Calcul littéral

vendredi 22 mars 2024

adapté de *Annales abc* p. 58 & 64

Correction proposée

Sujet 11.

1. Appliquons le programme 1 sur le nombre 5 : le tripler donne $3 \cdot 5 = 15$, ajouter 1 donne $15 + 1 = 16$.

   Appliquons le programme 2 sur le nombre 5 : lui soustraire 1 (resp. lui ajouter 2) donne $5 - 1 = 4$ (resp. $5 + 2 = 7$), multipler les différence et somme obtenies donne $4 \cdot 7 = 28$.

2.

   (a) L'image $A(r)$ est le résultat du programme 1 appliqué sur le nombre r. Appliquons donc ce programme sur ce nombre : tripler r donne $3r$, ajouter 1 donne $3r + 1$. Il en résulte l'égalité

   $$A(r) = 3r + 1.$$

   Cette égalité tenant pour *chaque* nombre r, l'application A est bien affine, de pente 3 et ordonnée à l'origine 1.

   (b) *Analyse.* Soit d un tel nombre. On a alors l'égalité $A(d) = 0$, çàd $3d + 1 = 0$. Soustraire 1 donne $3d = -1$, puis diviser par 3 donne $d = -\frac{1}{3}$. Le seul candidat possible est donc $-\frac{1}{3}$.

   Synthèse. Vérifions si ce dernier convient : on a les égalités

   $$A\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

   Conclusion : le nombre $-\frac{1}{3}$, et seulement lui, répond aux conditions imposées.

3. Il est usuel de sous-entendre que x est un nombre *quelconque*, çàd sur lequel tout ce que qu'on dira ensuite pourra s'appliquer *quelle que soit sa valeur numérique.* Le moyen – déjà utilisé plus haut – pour EXPLICITER cela est l'évocation[1]

   « Soit x un nombre ».

   Appliquons alors ("alors" = "suite à l'évocation précédente"), afin d'obtenir l'image $B(x)$, le programme 2 sur le nombre x évoqué : lui soustraire 1 (resp. lui ajouter 2) donne $x-1$ (resp. $x+2$), multipler les différence et somme obtenues donne $(x-1)(x+2)$. On en déduit les égalités

   $$B(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2.$$

4.

   (a) On a d'une part les égalités

   $$\begin{aligned} B(s) - A(s) &= s^2 + s - 2 - (3s + 1) \\ &= s^2 + s - 2 - 3s - 1 \\ &= s^2 - 2s - 3, \end{aligned}$$

   d'autre part celles

   $$\begin{aligned} (s+1)(s-3) &= s^2 - 3s + s - 3 \\ &= s^2 - 2s - 3. \end{aligned}$$

   Comme on obtient la même chose, les deux nombres de départ sont égaux, CQFD.

[1] *évoquer* au sens de *créer par la magie* (pas au sens de *mentionner*), comme si on "ordonnait" à un nombre d'être (le vebre "soit" est un impératif !)

(b) *Analyse.* Soit un tel m : les images $A(m)$ et $B(m)$ sont alors égales, donc leur différence est nulle. Or cette différence vaut $(m+1)(m-3)$: l'un des facteurs de ce produit nul est par conséquent nul, ce qui s'écrit $\left\{\begin{array}{l} m+1=0 \\ \text{ou} \\ m-3=0 \end{array}\right.$, çàd $\left\{\begin{array}{l} m=-1 \\ \text{ou} \\ m=3 \end{array}\right.$. Les seuls candidats éventuels sont donc -1 et 3.

Synthèse. Montrons que ces deux nombres conviennent. D'une part les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} A(-1)=3(-1)+1=-3+1=-2 \\ B(-1)=(-1-1)(-1+2)=-2\cdot 1 \end{array}\right. \quad \text{montrent que } -1 \text{ convient,}$$

d'autre part les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} A(3)=3\cdot 3+1=9+1=10 \\ B(3)=(3-1)(3+2)=2\cdot 5 \end{array}\right. \quad \text{montrent que 3 convient.}$$

Conclusion : les programmes rendent le même résultat quand on choisit au départ le nombre -1 ou le nombre 3, et seulement ces deux nombres.

Sujet 13.

1. On a les égalités

$$\begin{aligned} E &= (\square-2)(2\square+3)-3(\square-2) \\ &= \begin{array}{c} 2\square^2+3\square-4\square-6 \\ -3\square+6 \end{array} \\ &= 2\square^2-4\square. \end{aligned}$$

2. On a les égalités

$$\begin{aligned} E &= 2\square^2-4\square \\ &= 2\square(\square-2) \\ &= n\square(\square-2) \text{ où l'on a défini } n:=2. \end{aligned}$$

Autre solution : partir directement de l'expression de départ non développée et y voir $\square-2$ comme facteur commun :

$$\begin{aligned} E &= \underline{(\square-2)}(2\square+3)-3\underline{(\square-2)} \\ &= \underline{(\square-2)}(2\square+3\quad-3) \\ &= (\square-2)(2\square) \\ &= 2\square(\square-2). \end{aligned}$$

3. L'hypothèse signifie la nullité du produit $2\square(\square-2)$, çàd de sa moitié $\square(\square-2)$: l'un au moins des facteurs est par conséquent nul, ce qui s'écrit $\left\{\begin{array}{l} \square=0 \\ \text{ou} \\ \square-2=0 \end{array}\right.$, çàd $\square=0$ ou $\square=2$.

4. La condition sur les nombres a cherchés se traduit (soustraire le membre de droite) par la nullité de l'expression E où l'on a remplacé chaque symbole $\square$ par a, çàd par la nullité du produit $a(a-2)$, çàd (nous venons de le dire plus haut) par l'appartenance $a\in\{0,2\}$. Les nombres cherchés sont donc 0 et 2.

   Remarque : au lieu de raisonner (comme on l'avait plus haut) par *analyse-synthèse*, on a raisonné ici directement par *équivalences* (cachées dans les "çàd").