Trigonométrie

pour jeudi 14 mars 2024

cahier d'exercices p. 75 (exos 1, 3 & 4)

Proposition de correction

Exercice 1. Notons respectivement

1. t la $\underline{\underline{\textbf{t}}}$aille d'Averell ;
2. d la $\underline{\underline{\textbf{d}}}$istance du pistolet à Averell ;
3. h la $\underline{\underline{\textbf{h}}}$auteur du pistolet par rapport au sol ;
4. B (comme "$\underline{\underline{\textbf{b}}}$as" ou "$\underline{\underline{\textbf{b}}}$otte") le point où Averell touche le sol.

Dans le triangle ACP rectangle en A, la tangente de l'angle $\widehat{APC}$ cherché vaut $\frac{AC}{AP}$, d'où $\widehat{APC} = \arctan \frac{AC}{AP}$. *En admettant momentanément que*[1] le numérateur AC vaut la différence $t - h$, on peut conclure :

$$\begin{aligned}\widehat{APC} &= \arctan \frac{t-h}{d} \\ &\underset{\text{numérique}}{\overset{\text{application}}{=}} \arctan \frac{2,13\,\text{m} - 1\,\text{m}}{6\,\text{m}} = \arctan \frac{1,13}{6} \overset{\text{calculette}}{\simeq} 10,66^\circ \\ &\simeq 11^\circ \text{ (arrondi au degré près).}\end{aligned}$$

Montrons à présent l'égalité admise, çàd $AC \overset{?}{=} BC - PS$ ou encore $PS + AC \overset{?}{=} BC$. Il suffit pour cela d'établir les égalités $PS \overset{?}{=} BA$ et $BA + AC \overset{?}{=} BC$.

Pour la 1re, il suffit de prouver la rectangularité du quadrilatère $ABSP$: les côtés opposés $[PS]$ et $[AB]$ auront alors même longueur. Or l'énoncé nous dit d'une part que « [l]e triangle PAC est rectangle en A », d'où l'orthogonalité $(PA) \perp (AC)$, d'autre part que « les deux cow-boys se tiennent perpendiculairement au sol », d'où d'une part le parallélisme $(AC) = (AB)$ (Averell se tient "droit"), d'autre part les orthogonalités $(AB) \perp (BS) \perp (SP)$. Le quadrilatère $ABSP$ a par conséquent trois angles droits (en A, B et S), il est donc rectangle comme annoncé.

La 2e égalité ($BA + AC \overset{?}{=} BC$) équivaut à l'appartenance $A \overset{?}{\in} [BC]$. Or les points P, A et C sont du même côté de la droite (BS) (le pistolet et Averell sont hors sol), donc les points A et C sont du même côté de B sur la demi-droite $[BA) = [BC)$. L'appartenance voulue revient par conséquent à la comparaison $BA \overset{?}{<} BC$, çàd $h \overset{?}{<} t$, çàd $1\,\text{m} \overset{?}{<} 2,13\,\text{m}$, ce qu'on a bien.

Exercice 4. L'énoncé ne précise aucune unité pour les longueurs, ce qui est *mal* : une longueur ne peut être un nombre tout nu sans dimension ! Nous noterons $\heartsuit := \frac{1}{10}MC$ l'unité de longueur.

Vu que les segments « $[CH]$ et $[HM]$ sont perpendiculaires à $[HA]$ », les triangles AEM et AHC sont rectangles resp. en E et M. On en déduit d'une part l'égalité

$$\begin{aligned} HC &= AC \sin \widehat{CAH}, \qquad \text{d'autre part les égalités} \\ EM &= EA \tan \widehat{EAM} = (15\heartsuit) \tan 30^\circ = 15 \frac{\sqrt{3}}{3} \heartsuit = \underline{\underline{\underline{5\sqrt{3}\heartsuit}}}. \end{aligned}$$

Or « les points H, E et A sont alignés » (c'est une hypothèse) *et dans cet ordre* (non donné mais admis vu la figure), tout comme les points C, M et A (même raisonnement), d'où, d'une part, les égalités $\left\{ \begin{array}{c} AM + MC = AC \\ AE + EH = AH \end{array} \right.$ et, d'autre part, l'égalité $\widehat{CAH} = \widehat{MAE}$. On peut ainsi simplifier la 2e longueur demandée :

$$HC = (AM + MC) \sin \widehat{MAE} = (16\heartsuit + 10\heartsuit) \sin 30^\circ = 26\heartsuit \frac{1}{2} = \underline{\underline{\underline{13\heartsuit}}}.$$

[1] l'égalité admise peut être affirmée au Brevet sans risque de représailles ; il est néanmoins nécessaire de se rendre compte de ce qu'elle nécessiterait de justification

Enfin, la longueur AE est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté AM, donc[2] vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}AM$, et l'on obtient de même $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$, d'où

$$HE = AH - AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AC - \frac{\sqrt{3}}{2}AM = \frac{\sqrt{3}}{2}(AC - AM) = \frac{\sqrt{3}}{2}CM = \frac{\sqrt{3}}{2}10\heartsuit = \underline{\underline{5\sqrt{3}\heartsuit}} (= EM).$$

Conclusion : prenant comme unité de mesure le dixième de la longueur MC où passera la cheminée, le côté "plus haut" de la cheminée en mesurera 13, et le "toît" de la cheminée en mesurera $5\sqrt{3} \simeq 8,66$, tout comme son côté "moins haut".

Exercice 2. *[N'était pas à faire.]*

Exercice 3. D'après l'énoncé, la pente d'une route n'est autre que la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'horizontale.

La 1re se lit directement sur le panneau : 24%.

La 3e vaut $\tan 12,4^\circ \overset{\text{calculette}}{\simeq} 0,21986 \simeq 22,0\%$ (arrondi au pour-mille) : pas besoin ici de calculer des longueurs vu qu'on nous donne directement l'angle $12,4^\circ$ avec l'horizontale.

Pour la 2e, on peut récupérer ou bien la longueur manquante par Pythagore (puis calculer la tangente comme rapport de longueurs) ou bien l'angle avec l'horizontale grâce à son sinus (puis en évaluer directement la tangente). Présentons ces deux voies, suivie d'une troisième qui les englobe toutes deux – et d'une quatrième pour l'élégance.

Quelques notations. Notons d, h, r et α resp. les **d**énivelé (= déplacement vertical, ici 280 m), longueur cherchée (= déplacement **h**orizontal), longueur de **r**oute (ici 1,5 km) et **a**ngle avec l'horizontale (dont la tangente vaut la pente cherchée). Ainsi les longueurs d, h et r sont-elles resp. les côté opposé, côté adjacent et hypoténuse relatifs à l'angle α.

1. *Méthode sinus.* L'angle α a pour sinus $\frac{d}{r} = \frac{280\,\text{m}}{1500\,\text{m}} = \frac{14\cdot\cancel{20}}{75\cdot\cancel{20}} = \frac{14}{75}$, donc vaut $\arcsin\frac{14}{75} \overset{\text{calculette}}{\simeq} 10,75^\circ$, donc a pour tangente[3] environ $\tan 10,75^\circ \overset{\text{calculette}}{\simeq} 0,19001 \simeq 19,0\%$ (arrondi au pour-mille).
2. *Méthode Pythagore.* Le théorème de Pythagore nous livre l'égalité $d^2 + h^2 = r^2$, d'où celles[4]

$$\begin{aligned} h^2 &= r^2 - d^2 = (1,5\,\text{km})^2 - (0,28\,\text{km})^2 = \left(1,5^2 - 0,28^2\right)\text{km}^2 \\ &= (2,2500 - 0,0784)\,\text{km}^2 = 2,1716\ \text{km}^2. \end{aligned}$$

On en déduit[5]

$$h = \sqrt{2,1716\ \text{km}^2} = \sqrt{2,1716}\,\text{km} \overset{\text{calculette}}{\simeq} 1,4736\,\text{km},$$

d'où la pente cherchée

$$\tan\alpha = \frac{d}{h} \simeq \frac{0,28\,\text{km}}{1,4736\,\text{km}} \overset{\text{calculette}}{\simeq} 0,19001 \text{ (on trouve la même valeur approchée).}$$

Le problème commun à ces deux méthodes est l'utilisation successive de valeurs approchées : *comment s'assurer de la précision du résultat final si chaque calcule déforme davantage la précédente approximation ?* Voici en effet comment varie la pente cherchée avec de moindres approximations de h :

$h \simeq$	1,4736 km	1,474 km	1,48 km	1,5 km
$\tan\alpha \simeq$	0,19001	0,18996	0,18919	0,18667
pente au millième près	19,0%	19,0%	18,9%	18,7%

[2] Celle qui voudra utiliser le cosinus de 30° retrouvera les mêmes égalités.

[3] Pour comparer avec les 1re et 3e pentes, çàd 24% (valeur supposée exacte) et $\simeq 22,0\%$ (que nous avons calculée), il s'agit de garder une précision du même ordre, nous avons choisi *un chiffre après la virgule du pourcentage*, çàd une précision au pour-mille.

[4] entraînement au calcul mental :

$$\begin{aligned} 15^2 &= (3\cdot5)^2 = 3^2 5^2 = 9\cdot25 = (10-1)\,25 = 250 - 25 = \underline{\underline{225}} \quad \text{et} \\ 28^2 &= (2\cdot14)^2 = 2^2 14^2 = 4\cdot(15-1)^2 = 4\left(15^2 - 2\cdot15 + 1^2\right) = 4\,(225 - 30 + 1) = 900 - 120 + 4 = \underline{\underline{784}} \end{aligned}$$

[5] *rappel* : une longueur étant toujours *positive*, la solution opposée $h = -\sqrt{\cdots}$ est à proscrire

Le résultat varie bien de quelques pour-milles, et cette variation pourrait nous échapper... Une manière de pallier[6] ce problème est mener tous les calculs *littéralement* et, *à la fin seulement*, de remplacer les lettres par leur valeurs numériques correspondantes. C'est la...

3. *... méthode littérale (ou formelle)*. Comme ci-dessus, le théorème de Pythagore nous livre l'égalité $h = \sqrt{r^2 - d^2}$, d'où la pente cherchée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{h} &\overset{d\geq 0}{=} \frac{\sqrt{d^2}}{\sqrt{r^2-d^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{r^2-d^2}} \underset{\text{sous la racine}}{\overset{\text{diviser par } d^2}{=}} \sqrt{\frac{1}{\frac{r^2}{d^2}-1}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{r}{d}\right)^2-1}} \\ &= f(\lambda) \text{ où l'on abrégé } \lambda := \frac{r}{d} \text{ et } f := \left\{\begin{array}{ccc}]1,\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{\frac{1}{t^2-1}} \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Notre pente ne dépend donc (via l'application f) que du rapport $\lambda = \frac{1500}{280} = \frac{75}{14}$, d'où l'égalité

$$\tan\alpha = f\left(\frac{75}{14}\right) \overset{\text{calculette}}{\simeq} 0,19001 \text{ (encore la même valeur approchée).}$$

La seule approximation que nous ne contrôlons pas est celle donnée par la calculatrice (pour appliquer f sur $\frac{75}{14}$) : nous avons ainsi résolu notre problème d'approximations.

4. *Méthode élégante*. On rappelle (!) qu'il s'agit d'ordonner les trois pentes étudiée : vu les 1re et 3e pentes (resp. 24% et $\simeq 22\% \geq 21,5\% > 20\%$), nous pourrons conclure au classement

$$\text{1re pente} > \text{3e pente} \,(> 20\%) \overset{?}{>} \text{2e pente}$$

si l'on arrive à montrer que la 2e pente $\frac{d}{h}$ est plus petite que $20\% = \frac{1}{5}$. Or on peut minorer (subtilement)

$$\frac{h}{\text{km}} = \sqrt{2,1716} > \underbrace{\sqrt{2}}_{\simeq 1,414} > 1,4 = 5 \cdot 0,28 = 5\frac{d}{\text{km}}, \text{ d'où } \frac{d}{h} < \frac{1}{5}, \text{ CQFD.}$$

[6] rappellons qu'on *ne* pallie *pas* **À** quelque chose : le verbe "pallier" est *transitif* (çàd appelle un complément) *direct* (çàd a un complément *direct*, à savoir sans préposition)