Devoir sur table

lundi 22 janvier 2024 – 1h

source : *exos résolus* p. 27

Solution proposée

Exercice 29. *Toutes les longueurs seront exprimées en centimètres.* La pièce à carreler mesure alors 800 par 650, ce qui motive l'apparition de ces nombres à la question 1.

1. Décomposons en facteur premiers :

$$\left\{ \begin{array}{l} 800 = 8 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^5 5^2 13^0 \\ 650 = 65 \cdot 10 = (5 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 5) = 2^1 5^2 13^1 \end{array} \right. .$$

   Prendre le min des exposants associés à chaque facteur premier dans les décompositions précédentes de 800 et 650 livre alors les égalités

$$\operatorname{pgcd} \binom{800}{650} = 2^1 5^2 13^0 = 2 \cdot 25 = 50.$$

2. Supposons la pièce pavable comme souhaité et appelons d la longueur (en centimètres) du côté des dalles utilisées. Un nombre entier de dalles rentre alors dans la longueur de la pièce, ce qui se traduit par « la longueur (du côté) de la dalle divise la longueur de la pièce », ou encore par « d divise 800 ». Le même raisonnement avec la largeur montre que d divise 650. La longueur d divise finalement les deux dimensions de la pièce, *a fortiori* leur p. g. c. d. 50, donc[1] ou bien vaut 50 ou bien divise sa moitié $\frac{50}{2} = 25$; or cette longueur d vaut au moins 25 (par hypothèse sur les dalles disponibles), donc ne peut valoir que 25 ou 50.

   Réciproquement, puisque 50 est un diviseur commun aux deux dimensions de la pièce (c'est leur p. g. c. d. !), on peut paver cette dernière avec des dalles de 50, à plus forte raison avec des dalles de 25 en remplaçant chaque dalle de 50 par quatre dalles de 25 suivant le découpage $\square \to \boxplus$.

   Conclusion : les "dimensions" convenables sont 25 et 50.

3. La longueur $800 = 8 \cdot 100 = 8 \cdot 2 \cdot 50 = 16 \cdot 50$ "utilise" seize dalles de 50, tandis que la largeur $650 = 65 \cdot 10 = 13 \cdot 5 \cdot 10 = 13 \cdot 50$ en "utilise" $\boxed{\text{treize}}$, donc un pavage avec de telles dalles en utilisera

$$\underline{\underline{16}} \times \boxed{13} = 4 \cdot 52 = 208.$$

   Pour paver avec des dalles de 25, il suffit (*via* le découpage $\square \to \boxplus$ mentionné à la question 2) de *quadrupler* le nombre de dalles de 50. Le nombre de dalles de 25 utilisées vaudra donc

$$208 \cdot 4 = 832.$$

Exercice 30.

1. Cherchons à factoriser[2] :

$$\left\{ \begin{array}{l} 133 = \underline{\underline{14}}0 - \underline{\underline{7}} = 7 \cdot 20 - 7 = 7 \cdot 19 \\ 114 = \underline{\underline{12}}0 - \underline{\underline{6}} = 6 \cdot 20 - 6 = 6 \cdot 19 \end{array} \right. .$$

   La fraction obtenue $\frac{133}{114}$ est par conséquent simplifiable par 19, donc n'est pas irréductible.

[1] **Résultat utile** : pour chaque naturel n, il n'y aucun diviseur de n dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{n}{2}, n\right[$. Soit en effet d un tel diviseur et notons $\delta := \frac{n}{d}$ le codiviseur associé : alors δ d'une part est entier (car d divise n) d'autre part tombe dans l'intervalle $]1, 2[$ (car d appartient à $\left]\frac{n}{2}, n\right[$, çàd $\frac{d}{n}$ appartient à $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$), ce qui est impossible.

[2] le nombre 114 est pair et divisible par 3 (car la somme $1 + 1 + 4 = 6$ de ses chiffres est mutiple de 3), donc est multiple de 6

2. Il est étrange de demander de déduire un p. g. c. d. à partir de la réponse négative à une question d'irréductibilité... Gageons que l'énoncé parlait plutôt de déduire pgcd $\binom{3990}{3420}$ à partir de "certaines considérations portant sur la fraction initiale". Justement : en termes de fractions, *le p. g. c. d. cherché vaut le plus grand facteur simplifiable dans la fraction* $\frac{3990}{3420}$.

Or, d'une part (d'après la question 1) cette dernière $\frac{3990}{3420} = \frac{133}{114}$ se simplifie en $\frac{7 \cdot \cancel{19}}{6 \cdot \cancel{19}} = \frac{7}{6}$, écriture qui *cette fois* est irréductible (le numérateur 7 est premier et ne divise pas le dénominateur 6 car lui est strictement supérieur), d'autre part on passe de la fraction $\frac{3990}{3420}$ à celle $\frac{7}{6}$ en simplifiant par le rapport des dénominateurs[3]

$$\frac{3420}{6} = \left(\underline{\underline{30}}0 + \underline{\underline{42}}\right) \frac{10}{6} = \frac{6 \cdot 50 + 6 \cdot 7}{6} 10 = (50 + 7)\, 10 = 570.$$

Puisque l'on ne peut pas simplifier davantage la fraction, ce dernier rapport vaut le p. g. c. d. cherché, d'où l'égalité

$$\operatorname{pgcd}\binom{3990}{3420} = 570.$$

Exercice 31.

1. Léa a simpifié en tout par le produit $10 \cdot 5 \cdot 9 = 10 \cdot 45 = 450$. Or la fraction initiale se retrouve en multipliant les numérateur et dénominateur de celle finale $\frac{21}{28}$ par ce produit 450, d'où les égalités

$$\begin{cases} a = 21 \cdot 450 = 20 \cdot 450 + 450 = 9000 + 450 = 9\ 450 \\ b = 28 \cdot 450 = 14 \cdot 900 = (90 + 36) \cdot 100 = 12\ 600 \end{cases}.$$

2. La fraction $\frac{21}{28} = \frac{3 \cdot \cancel{7}}{4 \cdot \cancel{7}}$ est simplifiable par 7, donc n'est pas la forme irréductible de la fraction $\frac{a}{b}$.

3. Le p. g. c. d. cherché vaut le plus grand facteur simplifiable dans la fraction $\frac{a}{b}$. Or Léa a simplifié cette dernière par 450 pour obtenir la fraction $\frac{21}{28}$ et on peut encore simplifier par 7 pour obtenir $\frac{3}{4}$, écriture qui *cette fois* est irréductible (le numérateur 3 est premier et n'apparaît pas dans la décomposition en facteurs premiers de $4 = 2^2$). Finalement, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ au-maximum-par $450 \cdot 7 = 3\ 150$, d'où l'égalité

$$\operatorname{pgcd}\binom{a}{b} = 3\ 150.$$

Exercice 32.

1. Prendre le min des exposants associés à chaque facteur premier de a ou b livre directement les égalités

$$\operatorname{pgcd}\binom{a}{b} = 2^2 3^0 5^2 7^0 = 4 \cdot 25 = 100.$$

2. Élever au carré les égalités définissant a et b donne des factorisations en nombres premiers de leurs carrés, à savoir

$$\begin{cases} a^2 = \left(2^3 3^4 5^2\right)^2 = 2^{2 \cdot 3} 3^{2 \cdot 4} 5^{2 \cdot 2} = 2^6 3^8 5^4 \\ b^2 = \left(2^2 5^3 7\right)^2 = 2^{2 \cdot 2} 5^{3 \cdot 2} 7^2 = 2^4 5^6 7^2 \end{cases}.$$

Par unicité de telles décompositions, nous avons obtenu LES décompositions de a^2 et b^2 en facteurs premiers.

3. Comme à la question 1, prendre (dans les deux égalités précédentes) le min des exposants associés à chaque facteur premier de a^2 ou b^2 fournit les égalités

$$\operatorname{pgcd}\binom{a^2}{b^2} = 2^4 3^0 5^4 7^0 = \left(2^2 5^2\right)^2 = \left[\operatorname{pgcd}\binom{a}{b}\right]^2.$$

[3] Cela marche aussi avec les numérateurs mais les valeurs sont plus grandes ($3990 > 3420$) et l'arithmétique plus compliquée (divisisbilité par 7). On trouverait bien sûr le même quotient $\frac{3990}{7} = 570$.