote la projection canonique } K^{n+m} \twoheadrightarrow K^n \\ q \text{ dénote la projection canonique } K^{n+m} \twoheadrightarrow K^m \end{array}.$$

Fixons pour cela un vecteur $\sigma \in \Sigma$ et abrégeons $\binom{v}{w} := \binom{p(\sigma)}{q(\sigma)}$, qui est un vecteur de $p(\Sigma) \times q(\Sigma)$.

L'inclusion $\subset$ est immédiate vu l'égalité $\sigma = \binom{v}{w}$.

Par ailleurs, le vecteur $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sigma$ reste dans Σ, ce qui s'écrit

$$\Sigma \ni \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \binom{v}{w} = \binom{Av}{Bw}, \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} Av \in p(\Sigma) \\ Bw \in q(\Sigma) \end{array} \right., \; i.\ e. \; \left\{ \begin{array}{l} Ap(\sigma) \in p(\Sigma) \\ Bq(\sigma) \in q(\Sigma) \end{array} \right.,$$

ce qui montre que $p(\Sigma)$ et $q(\Sigma)$ sont stables resp. par A et par B.

Il reste pour conclure à montrer l'inclusion $\supset$. Soit donc $x \in p(\Sigma) \times q(\Sigma)$ et soient $\sigma', \sigma'' \in \Sigma$ tels que $x = \binom{p(\sigma')}{p(\sigma'')}$. Le sous-espace vectoriel Σ est stable par chaque polynôme en $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donc (d'après le point précédent) par $\begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}$ pour tous polynômes P et Q, en particulier (quand $\{P, Q\} = \{0, 1\}$) par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc contient les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma' = \binom{p(\sigma')}{0} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma'' = \binom{0}{q(\sigma'')},$$

donc contient leur somme $\binom{p(\sigma')}{p(\sigma'')} = x$, ce qui conclut.

Traduction en termes d'endomorphismes : si f stabilise deux sous-espaces vectoriels supplémentaires S et T tels que les induits $f_{|S}$ et $f_{|T}$ sont annulés resp. par deux polynômes premiers entre eux, alors les sous-espaces vectoriels stables par f sont les sommes directes d'un sous-espace vectoriel de S stables par $f_{|S}$ et d'un sous-espace vectoriel de T stable par $f_{|T}$. Plus précisément, un tel sous-espace vectoriel Σ se décompose selon $E = S \oplus T$ en[21]

$$\Sigma = (\Sigma \cap S) \oplus (\Sigma \cap T).$$

Remarque – Seule l'inclusion $\supset$ utilise l'hypothèse de primalité relative. Cette hypothèse est par ailleurs *nécessaire* : lorsque $A = B$, chaque sous-espace vectoriel S stable par A induit un sous-espace vectoriel[22] $\left\{ \binom{s}{s} \right\}_{s \in S}$ stable par $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ qui n'est pas un produit cartésien si $n > 0$ (et nous verrons dans ce cas que les polynômes annulateurs de A ont en commun un diviseur non constant, donc deux tels polynômes ne sauraient être premiers entre eux).

16 exo 6 (red2)

1. Le symbole $\sim$ désignera la relation de similitude. Mq $\otimes$ est commutatif *modulo* $\sim$ et compatible avec $\sim$. (VERSION expliciter l'action sur une base.)

[20] Cela ne tombe pas du ciel et a été *méthodiquement* intuité par la micro-analyse suivante : si Σ est de le forme désirée $S \times T$, on a alors $S = p(S \times T) = p(\Sigma)$ et de même $T = q(\Sigma)$.

[21] Cette décomposition est à retenir pour les exercices sur les sous-espaces vectoriels stables.

[22] *Culture* : le sous-espace vectoriel $\left\{ \binom{s}{s} \right\}_{s \in S}$ est appelé la ***diagonale*** du sous-espace vectoriel S.

(a) Notons T (comme « **t**enseur ») l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice $A \otimes B$. Notons $(E_1, E_2, ..., E_{n^2})$ la base canonique de K^{n^2} et, pour tous $q, r \in [1, n|]$, définissons

$e_q^r := E_{(q-1)n+r}$ (idée sous-jacente : lister les E_i en en piochant un sur n jusqu'à épuisement).

On lit alors dans la matrice $A \otimes B = \operatorname{Mat}_{\left(E_1, E_2, ..., E_{n^2}\right)} T$ les égalités

$$T\left(e_q^r\right) = T\left(E_{(q-1)n+r}\right) = \sum_{i=1}^n a_{i,q} \sum_{j=1}^n b_{j,r}\ E_{(i-1)n+j} = \sum_{j=1}^n b_{j,r} \sum_{i=1}^n a_{i,q}\ e_i^j,$$

ce qui montre que $B \otimes A$ est la matrice de T dans la base

$$\left(e_1^1, e_2^1, ..., e_n^1, \quad e_1^2, e_2^2, ..., e_n^2, \quad ..., \quad e_1^n, e_2^n, ..., e_n^n\right).$$

Par conséquent, les produits tensoriels $A \otimes B$ et $B \otimes A$ sont les matrices d'un même endomorphisme, donc sont semblables.

Soient P et Q deux matrices inversibles. Le calcul par blocs et la description de l'action multiplicative des matrices diagonales livre alors les égalités et similitude

$$\begin{array}{rcl}
A \otimes \left(QBQ^{-1}\right) & = & \left(a_{i,j} QBQ^{-1}\right)_{i,j \in [1,n|]} = \left(\ Q \quad a_{i,j} B \quad Q^{-1}\ \right)_{i,j \in [1,n|]} \\
& = & \operatorname{Diag}(Q, Q, ..., Q) \times \left(a_{i,j} B\right)_{i,j \in [1,n|]} \times \operatorname{Diag}\left(Q^{-1}, Q^{-1}, ..., Q^{-1}\right) \\
& = & \operatorname{Diag}(Q, Q, ..., Q) \times (A \otimes B) \times \operatorname{Diag}(Q, Q, ..., Q)^{-1} \\
& \sim & A \otimes B, \text{ d'où (en remplaçant } A \text{ par } PAP^{-1}) \text{ les similitudes} \\
\left(P^{-1}AP\right) \otimes \left(Q^{-1}BQ\right) & \sim & \left(P^{-1}AP\right) \otimes B \sim B \otimes \left(P^{-1}AP\right) \sim B \otimes A \sim A \otimes B.
\end{array}$$