

translations

lundi 6 mai 2024
Exos résolus p. 195

Correction proposée

Rappel – définition d'une translation. Étant donnés deux points U et V , [la translation qui envoie U sur V] envoie chaque point P sur le point Q vérifiant AU CHOIX l'une des conditions suivantes¹ :

1. (version "parallélogramme") le quadrilatère $UVQP$ est un parallélogramme ;
2. (version "parallélismes") on a les parallélismes $\left\{ \begin{array}{l} (UV) \parallel (PQ) \\ (QV) \parallel (UP) \end{array} \right.$;
3. (version "milieux") les milieux des segments $[UQ]$ et $[PV]$ coïncident ;
4. (version "symétrie centrale") le point Q est l'image de U par la symétrie centrale de centre $m[PV]$.

Nous utiliserons librement ces versions, en choisissant évidemment à chaque fois celle qui nous simplifiera le travail au maximum.

Par exemple, l'image de U par la translation ci-dessus sera (version "symétrie centrale") l'image de U par la symétrie centrale de centre $m[\underline{UV}]$ (on a remplacé P par U), çàd... V . Ouf : [la translation qui envoie U sur V] envoie bien U sur V !

Au passage, la présence des crochets rappelle que l'expression entre crochets est à prendre comme un tout insécable. Le français qu'elle contient fait cependant sens (« envoyer tel point sur tel point ») et il importe de vérifier que ce sens est compatible avec la terminologie choisie – ce que nous venons d'effectuer.

Exercice 21 – sur le triangle "des milieux" – et sur les symétries d'un problème

1. Traitons les deux questions l'une après l'autre.

(a) (trois parallélismes)

- i. Montrons tout d'abord le parallélisme $(IJ) \parallel (AC)$ à l'aide de la réciproque de théorème de Thalès.

Les points B, I, A étant alignés dans cet ordre, ainsi que B, J, C , il suffit pour conclure d'établir l'égalité des rapports $\frac{BI}{BA} \stackrel{?}{=} \frac{BJ}{BC}$; montrons qu'ils valent chacun $\frac{1}{2}$.

Le point I étant (par hypothèse) le milieu de $[AB]$, il partage ce dernier en deux segments de longueur moitié moindre², d'où l'égalité $BI = \frac{AB}{2}$. Diviser par BA donne alors l'égalité $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, remplacer dans le raisonnement précédent $\binom{I}{A}$ par $\binom{J}{C}$ transforme la prémisse $I = m[AB]$ en $J = m[BC]$ et la conclusion $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$ en $\frac{BJ}{BC} = \frac{1}{2}$. La nouvelle prémisse étant vérifiée (par hypothèse sur J), la nouvelle conclusion aussi, ce qui conclut.

- ii. **Remarque longue mais ô combien profonde, utile et élégante.** Au dernier paragraphe, nous avons réutilisé un raisonnement à l'identique³ mais portant sur des lettres différentes, obtenues *via* une certaine transformation. Cette idée, qui va nous resservir, est généralement sous-utilisée et très mal présentée car elle requiert pour atteindre la pleine clarté de rentrer suffisamment dans les détails – ce que nous allons faire ici afin de l'exploiter au maximum.

Deux points fondamentaux sont à observer :

- A. pouvoir EXPLICITER ladite transformation ;
- B. montrer que la vérité des hypothèses de l'énoncé est PRÉSERVÉE/INCHANGÉE/CONSERVÉE après application de ladite transformation – çàd après que l'on a remplacé partout chaque lettre de l'énoncé par son image.

¹ ces conditions sont autant de reformulations rigoureuses (logiques) d'une même propriété, c'est pourquoi on les qualifie de "logiquement équivalentes"

² La lectrice soucieuse de détail précisera : puisque $I = m[AB]$, on d'une part l'égalité $AI = BI$, d'autre part l'appartenance $I \in [AB]$, d'où les égalités $BA \stackrel{I \in [AB]}{=} BI + IA \stackrel{AI=BI}{=} 2BI$.

³ pas analogue : véritablement *identique*

Voyons l'exemple de notre énoncé.

Dans ce dernier, nous avons six lettres A, B, C, I, J, K . Nous pouvons les *permuter/réarranger* de différentes manières, certaines prenant la place d'autres, certaines restant peut-être à leur place. Une permutation est simplement une application où chacune des lettres de départ apparaît une fois comme image. Par exemple, dans le dernier paragraphe de 1(a)i, nous avons utilisé la permutation qui⁴ échange I et J , ainsi que A et C , mais ne touche ni à B ni à K . On pourrait l'expliciter sous la forme d'un tableau

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline A & B & C & I & J & K \\ \hline C & B & A & J & I & K \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{où chaque case de la ligne du dessous contient} \\ \text{l'image de la lettre située juste au dessus.} \end{array}$$

On voit que les lettres de la 1re ligne sont "réarrangées" (= *permutées*) dans la 2e, chaque lettre apparaissant exactement une fois sur chaque ligne.

Quid de la préservation de la vérité des hypothèses ? Par commodité, notons avec des apostrophes les images par la permutation ci-dessus. L'hypothèse $I = m[AB]$ se réécrit alors après permutation $I' = m[A'B']$, çàd $J = m[CB]$, ce qui est vrai par hypothèse. De même, cette dernière hypothèse devient après permutation $J' = m[C'B']$, çàd $I = m[AB]$, à savoir la 1re hypothèse dont nous sommes partis. Enfin, l'hypothèse $K = m[AC]$ devient $K' = m[A'B']$, çàd $K = m[BA]$, ce qui ne change rien. *Total* : la vérité des hypothèses est bien préservée !

Lorsqu'une transformation préserve la vérité des hypothèses d'un problème, on dit qu'elle est une *symétrie* du problème. L'intérêt des symétries est de pouvoir réutiliser un raisonnement – en particulier ses conclusions ! – simplement en remplaçant les lettres par leurs symétriques. Un effort minimal pour une efficacité maximale : *what else ?*

- iii. (**retour au problème**) Nous pourrions établir les deux autres parallélismes demandés en recopiant mot pour mot les paragraphes de 1(a)i et en adaptant convenablement les lettres. Il y a toutefois plus élégant, un même schéma se dégageant de ces trois démonstrations. Pour le Brevet, il suffira amplement d'écrire : « *En raisonnant de façon analogue sur les deux sommets autres que B, on obtient les deux autres parallélismes demandés* ».

Toute la difficulté est cependant balayée sous le tapis de l'adjectif « *analogue* ». Nous allons nous y confronter *en explicitant la symétrie du problème* (au sens de la remarque 1(a)ii), symétrie qui explique et permet l'existence du « même schéma » ci-dessus.

Intuitivement, quand on fait "tourner" les six lettres autour du "centre" du triangle ABC , les milieux se propagent avec et nous obtiendrons une symétrie, qualifiée de *circulaire*⁵. Explicitement, regardons la permutation des six lettres A, B, C, I, J, K définie par le tableau

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline A & B & C & I & J & K \\ \hline B & C & A & J & K & I \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(pour rappel, le sens des flèches verticales} \\ \text{indique que chaque lettre de la 1re ligne a} \\ \text{pour image la lettre située juste en dessous)} \end{array}$$

Par commodité, notons avec des minuscules les images par cette permutation. Le triangle abc vérifie alors les mêmes hypothèses que celui ABC : les points i, j, k sont bien les milieux respectifs des segments $[ab]$, $[bc]$ et $[ca]$ (le vérifier en revenant aux majuscules). On peut donc lui appliquer le raisonnement 1(a)i en remplaçant partout majuscules par minuscules et affirmer encore sa conclusion (après remplacement), à savoir le parallélisme $(ij) \parallel (ac)$. Or ce dernier se traduit en $(JK) \parallel (BA)$, ce qui est le 2e parallélisme demandé.

En appliquant à nouveau la symétrie circulaire ci-dessus, le parallélisme ci-dessus devient le 3e cherché.

Élégant, non ? :)

- (b) (**translation & parallélogramme**) L'observation nous permet d'intuire que les quadrilatères suivants seront des parallélogrammes : $A I J K$, $B J K I$ et $C K I J$. Démontrons que c'est bien le cas pour le premier, la symétrie circulaire ci-dessus permettant de qualifier également les deux autres.

Montrer que $A I J K$ est un parallélogramme revient à établir les parallélismes $\left\{ \begin{array}{l} (AI) \parallel (KJ) \\ (AK) \parallel (IJ) \end{array} \right.$. Or, le milieu I étant aligné avec A et B , les droites (AI) et (AB) coïncident ; on a de même l'égalité $(AK) = (AC)$. Les parallélismes désirés se réécrivent donc $\left\{ \begin{array}{l} (AB) \parallel (KJ) \\ (AC) \parallel (IJ) \end{array} \right.$, ce qui a été établi (entre autres) à la question 1a.

⁴intuitivement et visuellement, cette permutation "correspond à" une réflexion d'axe (BK) mais un peu "tordue", au sens où le miroir ne réfléchit pas vraiment de façon orthogonale

⁵adjectif relatif à *cercle* et évoquant le *fait-tourner*

2. L'énoncé écrit « dans la translation [...] » mais il conviendrait d'écrire « PAR la translation ». On parle en effet d'« image *par* une application ». De même, au lieu de « amène » il serait plus correct de dire « ENVOIE », car une application *envoie* un objet sur son image.

Revenons au problème et appelons t la translation de l'énoncé. Pour justifier l'affirmation considérée, il suffit de montrer que les trois sommets du 1er triangle (çàd AIK) ont pour images respectives par t les trois sommets du 2e triangle (çàd IBJ), dans n'importe quel ordre. Un coup d'œil à la figure nous dit

$$\text{qu'il est raisonnable d'essayer l'ordre suivant et d'établir les trois égalités } \begin{cases} t(A) \stackrel{?}{=} I \\ t(I) \stackrel{?}{=} B \\ t(K) \stackrel{?}{=} J \end{cases} .$$

La 1re égalité découle de la définition de t , « qui amène A sur I ».

La 2e revient à (version "milieux") l'égalité des milieux $m[AB] = m[II]$, çàd à $m[AB] = I$, ce qui est la définition du point I .

La 3e enfin revient à (version "parallélogramme") ce que le quadrilatère $AIJK$ soit un parallélogramme, ce qui a été établi à la question 1b.

3. Utilisons notre symétrie circulaire de la question 1(a)iii. L'affirmation démontrée en ?? devient alors : « *par la translation qui envoie B sur J , l'image du triangle BJI est le triangle JCK* ». Le triangle BJI précédent et celui IBJ de la question étant les mêmes, nous avons répondu à la question.

4. Appliquons à nouveau notre symétrie circulaire sur la conclusion précédente. Nous pouvons alors affirmer : « *par la translation qui envoie C sur K , l'image du triangle CKJ est le triangle KAI* ». En réordonnant les lettres des deux triangles précédents, la réponse à la question apparaît toute seule.

Remarque : afin d'apprécier l'élégance de l'argument de la symétrie circulaire, essayez de rédiger les questions 3 et 4 "à la main" sans cet argument.

Exercice 22

1. Par définition de la translation considérée (version "milieux"), on a l'égalité $m[KL] = m[IJ]$. Or le segment $[IJ]$ est un diamètre de C' , donc son milieu est le centre du cercle C' , à savoir O . Il en résulte l'égalité $m[KL] = O$. En d'autres termes, le point L à construire est le symétrique de K par rapport à O .

Pour construire ce symétrique, on trace la demi-droite $[KO]$, on trace un cercle de centre O passant par K , cercle qui recoupe $[KO]$ en un point autre que K , 2e point d'intersection qui sera L . Or le cercle mentionné n'est autre que C' , puisque K lui appartient!

Le programme se simplifie donc en : *tracer la demi-droite épointée $]KO$ jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle C' – ce point de rencontre⁶ sera alors le point cherché.*

Le raisonnement précédent a établi que le point L est le point de C' diamétralement opposé à K , fait qui n'a pas le temps d'être une conjecture – puisqu'il vient d'être démontré.

2. Établi à la question 1.

Remarque : on attendait peut-être de la question 1 le programme suivant, qui découle de la définition (version "parallélismes") de la translation étudiée. Vu les parallélismes $\begin{cases} (KI) \parallel (LJ) \\ (IL) \parallel (JK) \end{cases}$, le point L est à l'intersection de la parallèle à (KI) passant par J (découle du parallélisme du haut) et de celle à (JK) passant par I (cf. parallélisme du bas). *Tracer ces deux droites – leur point de concours étant alors le point cherché* constitue donc un programme possible répondant à la question.

⁶avoir épointé la demi-droite permet de retirer sa "1re" intersection avec le cercle C' et ainsi d'éviter de parler de *deux* intersections