Applications affines

pour lundi 26 février 2024
cahier d'exercices p. 118

Proposition de correction

★ Les coordonnées des points seront notées indifféremment horizontalement (a, b) ou verticalement $\binom{a}{b}$. ★

1. (algorithme)

(a) Appliquons chacune des instructions de l'algorithme donné sur le nombre 4 choisi :

i. *Ajouter 1 au nombre choisi :* on obtient l'incrémenté $4 + 1 = 5$.
ii. *Calculer le carré du résultat :* on obtient le carré $5^2 = 25$.
iii. *Soustraire le carré du nombre de départ au résultat précédent :* on obtient la différence $25 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.
iv. *Écrire le résultat :* on trouve 9, comme demandé.

(b) Exécutons chacune des commandes du programme sur le nombre x (défini par l'énoncé[1]).

i. *Ajouter 1 au nombre choisi :* on obtient l'incrémenté $x + 1$.
ii. *Calculer le carré du résultat :* on obtient le carré $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
iii. *Soustraire le carré du nombre de départ au résultat précédent :* on obtient la différence $\left(x^2 + 2x + 1\right) - x^2 = 2x + 1$.
iv. *Écrire le résultat :* on trouve $2x + 1$.

Sanity check : si x vaut $\boxed{4}$, le nombre écrit devient $2 \cdot \boxed{4} + 1 = 8 + 1 = 9$, ce qui est cohérent avec la question 1a.

(c) Déjà fait[2] à la question 1b.

Solution alternative : au lieu de développer le carré $(x+1)^2$, on peut directement factoriser[3] la différence $(\underline{x+1})^2 - x^2 = (\underline{x+1} - x)(\underline{x+1} + x) = 1 \cdot (2x + 1)$, ce qui donne bien sûr le même résultat.

★★★ L'énoncé « Soit f » est incorrect : en effet, ★★★
on ne veut pas établir une généralité portant sur **une** application f quelconque,
il s'agit de DÉFINIR **la** fonction $x \mapsto 2x + 1$ (le x de l'énoncé n'a aucun sens).

(d) L'image demandée vaut $f\left(\boxed{0}\right) = 2 \cdot \boxed{0} + 1 = 0 + 1 = 1$. Il s'agit de l'ordonnée à l'origine.

(e) L'énoncé préjuge de l'unicité[4] de l'antécédent par f de 5, ce qui est problématique ! Procédons proprement.

Soit a un antécédent par f de 5. On a alors l'égalité $f(a) = 5$, çàd $2a + 1 = 5$. Soustraire 1 donne $2a = 5 - 1 = 4$, puis diviser par 2 donne $a = \frac{4}{2} = 2$. Nous venons de prouver que le seul antécédent *possible* (par f de 5) serait 2. Mais nous n'avons pas montré que 2 est bien un tel antécédent !

Réciproquement, les égalités $f\left(\boxed{2}\right) = 2 \cdot \boxed{2} + 1 = 4 + 1 = 5$ montrent que 2 est un antécédent par f de 5.

Conclusion : l'antécédent cherché est 2.

(f) L'application f est affine, donc son graphe est une droite[5]. Pour la tracer, il en suffit de deux points distincts. Or nous venons (questions 1d et 1e) de calculer les images de deux nombres distincts *via* les égalités $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 5 \end{cases}$, lesquelles disent que le graphe de f passe par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(2, 5)$. Tracer la droite passant par ces points conclut donc.

[1] en fait « le nombre choisi » n'a pas vraiment de sens... Il s'agirait de plutôt dire « Soit x un nombre. »
[2] L'énoncé parle d'un « programme de **calcul** », et non « d'**opérations** », il serait donc étrange qu'il rende simplement la différence $(x+1)^2 - x^2$ sans la *calculer* – au sens de la *simplifier*.
[3] on utilise l'égalité $\square^2 - \Delta^2 = (\square - \Delta)(\square + \Delta)$ valide pour chaques nombres $\square$ et Δ (*preuve* : développer le membre de droite !)
[4] en disant « **l'**antécédent » au lieu de « **un** antécédent » (la mise en gras est de notre fait)
[5] l'énoncé l'affirme en passant mine de rien... Le vérifier !

Autre solution. La pente de l'application affine $f = \left[x \mapsto \underline{\underline{2}}x + 1\right]$ est le coefficient devant l'argument x, à savoir ici $\underline{\underline{2}}$. Par conséquent, sur le graphe de f, quand on avance horizontalement d'une unité, on monte verticalement de $\underline{\underline{2}}$ unités. Partant du point de coordonnées $\binom{0}{1}$ situé à la verticale de l'origine, on peut ainsi placer plein de points en se déplaçant d'un carreau vers la droite et de deux vers le haut, et de même dans l'autre sens (un carreau vers la gauche pour deux vers le bas). Relier tous ces points permet un tracer plus précis de la droite cherchée.

(g) On cherche l'ordonnée du point du graphe de f d'abscisse 3. Or ce point se situe à l'intersection du graphe de f et de l'ensemble des points d'abscisse 3 ; par ailleurs, ce dernier est une droite contenant le point de coordonnées $\binom{3}{0}$ (situé sur l'axe des abscisses) et parallèle à l'axe des ordonnées. On obtient ainsi une construction du point cherché, d'où son abscisse -5 par lecture.

Sanity check. On a les égalités $f\left(\boxed{-3}\right) = 2 \cdot \left(\boxed{-3}\right) + 1 = -6 + 1 = -5$.

2. Savez-vous prononcer « Bourg-en-Bresse » ?

(a) Au bout de $2\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}$, le nombre d'heures écoulées est $2,5$. On cherche donc dans le tableau, première ligne, la case $\boxed{2{,}5}$ et on lit celle en dessous : 80. La distance cherchée vaut donc $80\,\mathrm{km}$.

(b) La troisième heure de course est l'intervalle de temps entre[6] les temps-moments "2h" et "3h". La distance cherchée vaut donc la différence (absolue) entre les distances parcourues jusqu'aux temps "2h" et "3h" resp.. Ces deux distances se lisent dans le tableau sous les cases $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ (première ligne) et valent resp. $70\,\mathrm{km}$ et $100\,\mathrm{km}$, d'où la différence voulue $100\,\mathrm{km} - 70\,\mathrm{km} = 30\,\mathrm{km}$.

(c) Il est raisonnable de définir la rapidité comme *la vitesse moyenne*. Par conséquent, sur un *même* intervalle de temps (ici une heure), comparer les rapidités revient à comparer les distances parcourues. Nous venons d'évaluer l'une d'elles ($30\,\mathrm{km}$ sur la troisième heure), l'autre (sur la quatrième heure) se calcule de même : lire dans le tableau sous les cases $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$, à savoir 100 et 135, d'où une distance de $135\,\mathrm{km} - 100\,\mathrm{km} = 35\,\mathrm{km}$. Vu la comparaison $35 > 30$, le cycliste a été plus rapide sur la quatrième heure.

(d) L'énoncé parle de « les 9 points du tableau » mais... le tableau ne contient aucun point ! L'énoncé parle en fait des points *dont les abscisses se lisent en première ligne et les ordonnées en seconde.*

Bien vérifier que les unités écrites sur les axes sont celles du tableau – il faudra sinon faire des conversions.

(e) L'hypothèse est imprécise : il s'agit de comprendre « entre deux relevés **successifs** ». Alors cette hypothèse (vitesse constante) se traduit graphiquement par « le graphe entre deux points du graphe *correspondant à deux relevés successifs* est un segment ».

Le temps cherché est l'abscisse[7] du point du graphe d'ordonnée 75. On trace donc la droite (horizontale) d'ordonnée 75, çàd celle qui passe par le point de coordonnées $\binom{0}{75}$ (situé sur l'axe des ordonnées) et parallèle à l'axe des abscisses, droite qui recoupe le graphe en un point dont on lit l'abscisse : $2,25$.

Autre solution : la distance $75\,\mathrm{km}$ est atteinte entre les relevés correspondant aux distances 70 et 80 (kilomètres), donc entre les temps correspondants $\boxed{2}$ et $\boxed{2{,}5}$ (heures). Par ailleurs, la vitesse étant supposée constante sur cet intervalle de temps, la distance "milieu" $\frac{70+80}{2} = 75$ sera atteinte en le temps "milieu" $\frac{2+2{,}5}{2} = 2,25$, çàd au bout de $2\,\mathrm{h}\,15\,\mathrm{min}$.

(f) Comme à la question 1g, on trace la droite verticale d'abscisse 1, elle coupe le segment du graphe reliant les points correspondant aux relevés $\binom{0{,}5}{15}$ et $\binom{1{,}5}{55}$ en un certain point, puis on lit l'ordonnée de ce point : 35. La distance désirée vaut donc $35\,\mathrm{km}$.

Autre solution : comme à la question 2e, l'image (par f) du temps "milieu" $\frac{0{,}5+1{,}5}{2} = 1$ sera la distance "milieu" $\frac{15+55}{2} = 35$.

(g)

★★★ Encore un fois, l'énoncé « Soit f » est incorrect : en effet, ★★★
on ne veut pas établir une généralité portant sur **une** application f quelconque,
il s'agit de DÉFINIR **la** fonction dont.parle l'énoncé.

Si l'application f était linéaire, la vitesse du cycliste serait constante[8], donc la vitesse moyenne sur n'importe intervalle de temps serait la même ; or la question 2c a démontré la différence des vitesses moyennes sur les troisième et quatrième heures de course. Nous venons de réfuter la linéarité de f.

[6] Pour se prémunir des effets de bords, regarder ce qui se passe aux *extrêmes*. En l'occurrence, que se passe-t-il lors de la *zéro-ième* heure de course ?

[7] cette abscisse est bien *unique* sous l'hypothèse (raisonnable...) que le cycliste n'a pas fait demi-tour

[8] et le tableau de l'énoncé serait de proportionnalité