Devoir sur table du lundi 4 décembre 2023 – 1h
(source : *Exos résolus*, pp. 129–30)
Solution proposée

Remarque générale. Pour chacun des exercices proposés, et comme indiqué en cours de probabilité, nous prenons le soin de décrire :

1. l'expérience aléatoire étudiée ;
2. comment (et pourquoi) nous choisissons de modéliser/coder les issues ;
3. quelles probabilités nous imposons pour ces issues (bien souvent équiprobabilité – mais nous motiverons toujours cette décision !).

Cela prend du temps mais donne le cadre indispensable pour répondre aux questions avec contrôle, profondeur et sérénité sur ce délicat chapitre (trop de personnes sont bernées par les probabilités faute de poser un cadre adéquat).

Par ailleurs, l'attention portée à justifier le moindre détail – y compris à relever les flous de l'énoncé – est sans doute excessive pour le Brevet mais doit vous amener à *prendre conscience de vos points aveugles* : jusqu'où savez-vous et pouvez-vous justifier ce que vous affirmez ?

Bref : pas de panique si vous n'avez pas écrit tout ce qui suit ! Ce "corrigé" est davantage un outil de travail pour réfléchir sur et améliorer ce que vous avez produit :-).

Exercice 8.

L'expérience aléatoire décrite est composée de **deux** épreuves successives, la seconde **dépendant** de la première.

Pour la **première**, modélisons ses issues par les marquages[1] des boules tirables, à savoir $R1$, $R2$, $N1$ et $N2$. (Il y a alors quatre issues.) Les boules étant « indiscernables au toucher », il est pertinent de supposer équiprobabilité : comme il y $\boxed{4}$ issues, la probabilité de chacune est alors de $\frac{1}{\boxed{4}}$ (inverse à écrire sur chacune des quatre branches correspondant au premier tirage).

Pour la **seconde** épreuve, il est raisonnable de modéliser les issues de la même façon. L'univers des issues possibles est alors formé par celui de la première épreuve *duquel on a retiré le marquage de la première boule tirée* : cet univers n'est donc pas le même pour les secondes épreuves ! Il contient cependant *toujours une issue de moins que le premier univers*, donc contient $4 - 1 = \boxed{3}$ issues. L'indiscernabilité demeurant pour ces trois boules, il est pertinent d'imposer à nouveau équiprobabilité : chaque issue aura alors probabilité $\frac{1}{\boxed{3}}$ (inverse à écrire sur chacune des 4×3 branches correspondant au second tirage).

Finalement, avec les choix ci-dessus, les issues de l'expérience étudiée sont les couples (a, b) où les symboles a et b peuvent être n'importe quels éléments <u>distincts</u> parmi $R1$, $R2$, $N1$ et $N2$ ("distincts" car la première boule tirée ne peut pas être tirée en second), et la probabilité d'une telle issue (a, b) vaut le produit des probabilités des issues « tirer a en premier » et « tirer b en second », à savoir $\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$. Remarquer qu'il y a équiprobabilité.

1. Puisque la boule tirée en premier n'est pas remise dans l'urne, où est tirée la seconde boule, cette dernière peut être n'importe laquelle des (quatre) boules initialement présentes SAUF celle qui a été tirée en premier. Il s'agit donc de noter sous chaque "tri-branche" les trois boules (peu importe l'ordre) qui NE sont PAS celle notée au "nœud" de la tri-branche, ce qui est cohérent avec la tri-branche déjà complétée. Par exemple :

$$
\begin{array}{ccc}
 & R1 & \\
/ & | & \backslash \\
R2 & N1 & N2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & R2 & \\
/ & | & \backslash \\
R1 & N1 & N2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & N1 & \\
/ & | & \backslash \\
R1 & R2 & N2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & N2 & \\
/ & | & \backslash \\
R1 & R2 & N1
\end{array}
$$

Sanity check : l'arbre possède **douze feuilles** (par paquets de trois sur la dernière ligne ci-dessus), **chacune correspondant** à un chemin depuis la racine de l'arbre, *i. e.* **à une issue**. Il y a donc $\boxed{12}$ issues, ce qui est cohérent avec la probabilité $\frac{1}{\boxed{12}}$ trouvée et la situation d'équiprobabilité constatée.

[1] l'énoncé parle de « boules **marquées** »

2. L'événement E est réalisé ssi[2] la première boule tirée est rouge (*i. e.* est R1 ou R2) et si la seconde boule tirée est la boule rouge restante (parmi R1 et R2). $\boxed{\text{Deux}}$ issues exactement réalisent ces conditions : $(R1, R2)$ et $(R2, R1)$. Chacune ayant probabilité $\frac{1}{12}$, l'événement E a probabilité $\boxed{2}\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.
3. L'énoncé est ambigu : par "numéro", entend-il "nombre" ? "chiffre" ? ou bien "marquage" ?[3] Distinguer les deux premiers cas ne ferait ici aucune différence[4], en revanche le troisième cas est bien à part ! Discutons donc selon l'interprétation.

   (a) **Si "numéro" signifie "marquage".** En remarquant d'une part que deux boules ayant même marquage *n'en font qu'une* et que d'autre part la seconde boule tirée *n'est jamais la première* (cette dernière n'étant pas remise dans l'urne), on peut conclure que l'événement F est impossible, *i. e.* ne contient aucune issue, donc est de probabilité nulle.

   (b) **Si "numéro" signifie "nombre".** Remarquer que chaque nombre (1 ou 2) apparaît exactement sur deux boules. Par conséquent, quand on a déjà tiré une boule, il y a *exactement une* boule restante portant le même nombre, *i. e.* exactement *une* branche conduisant à une issue réalisant l'événement F. Ce dernier contient donc autant d'issues[5] que de choix pour la première boule, à savoir $\boxed{4}$, d'où sa probabilité : $\boxed{4}\frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

Morale : ne jamais utiliser "numéro" (ambigu), préférer "nombre" ou "étiquette" ou "marquage" (clairs).

Exercice 9.

L'expérience aléatoire décrite est composée de **deux** épreuves, chacune un tirage de jetons dans un sac.

Contrairement à l'exercice précédent, on peut supposer ces deux épreuves **indépendantes** : chacune concerne en effet un sac *différent* (l'énoncé parle d'un « second sac ») et l'énoncé ne décrit *aucune interaction entre les sacs*, même à travers leurs aléas (les mentions « indiscernables » et « au hasard » valent pour chacune).

Pour la première épreuve, modélisons ses issues par le numéro inscrit sur le jeté tiré, à savoir 1, 2 et 3. (Il y a alors trois issues.) Les mentions « indiscernables » et[6] « au hasard » permettent d'imposer raisonnablement équiprobabilité : comme il y $\boxed{3}$ issues, la probabilité de chacune est alors de $\frac{1}{\boxed{3}}$.

Pour la seconde épreuve, procédons de même, ce qui donne 4 issues équiprobables 1, 2, 3 et 4, chacune de probabilité $\frac{1}{4}$.

Les issues de notre expérience peuvent alors être décrites par les couples (d, u) où d est une issue de la première épreuve et u une issue de la seconde[7], *i. e.* par les cases du tableau suivant :

premier tirage \ second tirage	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34

(on a écrit dans chaque case le nombre constitué par l'issue correspondante : cela servira pour plus tard).

Comme il y a resp. 3 et 4 choix pour d et u, notre expérience comporte en tout $3 \cdot 4 = 12$ issues (le nombre de cases du tableau). L'indépendance des épreuves (ou l'utilisation d'un arbre de probabilités) permet par ailleurs d'affirmer que la probabilité d'une telle issue (d, u) vaut le produit des probabilités des issues « tirer d en premier » et « tirer u en second », à savoir $\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$. Remarquer qu'il y a équiprobabilité.

1. Un entier étant multiple de 2 ssi son chiffre des unités est pair, une issue (d, u) réalise l'événement A ssi le chiffre u est pair. Or, parmi les chiffres du second tirage, à savoir 1, **2**, 3 et **4**, les pairs sont **2** et **4**.

[2] abréviation usuelle de « si et seulement si »

[3] Pour rappel, les **numéros** de bus n'ont pas vocation à être soumis aux opérations arithmétiques (les **nombres** le sont), ce sont des *marquages*, des *étiquettes* servant à distinguer deux lignes aux parcours différents. On pourrait tout aussi bien marquer/étiqueter les bus & les lignes par des couleurs, des lettres, des sons...

[4] si toutefois les nombres écrits à droite de l'initiale de la couleur étaient composées de **plusieurs** chiffres, l'interprétation « "numéro" = "chiffre" » serait alors incorrecte

[5] On pourrait décrire exhaustivement les issues de F, à savoir les couples $(R1, N1)$, $(R2, N2)$, $(N1, R1)$ et $(N2, R2)$, mais cela serait bien long s'il y avait plus de couleurs ou de nombres... Notre rédaction au contraire s'adapterait aisément à un nombre quelconque de couleurs ou de nombres.

[6] Une seule mention aurait suffit : pourquoi cette lourdeur ? Même *l'absence* de mention nous aurait conduit, faute d'information, à la même conclusion.

[7] d et u pour resp. "**d**izaine" et "**u**nité"

Par conséquent, les cases réalisant l'événement A sont celles des deuxième et quatrième colonnes :

$\Rsh$	1	2	3	4
1	·	**12**	·	**14**
2	·	**22**	·	**24**
3	·	**32**	·	**34**

(issues formant l'événement A) .

On compte $\boxed{6}$ telles issues, donc A a pour probabilité $\boxed{6}\frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.

Solution plus rapide & intuitive, mais moins rigoureuse. Quoi qu'il se passe à première épreuve, seule compte pour la parité du nombre composé la parité du chiffre tiré à la seconde épreuve. L'événement A a donc même probabilité que l'événement de la seconde épreuve (attention, on change d'expérience !) formé des issues paires : comme il y a $\boxed{2}$ telles issues (2 et 4), chacune de probabilité $\frac{1}{4}$, la probabilité cherchée vaut $\boxed{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2. Rappelons qu'un entier est multiple de 3 ssi la somme de ses chiffres l'est. Par ailleurs, il sera très utile de remarquer que, **pour chaque entier n, il y a parmi les entiers 1, 2 et 3 *un seul* dont la somme avec n est multiple de** 3. Par conséquent, dans chaque colonne, il y a *exactement une* case réalisant l'événement B. Ce dernier contient donc autant d'issues que le tableau de colonnes, *i. e.* $\boxed{4}$, donc a probabilité $\boxed{4}\frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

$\Rsh$	1	2	3	4
1	·	12	·	·
2	21	·	·	24
3	·	·	33	·

(issues formant l'événement B) .

3. Les entiers 2 et 3 étant étrangers, être multiple des deux revient à être multiple de leur produit 6. Les nombres du tableau étant compris entre 10 et 40, il est aisé d'en lister les multiples de 6 parmi 12, 18, 24, 30 et 36 : ce sont 12 et 24. L'événement C contient par conséquent $\boxed{2}$ issues, donc a probabilité $\boxed{2}\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

$\Rsh$	1	2	3	4
1	·	12	·	·
2	·	·	·	24
3	·	·	·	·

(issues formant l'événement C) .

4. Un entier est multiple de 5 ssi son chiffre des unités est 0 ou 5. Or ces chiffres sont exclus de la deuxième épreuve (dont les issues sont "coincées" entre 1 et 4), d'où l'impossibilité de l'événement F, lequel est donc de probabilité nulle.

Exercice 10.

L'expérience est quasiment la même qu'à l'exercice 9 : reprenons-en donc entièrement la modélisation.

Signalons quand même une énormité : l'énoncé semble ne pas avoir envisagé un seul instant que la roue puisse s'arrêter pile à la frontière entre deux secteurs ! Il nous contraint donc à exclure **physiquement** ces possibilités[8] – c'est violenter la réalité mais nous devons faire avec.

Il y a deux épreuves indépendantes, chacune avec quatre issues 1, 2, 3 et 4, d'où la possibilité de décrire les $4 \times 4 = 16$ issues de l'expérience étudiée par un tableau ;

premier "faire-tourner" \ second "faire-tourner"	1	2	3	4
1	·	·	·	·
2	·	·	·	·
3	·	·	·	·
4	·	·	·	·

.

Peut-on encore imposer équiprobabilité ? L'énoncé parle de « roues **parfaitement équilibrées** », ce qui permet de raisonnablement supposer que *la probabilité que la flèche pointe dans un secteur angulaire donnée est proportionnelle à l'aire dudit secteur, i. e.* à son angle au centre. Or d'une part chaque domaine correspondant à une issue est bien un secteur angulaire (un quart de disque d'après les figures de l'énoncé), d'autre part ces

[8] on peut toujours rétorquer qu'une telle issue est théoriquement impossible (*i. e.* de probabilité nulle) mais on rentre alors dans un univers d'issues infini, ce qui n'était certainement dans l'intention de l'énoncé

secteurs ont même angle au centre (l'angle droit). Il est donc bien pertinent de supposer équiprobabilité dans chaque épreuve, ce qui implique (comme à l'exercice 9) équiprobabilité dans l'expérience. Comme cette dernière comporte $\boxed{16}$ issues, chacune d'elle a pour probabilité $\frac{1}{\boxed{16}}$.

Partie A

1. La fréquence d'apparition (avec pour unité %) de la somme 3 se lit comme l'ordonnée du rectangle d'abscisse 3, à savoir 15.
2. Le rectangle d'abscisse 1 étant plat, son ordonnée est nulle, tout comme la fréquence correspondante, *i. e.* celle d'apparition de la somme 1.

Partie B

1. Observer la constance de la somme[9] sur chaque diagonale $\diagup$:

première roue \ seconde roue	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

.

2. L'énoncé parle de « lancers » là où il parlait de "faire-tourner". Il serait bien moins ambigu de parler d'issues... En tout cas, le tableau ci-dessus contient *exactement* $\boxed{\text{quatre}}$ cases "5", l'événement « la somme obtenue est 5 » est formé d'autant d'issues, donc est de probabilité $\boxed{4}\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$.
3. Pour chaque nombre s, la probabilité d'obtenir s pour somme vaut un seizième du nombre de cases "s", ce qui permet de remplir le tableau ci-dessous. Observer la symétrie par rapport à la colonne du milieu, correspondant à la somme 5 (dont la probabilité $\frac{1}{4}$ a été calculée à la question précédente) :

somme obtenue	≤ 1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
nombre de cases possédant cette somme	0	1	2	3	4	3	2	1	0
probabilité	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0

4. Pour comparer, il est commode d'utiliser une même unité, mettons le % :

somme obtenue	≤ 1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
fréquence observée (%)	0	5	15	20	30	15	10	5	0
probabilité théorique (%)	0	6, 25	12, 5	18, 75	25	18, 75	12, 5	6, 25	0

.

Les deux lignes semblent "correspondre" mais comment *préciser* ce "semblant" ?

Prenons pour base la théorie (souvent unique) et rapportons-y les observations (souvent diverses). Concrètement, calculons *l'écart relatif à la probabilité théorique*, *i. e.* l'écart absolu à la probabilité théorique *rapporté à cette dernière*[10] :

somme obtenue	écart relatif
2	$\frac{5-6{,}25}{6{,}25}=\frac{-1{,}25}{6{,}25}=-\frac{1}{5}=-20\%$
3	$\frac{15-12{,}5}{12{,}5}=\frac{2{,}5}{12{,}5}=\frac{1}{5}=20\%$
4	$\frac{20-18{,}75}{18{,}75}=\frac{1{,}25}{18{,}75}=\frac{1}{15}=\frac{2}{3}10\%\simeq 6,7\%$
5	$\frac{30-25}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=20\%$
6	$\frac{15-18{,}75}{18{,}75}=\frac{-3{,}75}{18{,}75}=-\frac{1}{5}=-20\%$
7	$\frac{10-12{,}5}{12{,}5}=\frac{-2{,}5}{12{,}5}=-\frac{1}{5}=-20\%$
8	comme pour la somme 2

.

[9] Quand on se déplace d'une case sur une telle diagonale, la première issue augmente ou diminue de 1 et la seconde issue varie également de ± 1 mais dans l'autre sens, de sorte que ces deux variations se compensent par addition : total, leur somme n'a pas bougé.

[10] ce qui suppose la nullité de cette probabilité, raison pour laquelle on exclut ci-après les sommes extrêmes (≤ 1 et ≥ 9)

On observe un écart de $\pm 20\%$ sur toutes les valeurs, à l'exception d'une ayant un écart moindre (environ 7%). On peut donc affirmer que la réalité colle à la théorie avec une marge de 20% d'erreur, ce qui reste considérable[11] !

5. Repérons par un double-soulignage les nombres premiers parmi les sommes possibles : $\underline{\underline{2}}, \underline{\underline{3}}, 4, \underline{\underline{5}}, 6, \underline{\underline{7}}, 8$. Ces nombres correspondent aux cases suivantes :

première roue \ seconde roue	1	2	3	4
1	2	3	·	5
2	3	·	5	·
3	·	5	·	7
4	5	·	7	·

(sommes premières).

On dénombre $\boxed{\text{neuf}}$ telles cases, donc l'événement étudié a pour probabilité $\boxed{9}\frac{1}{16} = \frac{9}{16} = 56,25\%$.

On aurait également pu dire que l'événement étudié est formé des événements « obtenir 2 », « obtenir 3 », « obtenir 5 » et « obtenir 7 » : ces quatre événements étant deux à deux incompatibles, la probabilité de leur réunion vaut la somme de leur probabilités, à savoir (en utilisant la question 3) $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Or le calcul en réduisant au même dénominateur 16 revient à calculer (au numérateur) le nombre d'issues constituant l'événement étudié, donc nous ramène au cas précédent (avec un inutile détour).

On aurait pu, enfin, raisonner sur l'événement contraire « obtenir une somme **composée** » dont les issues correspondent aux sommes 4, 6 et 8 :

première roue \ seconde roue	1	2	3	4
1	·	·	4	·
2	·	4	·	6
3	4	·	6	·
4	·	6	·	8

(sommes composées).

Ce contraire contient $\boxed{\text{sept}}$ issues, donc a probabilité $\frac{\boxed{7}}{16}$, d'où la probabilité cherchée : $1 - \frac{7}{16} = \frac{16-7}{16} = \frac{9}{16}$.

[11] pour comparaison, les statistiques en médecine considèrent généralement un seuil (discutable – et discuté) de 5%