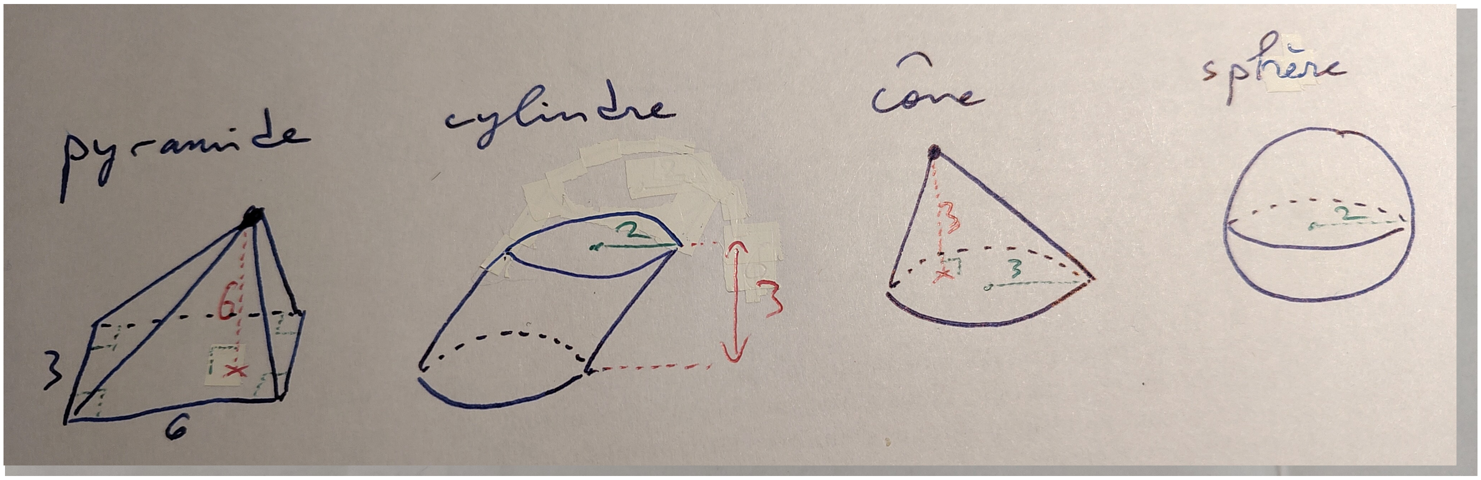
Devoir sur table

lundi 8 janvier 2024 – 1h

Correction suggérée

Exercice 1. (source : *annales abc* p. 204 sujet 54)

1. Les nombres indiqués ci-après sont des longueurs exprimées en centimètres :



2. La pyramide a pour base un rectangle, dont l'aire vaut le produit des longueurs de ses côtés, donc a pour volume le tiers du produit de sa hauteur par lesdites longueurs, à savoir $\frac{1}{3} \cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 3\,\mathrm{cm} \cdot 6\,\mathrm{cm} = 36\,\mathrm{cm}^3$.

Le cylindre a pour base un disque de rayon 2 cm, dont l'aire vaut $\pi\,(2\,\mathrm{cm})^2 = 4\pi\,\mathrm{cm}^2$, et a pour volume le produit de sa hauteur par cette aire basique, à savoir $3\,\mathrm{cm} \cdot 4\pi\,\mathrm{cm}^2 = 12\pi\,\mathrm{cm}^3$.

Le cône a pour base un disque de rayon $3\,\mathrm{cm}$, dont l'aire vaut $\pi\,(3\,\mathrm{cm})^2 = 9\pi\,\mathrm{cm}^2$, et a pour volume le tiers du produit de sa hauteur par cette aire de base, à savoir $\frac{1}{3} \cdot 3\,\mathrm{cm} \cdot 9\pi\,\mathrm{cm}^2 = 9\pi\,\mathrm{cm}^3$.

La boule, enfin, a pour volume les quatre tiers de π son rayon cubé, à savoir $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2\,\mathrm{cm})^3 = \frac{2^5\pi}{3}\,\mathrm{cm}^3$.

Pour comparer les quatre volumes précédents *sans les évaluer numériquement*[1], factorisons d'abord par ce qui pourrait nous simplifier, par exemple[2] par $3\pi\,\mathrm{cm}^3$. Exprimés dans cette dernière unité, ils se réécrivent resp.

$$\frac{12}{\pi}\text{ (pyramide)} \qquad 4\text{ (cylindre)} \qquad 3\text{ (cône)} \quad \text{et } \frac{32}{9}\text{ (boule).}$$

L'encadrement $3 < \pi < 4$, çàd $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$, permet déjà de classer les trois premiers : $3 < \frac{12}{\pi} < 4$. Le quatrième tombe aussi entre 3 et 4 vu l'encadrement $3 \cdot 9 = 27 < 32 < 36 = 4 \cdot 9$ (diviser ensuite le tout par 9). Il reste donc à comparer $\frac{12}{\pi}$ et $\frac{32}{9}$: or d'une part on a les équivalences

$$\frac{12}{\pi} \overset{?}{<} \frac{32}{9} \underset{\text{par } 4}{\overset{\text{simplifier}}{\iff}} \frac{3}{\pi} \overset{?}{<} \frac{8}{9} \overset{\text{isoler } \pi}{\iff} \underbrace{\frac{27}{8}}_{=3{,}375} \overset{?}{<} \pi,$$

d'autre part la dernière comparaison se réfute par les majorations $\pi < 3{,}15 < 3{,}375$, ce qui permet d'affirmer $\frac{32}{9} < \frac{12}{\pi}$.

Finalement, on peut ordonner[3] :

$$\begin{matrix}\text{volume} \\ \text{du } \textbf{cône} \\ (9\pi\,\mathrm{cm}^3)\end{matrix} < \begin{matrix}\text{volume de} \\ \text{la } \textbf{boule} \\ (\frac{2^5\pi}{3}\,\mathrm{cm}^3)\end{matrix} < \begin{matrix}\text{volume de} \\ \text{la } \textbf{pyramide} \\ (36\,\mathrm{cm}^3)\end{matrix} < \begin{matrix}\text{volume} \\ \text{du } \textbf{cylindre} \\ (12\pi\,\mathrm{cm}^3)\end{matrix}.$$

[1] Arrondis au mm^3 à l'aide d'une calculatrice, ces volumes valent (en mm^3) resp.

36 000 (pyramide), 37 699 (cylindre), 28 274 (cône) et 33 510 (boule).

[2] les facteurs 3 et π sont présents chacun dans trois volumes sur les quatre (évidemment le facteur cm^3 apparaît dans tous)

[3] *Sanity check* : les volumes approchés au mm^3 s'ordonnent bien suivant

$28\,274 < 33\,510 < 36\,000 < 37\,699$ (observer qu'une précision au cm^3 aurait suffi).

Exercice 2. (source : site prof-launay.org)

1. On lit sur la figure les coordonnées suivantes :

$$\begin{array}{ll} A : 20^\circ\,\mathrm{W}\,,\, 60^\circ\,\mathrm{N} & D : 20^\circ\,\mathrm{W}\,,\, 0^\circ\,\mathrm{N} \\ B : 80^\circ\,\mathrm{E}\,,\, 40^\circ\,\mathrm{S} & E : 0^\circ\,\mathrm{E}\,,\, 60^\circ\,\mathrm{N} \\ C : 20^\circ\,\mathrm{W}\,,\, 40^\circ\,\mathrm{S} & F : 80^\circ\,\mathrm{E}\,,\, 60^\circ\,\mathrm{N} \end{array}.$$

2. Les coordonnées données sont celles (déjà relevées) du point B.
3. De culture générale, la longitude de New York est d'environ 75° W. La longitude proposée 37° W est donc à peu près entre celle de Greenwich (0° W) et celle de New York, donc le point donné se situe probablement sur un méridien entre l'Amérique et l'Afrique-Europe. La latitude donnée 41° N étant par ailleurs grossièrement entre celles du tropique du Cancer ($\simeq 20^\circ$) et du cercle arctique ($\simeq 60^\circ$), le marin est très probablement en plein Atlantique Nord. (Cela serait cohérent avec sa nationalité anglaise, pour peu qu'il ne navigue pas trop loin de sa terre natale.)

Exercice 3. (source : *exos corrigés* p. 232 exo 27)

1. Supposons la Terre sphérique, hypothèse motivée par sa simplicité même et sa convenance. Une ligne imaginaire comme dans l'énoncé vaut alors un quart de circonférence terrestre, çàd d'équateur, donc ce dernier a pour longueur le quadruple de celle d'une telle ligne, çàd le quadruple d'un million de mètres, ou encore 40 000 km.
2. Les fuseaux horaires découpent l'équateur en autant de portions isométriques que leur nombre, à savoir vingt-quatre. Une telle portion a donc pour longueur le vingt-quatrième de celle de l'équateur, à savoir $\frac{40\ 000\,\mathrm{km}}{24} = \frac{\cancel{6}\cdot 5000}{\cancel{6}\cdot 3}\,\mathrm{km} = \frac{5000}{3}\,\mathrm{km} \simeq 1667\,\mathrm{km}$.

   L'équateur se divise d'une part en 360 degrés d'arc (isométriques), d'autre part en 24 portions comme ci-dessus. Une telle portion comporte donc $\frac{360}{24} = 15$ degrés d'arc.
3. Un mille marin a pour longueur le soixantième d'un degré d'arc, çàd du trois-cent-soixantième de la circonférence terrestre, à savoir

$$\frac{1}{60}\frac{1}{360}40\ 000\,\mathrm{km} = \frac{1}{3\cdot\cancel{20}}\frac{1}{9\cdot\cancel{40}}\left(\cancel{40}\cdot 50\cdot\cancel{20}\,\mathrm{km}\right) = \frac{50}{27}\,\mathrm{km} \simeq 1\ 852\,\mathrm{m}\,.$$

Exercice 4. (création[4] inspirée d'une vidéo de 3b1b) Notons $D := 6,54\,\mathrm{cm}$ le diamètre standard d'une balle de tennis et $R := \frac{D}{2}$ le rayon associé (qui vaut $\frac{6,54\,\mathrm{cm}}{2} = 3,27\,\mathrm{cm}$).

1. Une remarque utile : *quand un cylindre contient une boule, son rayon vaut au moins celui de la boule contenue*[5]. La boîte a donc un rayon supérieur à celui d'une balle de tennis : montrons qu'il ne peut pas lui être *strictement* supérieur. Si c'était le cas, les balles pourraient alors bouger perpendiculairement à l'axe de la boîte, donc leurs centres pourraient bouger en secouant convenablement la boîte, ce qui contredirait l'énoncé. Le rayon cherché vaut donc R.

   Par ailleurs, comme les centres des balles ne peuvent pas bouger dans la direction de l'axe, les balles sont collées d'une part entre elles et d'autre part aux "bases" de la boîte (couvercle et fond). Dans ces conditions, la hauteur apparaît comme le diamètre des balles multiplié par leur nombre, à savoir $4D = 4\cdot 6,54\,\mathrm{cm} = 26,16\,\mathrm{cm}$.
2. Hypothèse cruciale : *la quantité de peinture est proportionnelle à l'aire des surfaces peintes.* Il s'agit donc de comparer l'aire du cylindre (bases exclues) et celle de quatre balles. L'aire d'une balle vaut déjà $4\pi R^2$. Découpons ensuite le cylindre en autant de tronçons qu'il contient de balles, chaque tronçon ayant même hauteur D et circonférence $2\pi R$, donc pour aire[6] le produit $D\cdot 2\pi R = 4\pi R^2$: on retrouve l'aire de la balle contenue par le tronçon ! En empilant ces tronçons[7], l'aire du cylindre (hors bases) apparaît valant celle des balles contenues. Finalement, on utilisera la même quantité de peinture pour l'un ou pour les autres.

[4] intitulée *Why a sphere's surface area is 4πR^2 (short version)* sur https ://www.youtube.com/watch ?v=iTxL863RQ94

[5] **Preuve pour les curieux·es**. Regardons le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre en le centre de la boule. Puisque le cylindre (plein) inclut la boule, la section du cylindre par ce plan inclut celle de la boule. Or la section cylindrique est un disque de rayon celui du cylindre (car la section est perpendiculaire à l'axe) et celle sphérique est un disque de rayon celui de la boule (car la section passe par le centre). On est donc ramené à se demander pourquoi, lorsqu'un disque en inclut un autre, le rayon de l'incluant vaut au moins celui de l'inclus. À vous de poursuivre !

[6] le cylindre est *droit*

[7] et ce quel que soit le nombre de balles par boîte : 4 ne joue ici aucun rôle !