Thalès de Milet

lundi 22 avril 2024
cahier d'exercices p. 47

Correction proposée

1. **La croix de bûcheron.**

Lors de l'agrandissement d'un triangle, chaque hauteur voit sa longueur multipliée par *le même coefficient* d'agrandissement[1]. En particulier, considérant les hauteurs issues de O (à savoir $[OF]$ et $[OH]$) et les côtés associés (à savoir $[DE]$ et $[AB]$), le coefficient d'agrandissement vaut $\frac{OH}{OF} = \frac{AB}{DE}$.

(a) Le premier quotient va suffire pour répondre à la question. D'une part, on nous donne $OF = 35\,\mathrm{cm}$, d'autre part, *en admettant que le quadrilatère $OCBH$ est rectangle*[2], la longueur OH vaut celle $BC = 7,7\,\mathrm{m}$ du côté opposé, d'où le coefficient cherché

$$\frac{OH}{OF} = \frac{BC}{OF} = \frac{7,7 \cdot 100\,\mathrm{cm}}{35\,\mathrm{cm}} = \frac{(\cancel{7} \cdot 1,1)\,(\cancel{5} \cdot 20)\,\cancel{\mathrm{cm}}}{\cancel{7} \cdot \cancel{5}\,\cancel{\mathrm{cm}}} = 22.$$

(b) L'égalité des rapports établie ci-dessus nous livre la hauteur cherchée :

$$AB = \frac{OH}{OF} DE = 22 \cdot 20\,\mathrm{cm} = 4,4\,\mathrm{m}\,.$$

(*Sanity check* : c'est raisonnable pour une hauteur d'arbre jeune.)

(c) Quand $DE = OF$, l'égalité ci-dessus devient

$$AB = OH\frac{DE}{OF} = OH = BC.$$

La hauteur cherchée vaut alors directement la mesure au sol BC : aucun calcul nécessaire !

2. **Le cocotier.**

Introduisons quelques notations :
B le point à la **b**ase du cocotier (que l'on supposera coïncider – comme suggéré sur le dessin – avec le centre de la toute première noix de coco placée par Moana),
S le **s**ommet du cocotier,
C le **c**entre de la noix de **c**oco où Moana s'est pla**c**é.e,
M le sommet de **M**oana,
I le point à l'**i**ntersection des droites (BC) et (MS) et, enfin,
d la **d**istance entre **d**eux noix de coco successives (laquelle fait sens car les noix de coco sont « régulièrement espacées »).

En supposant que le cocotier et Moana se dressent tous les deux bien à la verticale, on peut affirmer d'une part le parallélisme $(BS) \parallel (CM)$, d'autre part l'identité de la longueur CM avec la taille de Moana (*idem* entre BS et la hauteur du cocotier). Le parallélisme nous livre grâce au théorème de Thalès l'égalité $\frac{IC}{IB} = \frac{CM}{BS}$, d'où la hauteur cherchée $BS = \frac{IB}{IC} CM$.

Or le tableau nous fournit[3] $CM = 1,80\,\mathrm{m}$ et compter soigneusement sur le dessin les noix de coco nous donne[4] $\begin{cases} IB = 10d \\ IC = 3d \end{cases}$. La hauteur cherchée vaut donc

$$BS = \frac{IB}{IC} CM = \frac{10\cancel{d}}{\cancel{3}\cancel{d}}\,(\cancel{3} \cdot 0,6\,\mathrm{m}) = 6\,\mathrm{m}$$ (ce qui n'est pas délirant pour une hauteur de cocotier).

[1] Une manière de voir cela est d'utiliser l'égalité de l'aire avec la moitié du produit de la longueur de n'importe quelle hauteur par celle du côté correspondant : quand on agrandit (appelons alors λ le coefficient d'agrandissement), l'aire est multipliée par λ^2, la longueur du côté par λ, donc celle de la hauteur par $\frac{\lambda^2}{\lambda} = \lambda$.

[2] Le quadrilatère $OCBH$ ayant deux angles droits (en C et B), c'est un trapèze rectangle : ce sera même *un rectangle* si l'on montre le parallélisme des deux autres côtés (BC) et (OH). Or : d'une part, vu l'alignement des points O, F et H, on a le parallélisme $(OH) \parallel (OF)$; d'autre part, vu que les points B et C sont au sol et Julien « place [...] $[OF]$ horizontalement », *et à supposer le sol plat & horizontal et plat* (hypothèse loin d'être toujours vérifiée !), on a le parallélisme $(BC) \parallel (OF)$, ce qui permet de conclure.

[3] c'est *l'unique* information que l'on en utilisera

[4] *sanity check* : l'énoncé nous dit que Moana s'est placée au niveau de la 7e noix de coco, ce qui se traduit par l'égalité $BC = 7d$, distance à comparer avec $IB - IC = 10d - 3d$

3. **Phares à régler.**

Le quadrilatère $ACQP$ possède deux angles droits consécutifs (C et Q, donnés sur la figure), donc est un trapèze rectangle. Vu par ailleurs l'égalité de ses deux bases $AC = PQ$, il s'agit d'*un rectangle*, d'où l'égalité $AP = CQ$ (devinable sur la figure, mais c'est toujours mieux de la *prouver* !).

(a) Il s'agit d'encadrer le rapport $\frac{KQ}{PQ}$ par $1,5\%$ et 2%. L'énoncé nous donnant le dénominateur PQ, il nous reste à calculer le numérateur KQ. *En supposant que le point K soit entre C et Q* (comme suggéré par le dessin), on peut affirmer les égalités

$$KQ = CQ - CK = AP - CK = 0,70\,\mathrm{m} - 0,61\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{cm}\,.$$

Le rapport à encadrer vaut donc $\frac{9\,\mathrm{cm}}{5\,\mathrm{m}} = \boxed{1,8\%}$, ce qui conclut vu l'encadrement $1,5 < \boxed{1,8} < 2$.

(b) La question est TRÈS MAL POSÉE : on demande la distance maximale d'un obstacle DE FAIT éclairé (en partie au moins) par les feux de croisement[5]. Et, tant qu'on est à deviner l'esprit de la question, que dire d'un obstacle *qui ne serait pas à même la route* – une barrière, une branche ? Leur partie inférieure serait détectable plus tard que ne le serait un obstacle ayant contact avec la route... *Nous exclurons ces obstacles "suspendus"*. Supposons enfin la route *plate et rectiligne* – sans quoi bien des choses affirmées ici perdraient leur substance.

En l'absence de mur, un objet reposant sur la route (AS) en un point *à droite de S* tombera *hors* du faiseau lumineux et ne sera donc pas éclairé : la distance maximale cherchée est par conséquent *inférieure à AS*. Or, chaque obstacle situé *juste à gauche de S* sera, lui (grâce à l'hypothèse de non-suspension), éclairé (peut-être pas complètement) : la distance maximale cherchée vaut donc *au moins* chaque longueur strictement plus petite que AS, çàd vaut au moins[6] la longueur AS.

Finalement, la longueur maximale cherchée vaut *exactement* AS, que l'on va déterminer par la trigonométrie[7].

Notons $s := \widehat{ASP}$. On a alors, dans le triangle rectangle APS, l'égalité $AS = \frac{AP}{\tan s}$. Or les parallélismes $(AS) \parallel (PQ)$ livrent l'égalité $\widehat{ASP} = \widehat{SPQ}$, d'où celles

$$\tan s = \tan \widehat{SPQ} \overset{K\in[SP]}{=} \tan \widehat{KPQ} = \frac{KQ}{PQ} \underset{\text{calculé}}{\overset{\text{déjà}}{=}} 1,8\%$$

$$\text{et la conclusion } AS = \frac{AP}{\tan s} = \frac{0,7\,\mathrm{m}}{1,8\%} \simeq 38,9\,\mathrm{m}\,.$$

Remarque : si l'on souhaite exprimer AS uniquement à l'aide des mesures données, on préférera un calcul littéral

$$AS = \frac{AP}{\frac{KQ}{PQ}} = \frac{PQ}{\frac{KQ}{AP}} = \frac{PQ}{\frac{AP-CK}{AP}} = \frac{PQ}{1 - \frac{CK}{AP}}.$$

L'application numérique fournirait alors

$$\frac{AS}{\mathrm{m}} = \frac{5}{1 - \frac{61\,\mathrm{cm}}{70\,\mathrm{cm}}} = \frac{5 \cdot 70}{70 - 61} = \frac{360 - 9 - 1}{9} = 40 - 1 - \frac{1}{9} = 39 - \frac{1}{9} \simeq 38,9.$$

[5] comparer notre formulation avec celle de l'énoncé

[6] Pour s'en convaincre, esssayer en remplaçant AS par 0 : que dire en effet du signe d'un nombre valant au moins chaque nombre strictement négatif ?

[7] Rappelons que les "définitions" des trois lignes trigonométriques font implicitement appel au théorème de Thalès.