Brevet blanc

jeudi 14 décembre 2023

Proposition de correction

Exercice A.

Notons p et c les prix respectifs en euro du **p**antalon et de la **c**hemise *avant* remise.

La 1re hypothèse se traduit par l'égalité $p + c = 135$.

Après réductions de 20% et 30% resp., les nouveaux prix du pantalon et de la chemise sont resp. $p - \frac{20}{100}p$ et $c - \frac{30}{100}c$, *i. e.* $\left(1 - \frac{1}{5}\right)p$ et $\left(1 - \frac{3}{10}\right)c$, ou encore $\frac{4}{5}p$ et $\frac{7}{10}c$, dont la somme vaut $103,5$ (traduction de la 2de hypothèse). Décupler cette dernière égalité $103,5 = \frac{8p}{10} + \frac{7c}{10}$ donne alors les égalités

$$1035 = 8p + 7c = (p + 7p) + 7c = p + (7p + 7c) = p + 7\,(p + c) \underset{\text{hypothèse}}{\overset{\text{1re}}{=}} p + \underbrace{7 \cdot 135}_{=945},$$

d'où[1] le prix cherché $p = 1035 - 945 = 90$.

Exercice B.

Notons p le prix de la propriété en milliers[2] d'euro.

1. Par hypothèse, les deux personnes possèdent resp. $\frac{4}{7}p$ et $\frac{5}{9}p$ milliers d'euro. Vu que des septièmes sont toujours plus grands que des huitièmes[3], on peut minorer (strictement) $\frac{4}{7}p = 4p\frac{1}{7} > 4p\frac{1}{8} = \frac{p}{2}$, donc la 1re personne possède plus de la moitié du prix de la propriété. Même conclusion pour la 2e personne vu les minorations $\frac{5}{9} > \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

   Additionner les comparaisons précédentes $\left\{\begin{array}{l} \frac{4}{7}p > \frac{p}{2} \\ \frac{5}{9}p > \frac{p}{2} \end{array}\right.$ donne $\frac{4}{7}p + \frac{5}{9}p > \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$, ce qui montre que l'argent commun aux deux personnes (membre de gauche) dépasse le prix de la propriété (membre de droite).

2. Par hypothèse, la différence (en k€) entre l'argent commun aux deux personnes et le prix de la propriété vaut 36, d'où les égalités

$$36 = \frac{4}{7}p + \frac{5}{9}p - p = \left(\frac{4}{7} + \frac{5}{9} - 1\right)p = \left(\frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 9} - \frac{7 \cdot 9}{7 \cdot 9}\right)p = \frac{36 + 35 - 63}{63}p = \frac{8}{63}p.$$

   Multiplier par $\frac{63}{8}$ livre[4] le prix cherché $p = \frac{63}{8}36 = 63 \cdot 4,5 = 283,5$ (unité : k€).

Exercice C.

1. Notons resp. m et M les plus petite et grande notes attribuées. L'étendue est alors la différence $M - m$ et vaut 9 par hypothèse.

   Supposons que l'une des notes inconnues soit 16. On peut alors minorer $M \geq 16$. La note 6 ayant par ailleurs été attribuée, on peut majorer $m \leq 6$, *i. e.* minorer $-m \geq -6$. Ajouter ces deux minorations livre celle $M - m \geq 16 - 6$, *i. e.* $9 \geq 10$: contradiction ! Notre hypothèse est ainsi réfutée.

2. Supposons que les deux notes inconnues soient $12,5$ et $13,5$. On peut alors *explicitement* ranger les huit notes attribuées par ordre croissant :

$$6 \quad 7,5 \quad 10 \quad 12,5 \quad 13 \quad 13,5 \quad 14 \quad 15.$$

   Or, l'effectif étant $\boxed{8}$, qui est pair, il y a au moins $\frac{\boxed{8}}{2} = 4$ notes valant au plus la médiane 12, ce qui n'est pas le cas dans la liste ci-dessus (seules les trois 1res notes le sont). Cette contradiction.réfute notre hypothèse.

[1] *Sanity checks (tous les prix sont en euro)* : la chemise coûtait donc $c = 135 - p = 135 - 90 = 45$. Après réduction, le pantalon et la chemise coûtaient par conséquent resp. $\frac{4}{5}p = \frac{4}{5}90 = 4 \cdot 18 = 72$ et $\frac{7}{10}c = \frac{7}{10}45 = 7 \cdot 4,5 = 31,5$, dont la somme $72 + 31,5$ vaut bien $103,5$.

[2] L'unité choisie évite de se trimbaler des triplets de zéros inutilement, tout en restant d'usage courant (ce qui n'est pas le cas de la *centaine* d'euros, plus indiquée ici pour éviter les virgules).

[3] partir de $7 < 8$ et diviser par le produit $7 \cdot 8$ positif (ce qui préserve le sens de la comparaison) : on obtient alors $\frac{\cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 8} < \frac{\cancel{8}}{7 \cdot \cancel{8}}$, *i. e.* $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$

[4] *Sanity check* : les personnes possédaient donc resp. $\frac{4}{7}p = 4 \cdot 9 \cdot 4,5 = 162$ et $\frac{5}{9}p = 5 \cdot 7 \cdot 4,5 = 157,5$ milliers d'euro, dont la somme $162 + 157,5 = 319,5$ vaut bien $283,5 + 36 = p + 36$.

3. *Question fantôme* : combien de points doit valoir cette question pour que le total indiqué en haut du sujet corresponde ? Autant de bonus pour vous. Merci les éditions Nathan.

Exercice D.

1. D'après le communiqué de presse, la population interrogée a pour effectif 1 600 000 et le nombre cherché en vaut 81%, à savoir $\frac{81}{100} 1\ 600\ 000 = 1\ 296\ 000$.
2. On choisit comme unité de durée **la minute**.
   (a) Rangeons les quatorze durées sportives par ordre croissant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 15 & 15 & 30 & 30 & 40 & 50 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 90 & 90 & 100. \end{array}$$

   Les durées extrêmes étant 0 et 100, l'écart entre vaut $100 - 0 = 100$. L'étendue cherchée est donc de 100 min, ou encore d'1 h 40.

   (b) L'effectif vaut $\boxed{14}$ et est pair, donc *une* médiane serait n'importe quelle durée entre la $\frac{\boxed{14}}{2}$-ième et la suivante, à savoir entre 50 et 60. Il est cependant usuel de définir dans ce cas *la* médiane comme la moyenne de ces deux valeurs, à savoir $\frac{50+60}{2} = 55$.
3. **On garde la minute comme unité de durée.**
   (a) L'objectif est atteint ssi la durée moyenne est d'au moins 60. Montrons que ce n'est pas le cas, *sans calculer explicitement la moyenne*[5] mais en rappelant le fait utile suivant : **la moyenne ne change pas si on ajoute et soustrait le même nombre aux valeurs de deux individus**.

   Partons donc de la liste où l'on a réordonné la 2e ligne dans l'autre sens (cela servira), puis appliquons le fait rappelé sur chacune des sept colonnes[6], la ligne de $\pm$ indiquant le nombre ajouté/soustrait :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 15 & 15 & 30 & 30 & 40 & 50 \\ 100 & 90 & 90 & 60 & 60 & 60 & 60 \\ \pm 50 & \pm 40 & \pm 40 & \pm 10 & \pm 10 & \pm 10 & \pm 5 \end{array} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{ccccccc} 50 & 55 & 55 & 40 & 40 & 50 & 55 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 55 \end{array}.$$

   Les durées obtenues valant toutes au plus 55, ce sera également le cas de leur moyenne, laquelle est donc bien strictement en dessous des 60 attendues.

   (b) L'objectif d'un moyenne sportive journalière de 60 revient à une *durée totale* sportive valant *le nombre total de jours* fois 60. Or l'expérience a couru sur quatorze jours et se rallonge de sept jours, donc porte au total sur $14+7 = 21$ jours. La durée sportive totale à atteindre vaut donc $21 \cdot 60 = 1260$.

   Par ailleurs, la durée totale de sport sur les quatorze premiers jours s'obtient grâce au dernier tableau[7] et vaut

$$40 \cdot 2 + 50 \cdot 8 + 55 \cdot 4 = 80 + 400 + 220 = 700.$$

   La durée sportive à atteindre sur les *sept* derniers jours vaut donc la différence entre la durée-objectif totale (sur les 21 jours) et la durée déjà effectuée (sur les 14 premiers jours), à savoir $1260 - 700 = 560$.

   La durée cherchée vaut finalement 560 min, *i. e.* 9 h 20.

Exercice E.

1. On peut remplir le tableau à partir d'une étoile ★ vers l'autre en suivant les flèches, dans un sens comme dans l'autre (nous avons décrit le chemin partant d'en haut à gauche) :

modèle	ville	sport	TOTAL
noir	↓ ★	5	20
blanc	7	↓	←
marron	→	3	↑
TOTAL	27	★	45

. Cela donne :

modèle	ville	sport	TOTAL
noir	$\boxed{15}$	5	20
blanc	7	$\boxed{10}$	$\boxed{17}$
marron	$\boxed{5}$	3	$\boxed{8}$
TOTAL	27	$\boxed{18}$	45

.

Remarquer que deux caractères sont ici étudiés pour les modèles de chaussures : leur destination (pour la ville ou pour le sport) et leur couleur (noir, blanc ou marron).

[5] on peut évidemment le faire, nous proposons une solution à nos yeux plus élégante

[6] Un peu plus finement, on peut agir simplement sur les trois premières : on obtient alors des nombres valant chacun au plus 60, dont certains *strictement*, donc leur moyenne sera strictement en dessous de 60.

[7] le fait rappelé concerne en fait les *sommes* (donc en particulier les moyennes)

2. L'expérience aléatoire est ici *statistique* : les issues sont les individus de la population étudiée (*i. e.* les 45 modèles de chaussures). La mention « au hasard » indique qu'il est raisonnable d'imposer équiprobabilité, de sorte que la probabilité de l'événement "obtenir telle valeur de caractère" vaut la *fréquence* de ladite valeur, *i. e.* son effectif rapportée à l'effectif total 45.

   (a) L'effectif de la valeur "noir" (pour le caractère "couleur") étant $\boxed{20}$ (case déjà remplie par l'énoncé), la probabilité cherchée vaut $\frac{\boxed{20}}{45} = \frac{4}{9}$.

   (b) L'effectif de la valeur "sport" (pour le caractère "destination") vaut $\boxed{18}$ (case remplie par nos soins). La probabilité cherchée est donc $\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$.

   (c) L'effectif de la valeur "ville & marron" (pour le caractère "couleur & destination") étant $\boxed{5}$, la probabilité cherchée vaut $\frac{\boxed{5}}{45} = \frac{1}{9}$.

3. Il s'agit de comparer pour chacune des deux vitrines les probabilités de l'événement "obtenir un modèle noir".

   Le peu d'information dont on dispose sur la vitrine B nous incite à utiliser *la même modélisation* que pour la vitrine A. L'effectif de la valeur "noir" est alors $\boxed{30}$ pour la vitrine B dont l'effectif total est de 54 : la probabilité cherchée pour cette vitrine vaut donc $\frac{\boxed{30}}{54} = \frac{5}{9}$ et est plus grande que celle $\frac{4}{9}$ trouvée plus haut pour la vitrine A. Par conséquent, c'est dans la vitrine B qu'on a le plus de chances d'obtenir un modèle noir.

Exercice F.

1. L'énoncé parle de choisir « au hasard un chiffre, puis une lettre ». Interprétons de façon plus explicite : *le 1er visiteur choisit au hasard un chiffre (parmi les six disponibles) puis choisit au hasard une lettre (parmi les deux disponibles).*

   Selon cette interprétation, on a affaire à une expérience aléatoire à deux épreuves **indépendantes** (choisir tel ou tel chiffre ne modifie jamais les lettres disponibles ensuite) et chacune **équiprobable** (« au hasard » les deux fois). On peut représenter cette expérience par un arbre de probabilité[8] avec six branches pour la 1re épreuve (une pour chacun des $\boxed{\text{six}}$ chiffres 1,2,3,4,5,6, chacune pondérée par une probabilité $\frac{1}{\boxed{6}}$) et deux branches pour la 2de (une pour chacune des $\boxed{\text{deux}}$ lettres A,B, chacune pondérée par une probabilité $\frac{1}{\boxed{2}}$). La probabilité de chaque issue (feuille de l'arbre) vaut alors le produit des probabilités lues sur le chemin menant de la racine à ladite feuille, à savoir $\frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

   Or l'énoncé parle de « **Le** code d'ouverture » : il y a donc **une seule** issue réalisant l'événement "la porte s'ouvre" – en supposant *de plus* que le digicode fonctionne ! Cet événement a par conséquent la même probabilité que celle de chaque issue, à savoir $\frac{1}{12}$.

2. Pourquoi l'autre visiteur tiendrait compte de sa mémoire s'il compose *véritablement* « au hasard » ? Et pourquoi aurait-il la moindre idée de la *forme*[9] du code ? Afin d'éviter de se ramener à la question précédente, on supposera que *l'autre visiteur tient compte de sa mémoire* et qu'*il est informé de la forme du code* (un chiffre puis une lettre).

   Les chiffres représentant un nombre[10] multiple de 3 parmi ceux disponibles (de 1 à 6 inclus) étant 3 et 6, on peut alors reprendre exactement la même modélisation que pour le 1er visiteur mais en restreignant la 1re épreuve à **deux** issues. Il convient donc de remplacer les probabilités $\frac{1}{6}$ des branches de la 1re épreuve par $\frac{1}{\boxed{2}}$ (on est passé de *six* issues à $\boxed{\textit{deux}}$). La probabilité cherchée (anciennement $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$) devient alors $\frac{1}{\boxed{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

[8] Cela revient à modéliser les issues par les couples (c, L) où c est un entier compris entre 1 et 6 (**six** possibilités) et où L est un élément de la paire $\{A, B\}$ (**deux** possibilités) puis à imposer que chacune de ces $\mathbf{6} \cdot \mathbf{2} = \boxed{12}$ issues ait probabilité $\frac{1}{\boxed{12}}$.

[9] dans mon quartier, les codes ont plutôt cinq caractères, et j'ai visité des endroits qui en comportent six (sans parler de la *multitude* de codes à effectuer à la suite)

[10] un *chiffre* n'a aucun sens à être multiple de 3, un *nombre* oui

Exercice G.

Dans chacune des questions, il s'agit de piocher « au hasard » dans un certain ensemble de chocolats dont seule importe la saveur. Notons à chaque fois n (resp. ℓ, resp. b) le nombre de chocolats noirs (resp. au lait, resp blancs) et modélisons les $n+\ell+b$ issues par les lettres indexées[11]

$$N_1, N_2, ..., N_n, \quad L_1, L_2, ..., L_\ell, \quad B_1, B_2, ..., B_b$$

où la majuscule indique la saveur (N, L et B pour resp. "noir", "au lait" et "blanc").

Le fait que l'on prenne les chocolats « au hasard » et qu'ils soient « indiscernables au toucher » permet raisonnablement d'imposer équiprobabilité[12]. Comme il y a $n+\ell+b$ issues, la probabilité de chaque vaut $\frac{1}{n+\ell+b}$ et la probabilité de piocher un chocolat noir, resp. au lait, resp. blanc vaut

$$\frac{n}{n+\ell+b}, \quad \frac{\ell}{n+\ell+b} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{n+\ell+b}.$$

1. Par hypothèse, on a les égalités $\begin{cases} n = 12 \\ \ell = 10 \\ b = 8 \end{cases}$ et, d'après ce qui précède, la probabilité cherchée vaut

$$\frac{n}{n+\ell+b} = \frac{12}{12+10+8} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

2. On est parti de 12 chocolats noirs, 10 au lait et 8 blancs, puis on en a retiré un de chaque sorte. Il en résulte les égalités $\begin{cases} n = 12-1 = 11 \\ \ell = 10-1 = 9 \\ b = 8-1 = 7 \end{cases}$, d'où la probabilité cherchée :

$$\frac{\ell}{n+\ell+b} = \frac{9}{11+9+7} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

3. On est parti du même départ mais cette fois on a retiré un chocolat blanc, ce qui donne les égalités $\begin{cases} n = 12 \\ \ell = 10 \\ b = 8-1 = 7 \end{cases}$. La probabilité cherchée vaut donc

$$\frac{b}{n+\ell+b} = \frac{7}{12+10+7} = \frac{7}{29}.$$

Exercice H.

Dans chacun des jeux, on devine et on suppose (bien que cela ne soit pas dit explicitement !) que le candidat pioche *une seule* enveloppe parmi un certain ensemble d'enveloppes proposées. En notant n le nombre d'enveloppes, on peut modéliser les issues par les entiers de 1 à n inclus. Sans autre précision donnée par l'énoncé, il est raisonnable d'imposer équiprobabilité, de sorte que chaque enveloppe a probabilité $\frac{1}{n}$ d'être tirée.

1. On a ici $n=5$. Une seule enveloppe permettant de gagner (c'est écrit), il y a *une seule* issue réalisant l'événement "gagner le voyage", donc ce dernier a même probabilité que chaque issue, à savoir $\frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
2. On a cette fois l'égalité $n=6$ et trois enveloppes exactement contiennent un montant d'au moins 200€ (une de 500€ et deux de 200€, les autres montants étant 100€ et 0€). Par conséquent, l'événement "gagner au moins 200€" est constitué par $\boxed{\text{trois}}$ issues exactement, donc a probabilité $\frac{\boxed{3}}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
3. Les trois montants obtenables (200€, 100€ et 50€) étant chacun d'au plus 200€, l'événement "gagner au plus 200€" est certain (il est formé de *toutes* les issues), sa probabilité vaut donc 1.

[11] *indexer* est le verbe relatif au nom *indice* (on ne dit pas "indicer" !)
[12] Bien sûr, quand les sachets sont transparents, l'hypothèse d'indiscernabilité au toucher devient stupide.