CORRIGÉ 1

Comprendre le corrigé

1 Décomposition en produit de facteurs premiers

- $69 = 3 \times 23$.

- $$\begin{array}{r|l} 1\,150 & 2 \\ 575 & 5 \\ 115 & 5 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$(1\,150 \div 2 = 575)$

$(575 \div 5 = 115)$

$(115 \div 5 = 23)$

$(23 \div 23 = 1)$

$1\,150 = 2 \times 5 \times 5 \times 23 = \mathbf{2 \times 5^2 \times 23}$.

Gagnez des points !

Un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 3. Ici pour 69 : $6 + 9 = 15$ est un multiple de 3. Donc 69 est divisible par 3.

4 140	2	$(4\,140 \div 2 = 2\,070)$
2 070	2	$(2\,070 \div 2 = 1\,035)$
1 035	3	$(1\,035 \div 3 = 345)$
345	3	$(345 \div 3 = 115)$
115	5	$(115 \div 5 = 23)$
23	23	$(23 \div 23 = 1)$
1		

Gagnez des points !

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

$4\,140 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 23 = \mathbf{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23}$.

Autre méthode

On décompose en produit de facteurs « évidents » dans un premier temps (même s'ils ne sont pas premiers, comme 9, 10...).

Dans un deuxième temps, on poursuit la décomposition jusqu'à n'avoir plus que des facteurs premiers.

Enfin, on ordonne (par facteurs croissants) le produit.

- $1\,150 = 10 \times 115$
  $= (2 \times 5) \times (5 \times 23)$
  $= 2 \times 5 \times 5 \times 23.$
- $4\,140 = 10 \times 414$
  $= 10 \times 9 \times 46$
  $= 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 23.$
  $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 23.$

2 Calcul du nombre de marins

- Le trésor composé de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or est partagé équitablement entre les marins : cela signifie que chaque marin a le même nombre de diamants, de perles et de pièces d'or.

Le nombre de marins est donc un diviseur commun à 69, 1 150 et 4 140.

L'astuce du prof

On cherche dans les trois décompositions le(s) facteur(s) commun(s).

- $69 = 3 \times 23$

$1\,150 = 2 \times 5^2 \times 23$

$4\,140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$

La décomposition faite en 1 permet d'établir que les seuls diviseurs communs à ces trois nombres sont 1 et 23.

Remarque

Chaque marin aura : $69 \div 23 = 3$ diamants ; $1\,150 \div 23 = 50$ perles ; $4\,140 \div 23 = 180$ pièces d'or.

Comme l'énoncé précise « entre les marins », on suppose qu'il y en a plus de 1.

- En conclusion, **le navire compte 23 marins.**

CORRIGÉ 10

Comprendre le corrigé

1 Résultat du programme A avec 4

- Le nombre choisi est 4.
- Soustraire 5 :
$4 - 5 = -1$.
- Multiplier le résultat par le nombre de départ : $4 \times (-1) = -4$.

Le résultat obtenu par Alice est bien **−4.**

2 Résultat du programme B avec −3

- Le nombre choisi est −3.
- Mettre ce nombre au carré :
$(-3)^2 = 9$.
- Soustraire 4 au résultat :
$9 - 4 = 5$.

Le résultat obtenu par Lucie est **5.**

Pensez-y !

Quand on élève au carré un nombre négatif, il ne faut pas oublier les parenthèses.

3 Résultat du programme A avec x

- Le nombre choisi est x.
- Soustraire 5 :
$x - 5$.
- Multiplier le résultat par le nombre de départ :
$x \times (x - 5) = x^2 - 5x$.

Le résultat obtenu avec x dans le programme A est bien $\mathbf{x^2 - 5x}$.

Remarque

On obtient $x^2 - 5x$ en développant $x \times (x - 5)$ en utilisant la distributivité :
$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$.

4 Résultat du programme B avec x

- Le nombre choisi est x.
- Mettre ce nombre au carré : x^2.
- Soustraire 4 au résultat :
$x^2 - 4$.

Le résultat obtenu avec x dans le programme B est $\mathbf{x^2 - 4}$.

5 Détermination du nombre cherché

Le nombre cherché par Tom est la solution de l'équation : $x^2 - 5x = x^2 - 4$.

$$x^2 - 5x - x^2 = x^2 - 4 - x^2$$

On soustrait x^2

$$-5x = -4$$

On divise par -5

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-4}{-5}$$

On simplifie l'écriture du résultat

$$x = \frac{4}{5}$$

Le nombre cherché par Tom est $\frac{4}{5}$ ou encore sous forme décimale 0,8.

Méthode

L'idée est de rassembler les « x » dans le membre de gauche et les « non x » dans le membre de droite.

Vérification

Vérifions si la valeur trouvée 0,8 convient :

- Pour $x = 0{,}8$: $x^2 - 5x = 0{,}8^2 - 5 \times 0{,}8 = -3{,}36$.
- Pour $x = 0{,}8$: $x^2 - 4 = 0{,}8^2 - 4 = -3{,}36$.

Les deux résultats sont égaux :
pour $x = 0{,}8$ on a donc $x^2 - 5x = x^2 - 4$.

Le nombre 0,8 est bien solution de l'équation $x^2 - 5x = x^2 - 4$.

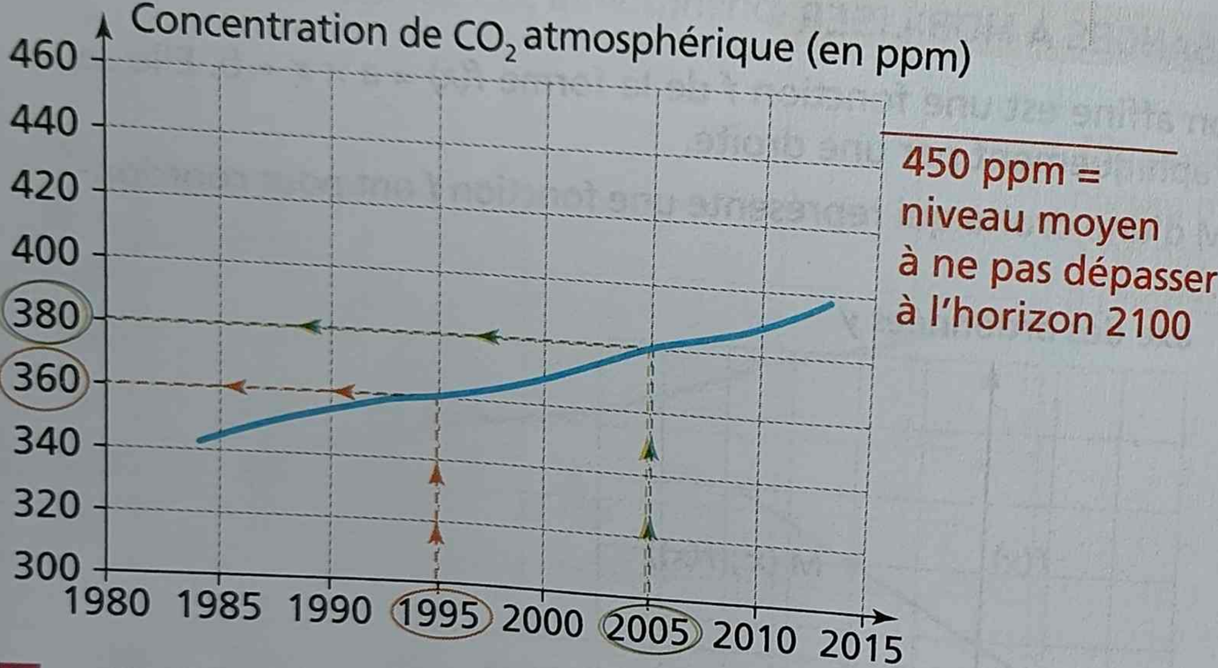
CORRIGÉ 15

Comprendre le corrigé

1 Lectures graphiques

La concentration de CO_2 en 1995 est **360 ppm** (traces graphiques oranges).

La concentration de CO_2 en 2005 est **380 ppm** (traces graphiques vertes).



2 a. Modélisation par une fonction affine

La courbe représentant la fonction est proche d'une droite, ce qui est caractéristique d'une fonction affine. Ainsi, **une fonction affine semble appropriée pour modéliser cette situation.**

Pensez-y !
Graphiquement, une fonction affine se représente par une droite.

b. Choix de l'expression

On utilise les deux expressions pour calculer les images de 1995 et 2005, et on compare avec les résultats obtenus graphiquement dans la première question.

- Pour 1995 :

Avec la proposition d'Arnold, on trouve :
$g(1\,995) = 2 \times 1\,995 - 3\,630 = 360.$
Avec la proposition de Billy, on trouve :
$g(1\,995) = 2 \times 1\,995 - 2\,000 = 1\,990.$

- Pour 2005 :

Avec la proposition d'Arnold, on trouve :
$g(2\,005) = 2 \times 2\,005 - 3\,630 = 380.$
Avec la proposition de Billy, on trouve :
$g(2\,005) = 2 \times 2\,005 - 2\,000 = 2\,010.$

Remarque
Il n'est pas utile d'utiliser l'autre valeur puisque pour celle-ci, seule la fonction proposée par Arnold est cohérente.

Pour les deux années testées, **c'est la fonction proposée par Arnold qui donne les meilleurs résultats** puisque les images de 1995 et 2005 sont respectivement 360 et 380 (valeurs lues sur le graphique dans la question **1**).

c. Détermination d'une année

Déterminer l'année pour laquelle la valeur 450 ppm est atteinte revient à chercher x tel que $g(x) = 450$.

$g(x) = 450$

$2x - 3\,630 = 450$

$2x - 3\,630 + 3\,630 = 450 + 3\,630$

$2x = 4\,080$

$\frac{2x}{2} = \frac{4\,080}{2}$

d'où $x = 2\,040$.

Méthode

Faites bien attention à ce que représentent x et $g(x)$.

Ici, on cherche une année, donc on cherche x. Cela revient à résoudre une équation.

C'est en 2040 que la valeur 450 ppm sera atteinte si l'évolution se poursuit de la même façon.

3 Recherche de la masse m du CO_2 émis en France en 2016

En 2016, 70 mégatonnes représentent 15 % des émissions de carbone.

Alors, en notant m la masse (en mégatonnes) de CO_2 produite en 2016, on obtient :

15 % de $m = 70$

soit $0{,}15 \times m = 70$.

D'où $m = \frac{70}{0{,}15} \approx 467$.

Pensez-y !

Quand vous cherchez une valeur, n'hésitez pas à la remplacer par une lettre pour modéliser la situation.

La masse de CO_2 émis en France en 2016 est d'environ 467 mégatonnes.

À L'EXAMEN

25 1° Le cylindre a pour rayon de base 0,9 m car $1{,}8 : 2 = 0{,}9$ et pour hauteur 3 m.
Volume du cylindre : $2{,}43\pi$ m^3 car $\pi \times 0{,}9^2 \times 3 = 2{,}43\pi$.
Les deux demi-sphères ont le même volume qu'une sphère de rayon 0,9 m.

Volume de la sphère : $0{,}972\pi$ m^3 car $\frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}9^3 = 0{,}972\pi$.

Volume de la citerne : $3{,}402\pi$ m^3, soit environ 10,688 m^3
car $2{,}43\pi + 0{,}972\pi = 3{,}402\pi$ et $3{,}402\pi \approx 10{,}688$.

2° Aire de la surface cylindrique : $5{,}4\pi$ m^2 car $2 \times \pi \times 0{,}9 \times 3 = 5{,}4\pi$.
Aire de la sphère : $3{,}24\pi$ m^2 car $4 \times \pi \times 0{,}9^2 = 3{,}24\pi$.
Aire de la citerne : $(5{,}4\pi + 3{,}24\pi)$ m$^2 = 8{,}64\pi$ m^2, soit environ 27,14 m^2.
Avec deux couches de peinture, la surface à peindre est environ 55 m^2 (arrondi à l'unité par excès) ; il faut 11 L de peinture car $55 : 5 = 11$.
Il faut acheter 4 seaux de 3 L peinture car $4 \times 3 = 12$ et $12 > 11$.
Soit une dépense totale de 240 € car $4 \times 60 = 240$.

29 **1°** Programme A : $5 \xmapsto{+10} 15 \xmapsto{\text{au carré}} \mathbf{225}$

Programme B : $5 \xmapsto{+20} 25 \xmapsto{\times 5} 125 \xmapsto{+100} \mathbf{225}$

2° Si on appelle a le nombre choisi au départ, le programme A donne $(a+10)^2$.
Pour obtenir 0, il faut avoir $(a+10)^2 = 0$; seul 0 a pour carré 0 ; il faut donc avoir $a + 10 = 0$ c'est-à-dire $\boldsymbol{a = -10}$.

Programme A : $-10 \xmapsto{+10} 0 \xmapsto{\text{au carré}} \mathbf{0}$

Programme B : $-10 \xmapsto{+20} 10 \xmapsto{\times(-10)} -100 \xmapsto{+100} \mathbf{0}$

3° Si on appelle a le nombre choisi au départ, le programme A donne $(a+10)^2$.
Le programme B donne $a(a+20)+100$ soit $a^2+20a+100$ soit encore $(a+10)^2$.
Les deux programmes donnent toujours le même résultat.

CORRIGÉ 36

Comprendre le corrigé

1 Étude du modèle 1

L'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle BLE rectangle en E est :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{\text{EL} \times \text{BE}}{2} = \frac{4 \times 3{,}5}{2} = 7\ \text{m}^2 < 8\ \text{m}^2.$$

Lisa souhaite une voile de $8\ \text{m}^2$ au minimum, donc **le modèle 1 ne convient pas.**

2 Étude du modèle 2

- L'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle POT rectangle en P est : $\mathcal{A}_2 = \dfrac{\text{PT} \times \text{OP}}{2}$.
- Il s'agit ici de déterminer la longueur PT manquante.

Dans le triangle POT rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore :

$\text{OT}^2 = \text{OP}^2 + \text{PT}^2$.

$5^2 = 3^2 + \text{PT}^2$

$\text{PT}^2 = 25 - 9 = 16$ d'où $\text{PT} = \sqrt{16}$ (car $\text{PT} > 0$) $= 4$ m.

Méthode

Connaissant deux longueurs sur trois dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur manquante.

- $\mathcal{A}_2 = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6\ \text{m}^2 < 8\ \text{m}^2$.

Le modèle 2 ne convient pas à Lisa, car l'aire de la voile d'ombrage est inférieure à $8\ \text{m}^2$.

3 Étude du modèle 3

- L'aire $\mathcal{A}_3$ du triangle MUR rectangle en U est : $\mathcal{A}_3 = \dfrac{\text{UR} \times \text{MU}}{2}$.
- Il s'agit de déterminer les longueurs UR et MU.

Dans le triangle MUR rectangle en U :

$$\cos \hat{R} = \frac{\text{Côté adjacent à } \hat{R}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{UR}}{\text{MR}}$$

Méthode

Dans un triangle rectangle, connaissant un angle aigu et une longueur, la trigonométrie permet de calculer les deux autres longueurs.

$\cos 45° = \dfrac{\text{UR}}{6}$ d'où $\text{UR} = 6 \times \cos 45°$, soit $\text{UR} \simeq 4{,}24$ m.

Le triangle MUR étant (d'après les codages) isocèle en U, on en déduit $\text{MU} = \text{UR}$, soit $\text{MU} \simeq 4{,}24$ m.

Remarque

La calculatrice donne la valeur exacte de MU : $\text{MU} = 3\sqrt{2}$ m.

- On obtient alors :

$\mathcal{A}_3 = \dfrac{4{,}24 \times 4{,}24}{2}$ soit $\mathcal{A}_3 \simeq 9\ \text{m}^2 > 8\ \text{m}^2$.

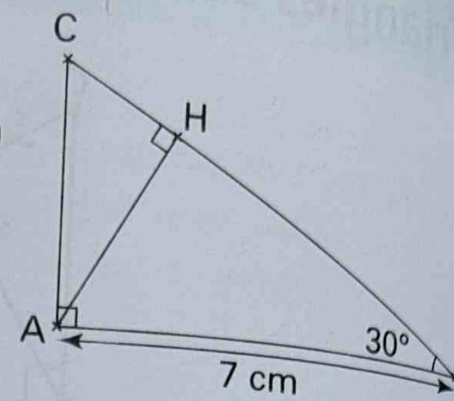
L'aire de cette voile dépassant $8\ \text{m}^2$, **le modèle 3 convient à Lisa.**

CORRIGÉ 37

Comprendre le corrigé

1 Programme de construction de la figure

- Tracer un segment [AB] de 7 cm.
- À l'aide du rapporteur, tracer l'angle de 30°.
- En utilisant l'équerre, tracer la perpendiculaire à (AB) passant par A.
- Placer le point C puis toujours avec l'équerre, tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A.
- Placer le point H.



2 Calcul de la longueur AH

Dans le triangle ABH rectangle en H :

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{Côté opposé à } \hat{B}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin 30° = \frac{AH}{7}$$

produit en croix

$$AH = 7 \times \sin 30°$$

$$AH = 3{,}5$$

On trouve bien le résultat annoncé : AH = 3,5 cm.

Remarque

Dans ce triangle, on connaît l'angle et l'hypoténuse, et on cherche le côté opposé. C'est donc le sinus qu'il faut choisir.

3 Triangles semblables

ABC et HAC ont l'angle $\hat{C}$ en commun.

De plus, ces deux triangles sont rectangles. Ainsi, deux angles du triangle ABC sont égaux à deux angles du triangle HAC.

On en déduit que **les triangles ABC et HAC sont semblables.**

Pensez-y !

Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors les troisièmes angles des deux triangles sont forcément égaux.

Remarque

Dans ABC, $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 30°$ et $\widehat{C} = 60°$.

Dans AHC, $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{H} = 90°$ et $\widehat{C} = 60°$.

Les triangles ABC et AHC ont leurs angles deux à deux égaux.

4 Coefficient de réduction

Le côté [AH] dans le triangle HAC et le côté [AB] dans le triangle ABC sont tous les deux les côtés adjacents de l'angle de 30°. Ils sont donc correspondants.

Le coefficient de réduction pour passer du triangle ABC au triangle HAC est donné par le quotient $\frac{AH}{AB} = \frac{3,5}{7} = 0,5$. **Le coefficient de réduction est donc 0,5.**

Rappel

Si deux triangles sont semblables, alors l'un est une réduction de l'autre.

Remarque

Cela signifie que les longueurs du triangle HAC sont deux fois plus petites que celles du triangle ABC.

CORRIGÉ 52

1 Étude de la faisabilité du projet

Il s'agit de déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABP}$.

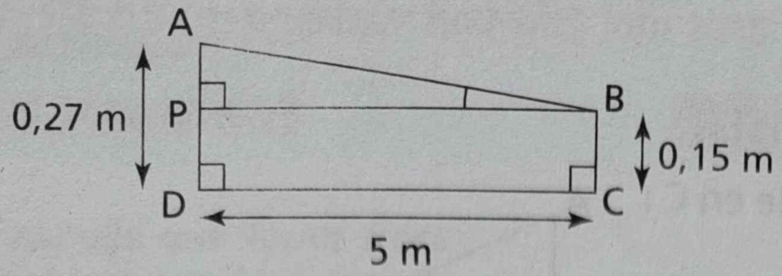
- **Justification d'égalité de longueurs**

Le quadrilatère BCDP étant un rectangle, on a :

$FG = BC = PD = 0,15$ m

$BP = CD = 5$ m

Vue de face



- **Calcul de la longueur AP**

Le point P est situé sur le segment [AD], donc :

$AP = AD - PD = 0{,}27 - 0{,}15$

$AP = 0{,}12$ m

- **Calcul de la mesure de $\widehat{ABP}$**

Dans le triangle APB rectangle en P,

$$\tan \widehat{ABP} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{ABP}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{ABP}} = \frac{AP}{PB}$$

$$\tan \widehat{ABP} = \frac{0{,}12}{5} = 0{,}024$$

À la calculatrice, on déduit :

$\widehat{ABP} = \tan^{-1}(0{,}024)$

$\widehat{ABP} \simeq 1{,}37°$

- En conclusion, l'angle $\widehat{ABP}$ est compris entre 1° et 1,5° : **le projet de Madame Martin vérifie la condition de bon écoulement des eaux de pluie.**

L'astuce du prof
Faites un croquis et reportez dessus les longueurs connues.

Gagnez des points !
Assurez-vous d'être dans un triangle rectangle pour utiliser la trigonométrie.

Pensez-y !
Vérifiez que votre calculatrice est bien en mode degrés.

2 Calcul du montant de la facture

- **Volume *V* de béton nécessaire**

La quantité de béton nécessaire à la réalisation de la terrasse correspond au volume *V* d'un prisme droit de base ABCD et de hauteur CG.

V = Aire de la base du prisme × Hauteur du prisme (information 2)

$V = \mathcal{A}_{ABCD} \times CG$

On décompose le quadrilatère ABCD en un rectangle PBCD et un triangle APB :

$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{PBCD} + \mathcal{A}_{APB}$

$\mathcal{A}_{PBCD} = \text{Longueur} \times \text{Largeur} = DC \times BC = 5 \times 0{,}15 = 0{,}75$

$$\mathcal{A}_{APB} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{PB \times AP}{2} = \frac{5 \times 0{,}12}{2} = 0{,}3$$

$\mathcal{A}_{ABCD} = 0{,}75 + 0{,}3 = 1{,}05 \text{ m}^2$

Autre méthode

Le quadrilatère ABCD est un trapèze d'aire :

$$\frac{(\text{Petite base} + \text{Grande base}) \times \text{Hauteur}}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(BC + AD) \times DC}{2} = \frac{(0{,}15 + 0{,}27) \times 5}{2} = 1{,}05 \text{ m}^2$$

On en déduit : $V = 1{,}05 \times 8 = 8{,}4 \text{ m}^3$.

8,4 m^3 de béton sont nécessaires pour la construction de la terrasse.

- **Prix du béton**

1 m^3 de béton coûte 95 € (information 3).

$8{,}4 \times 95 = 798$.

Le béton est facturé 798 €.

Remarque

Le prix du béton est proportionnel à son volume.

- **Nombre de toupies de béton nécessaires**

La capacité maximale du camion-toupie est 6 m^3 (information 3).

Ayant besoin de 8,4 m^3 de béton, 2 toupies de béton seront nécessaires.

- **Distance parcourue par le camion-toupie**

L'entreprise facture les distances aller et retour parcourues par le camion-toupie (information 3).

Méthode

Lisez attentivement l'énoncé, car il contient de nombreuses informations.

L'entreprise se situe à 23 km du domicile de Madame Martin (information 1).

Sachant que le camion-toupie devra effectuer deux trajets, il parcourra :

$$(\underbrace{23 \times 2}_{\text{trajet aller-retour}}) \times \underbrace{2}_{\text{2 trajets}} = 92 \text{ km}$$

- **Frais de livraison**

1 km parcouru est facturé 5 € (information 3).

$92 \times 5 = 460$.

Les frais de livraison s'élèvent à 460 €.

- En conclusion, la facture de Madame Martin s'élève à :

Prix du béton + Frais de livraison

$= 798 + 460 = $ **1 258 €**

Gagnez des points !

N'oubliez pas la conclusion.