Français

devoir sur table du vendredi 17 novembre 2023 – 1h

(cahier d'exercices p. 137)

Exercice 1.

a. La concentration moyenne pour Lyon se lit directement dans l'encadré pour Lyon et vaut

$$72,5 \text{ microgrammes par mètre cube.}$$

Celle pour Grenoble se calcule en moyennant les concentrations journalières données dans l'encadré pour Grenoble ; comme ces dernières ont pour effectif 10, il suffit de les additionner puis de décaler la virgule de la somme obtenue d'un cran vers la gauche :

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c}\text{somme pour Grenoble}\\ \text{des valeurs en } \mu g/m^3\end{array} &= \underline{32} + \underline{\underline{39}} + 52 + \overline{57} + \underline{78} + \overline{63} + 60 + 82 + \underline{\underline{82+89}} \\
&= \underline{110} + \underline{\underline{210}} + \overline{120} + \underbrace{194} = 440 + \underbrace{200-6} \\
&= 640 - 6 = 634, \text{ d'où la} \\
\begin{array}{c}\text{concentration moyenne}\\ \text{pour Grenoble}\end{array} &= 63,4 \ \mu g/m^3.
\end{aligned}$$

Finalement, vu la comparaison $63,4 < 72,5$, c'est Lyon qui a eu la concentration moyenne la plus forte sur la durée étudiée.

[mode râlage *on*] L'énoncé a oublié de préciser l'année ! Nous supposerons qu'il s'agit de celle pour laquelle les données sont disponibles, à savoir 2017. [mode râlage *off*]

b. L'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes. Ces dernières sont directement lisibles pour Lyon, à savoir 22 et 107 (en $\mu g/m^3$) , d'où une

$$\text{étendue pour Lyon (en } \mu g/m^3\text{) de } 107 - 22 = 105 - 20 = 85.$$

Quant à Grenoble, les données croissent avec le temps (sauf entre les 20 et 22 janvier vers le milieu), donc les valeurs extrêmes sont celles en début et fin de liste, à savoir 32 et 89 (en $\mu g/m^3$), d'où une

$$\text{étendue pour Grenoble (en } \mu g/m^3\text{) de } 89 - 32 = 87 - 30 = 57.$$

Total, c'est Lyon qui a l'étendue la plus grande. Cela signifie que la pollution par les PM10 a varié davantage en amplitude sur Lyon que sur Grenoble.

c. Sur Lyon, l'effectif est 10, lequel est pair, donc au moins $\frac{10}{2} = 5$ individus ont une valeur supérieure[1] à la médiane. Or cette dernière se lit dans l'énoncé ; elle vaut $83,5 \ \mu g/m^3$ et dépasse donc strictement le seuil d'alerte $80 \ \mu g/m^3$ défini par l'énoncé. Il y a donc au moins cinq jours où le seuil d'alerte est dépassé, d'où l'exactitude de l'affirmation proposée.

Exercice 2. Commençons par relever une erreur dans les données de 2012 fournies par l'énoncé, en <u>*démontrant une contradiction*</u>. **Il n'est pas du tout indispensable pour la suite de la solution de comprendre le raisonnement qui suit (mais il est tout à fait à votre portée).**

Rangeons la série des temps de 2016 (en s) par ordre croissant :

$$\underset{\text{moins l'étendue}}{\overset{\text{temps le plus long}}{9,63}} < a \quad < b \quad \underset{\text{l'effectif (8) est pair}}{\overset{\substack{\text{ont pour moyenne}\\ \text{la médiane car}}}{< c \quad < d}} \quad \underbrace{< e}_{\geq \text{ médiane}} \quad \underbrace{< f}_{\geq \text{ médiane}} \quad < 11,99.$$

Afin d'alléger les calculs, nous allons décaler notre série puis y zoomer, en soustrayant la médiane $9,84$ (ce pour avoir une médiane nulle) puis en multipliant par 100 (pour se débarrasser des virgules). La série prend alors la forme suivante :

$$\underbrace{-21 \quad A \quad B}_{\text{chacun} \geq \text{minimum}} \quad \underbrace{\overbrace{C \qquad\qquad D}^{\text{ont une moyenne nulle,}}}_{i.\ e.\ \text{une } somme \text{ nulle}} \quad \underbrace{E \quad F}_{\text{positifs}} \quad 215.$$

[1] ça marche aussi avec "inférieure", mais cela ne nous intéresse pas quant à l'affirmation étudiée

L'ancienne moyenne $10,01$ devient $16+1$ et vaut par définition la somme des valeurs rapportée à l'effectif (ici 8), d'où l'égalité

$$\text{somme des valeurs} = 8 \text{ moyennes} = 8 \cdot 17 = 136.$$

Maintenant, en remplaçant dans la somme ci-dessus chaque terme par un terme plus petit

$$-21 \qquad -21 \qquad -21 \qquad \underbrace{C \qquad\quad D}_{\text{somme nulle}} \qquad 0 \qquad 0 \qquad 215,$$

on obtient une somme plus petite, comparaison qui s'écrit $136 \geq 3 \cdot (-21) + 0 + 215$, ou encore $199 \geq 215$, ce qui crie à la contradiction !

Consulter les données "à la source" permettra alors de comprendre l'erreur. Wikipédia (si tant est qu'elle soit une source) donne les 8 temps (à la centiseconde), à partir desquels il est aisé de retrouver le temps moyen $10,095s$, dont l'arrondi à la cs est $10,\underline{\underline{10}}\ s$ et non $10,01\ s$ comme affirmé par l'énoncé.

Nous utiliserons dans notre solution le bon temps moyen arrondi à la cs. Utiliser l'autre valeur ne change heureusement rien aux questions posées !

a. L'épreuve étudiée (le 100m) est une course, donc une personne gagne si elle réalise le temps *le plus court*. Dans le tableau pour 2016, ce plus court temps apparaît à la 1re ligne 3e colonne et vaut $9,81$ secondes.

On peut aussi ordonner les temps (en secondes) par ordre croissant afin de lire aisément le plus petit à gauche :

$$\boxed{9,81} < 9,89 < 9,91 < 9,93 < 9,94 < 9,96 < 10,04 < 10,06.$$

b. Le temps moyen pour 2012 se lit directement dans les données : il vaut $10,\underline{\underline{10}}\ s$. Montrons que le temps moyen pour 2016 est plus petit, *et ce de trois façons différentes.*

i) *Idée 1 : ne pas réfléchir et appliquer la définition d'une valeur moyenne.* Pour 2016, on calcule le temps moyen en ajoutant les temps donnés (*i. e.* les valeurs de la série statistique) puis en rapportant la somme obtenue au nombre de candidats (*i. e.* à l'effectif total, ici 8), ce qui donne[2] :

$$\begin{aligned}
\text{temps cumulés (en } s) &= \underline{10,04} + \underline{9,96} + \underline{\underline{9,81}} + 9,91 + \overline{10,06} + \underline{\underline{9,89}} + 9,93 + \overline{9,94} \\
&= \underline{20} + \underline{\underline{9,8+9,9}} + (10-0,09) + \overline{20} + (10-0,07) \\
&= \widehat{20} + \underline{\underline{9,7+\widehat{10}}} + \widehat{40} - 0,16 = \widehat{70} + (10-0,30) - 0,16 \\
&= 80 - 0,46 = 79,54, \text{ d'où (en divisant par 8) le} \\
\text{temps moyen (en } s) &= \frac{80-0,48+0,02}{8} = \frac{80}{8} - \frac{0,48}{8} + \frac{0,02}{8} = 10 - 0,06 + \frac{0,01}{4} \\
&= 9,94 + 0,0025 = \boxed{9,9425}.
\end{aligned}$$

La valeur trouvée est plus petite que celle pour 2012, vu (par exemple) l'encadrement

$$\begin{matrix}\text{temps moyen} \\ \text{(en } s) \text{ pour 2016}\end{matrix} = 9,???? < 10 < 10,?? = \begin{matrix}\text{temps moyen} \\ \text{(en } s) \text{ pour 2012}\end{matrix}.$$

ii) *Idée 2 : translater et zoomer pour faciliter les calculs (avancé).* Vu que tous les temps se concentrent autour de 10 s et se mesurent au centième de seconde près, il est plus aisé de moyenner *les écarts à ce centre (10 s)* exprimés en centi-secondes (cs). Partant de la série ordonnée de la question **a**, tout multiplier par 100 puis retirer 1000 (cs) donne la série de ces écarts :

$$-19 < -11 < -9 < -7 < -6 < -4 < 4 < 6$$

(plus agréable à manier : pas de virgules ! maximum 2 chiffres par valeurs !).

Ces écarts ont pour somme

$$\underbrace{-19-11}\,-9-7\;\widetilde{-6}\;\underline{-4+4}\;\widetilde{+6} = \underbrace{-30}\,-16+\underline{0}+\widetilde{0} = -46,$$

d'où un écart moyen de

$$\frac{-46}{8} = \frac{2-48}{8} = \frac{2}{8} - \frac{48}{8} = 0,25 - 6 = -5,75.$$

[2] comme à l'exercice 1, les barres en dessous ou au-dessus indiquent des regroupements facilitant le calcul

Le temps moyen cherché vaut donc le centre que nous avons pris ($10\ s$) augmenté de l'écart moyen obtenu ($-5,75\ cs$), ce qui donne

$$10\ s - 5,75\ cs = 10,00\ s - 0,0575\ s = \boxed{9,9425\ s}.$$

Ouf, on trouve la même chose ! Et avec des calculs beaucoup plus simples :-).

iii) *Idée 3 : bricoler la moyenne pour éliminer les calculs (expert).* Pour répondre à la question, il n'est pas besoin de *calculer* la moyenne de 2016 : il suffit de montrer qu'elle est *plus petite que celle de 2012*, à savoir $10,\underline{\underline{10}}\ s$. Il suffit pour cela de montrer que la moyenne de 2016 est *en dessous*[3] *de* $10\ s$.

Or, si l'on oublie la 1re colonne, les six temps restants sont en dessous de $10\ s$, **donc leur moyenne aussi – bien prendre le temps de comprendre ce "donc" !**

Comment maintenant tenir compte des temps de la 1re colonne ? Grâce à la remarque suivante : *une somme ne change pas quand on remplace deux termes chacun par leur moyenne* (preuve : par définition d'une moyenne, la somme de deux nombres vaut le double de leur moyenne).

On peut donc, *sans changer le temps moyen*, remplacer les temps $10,04\ s$ et $9,96\ s$ chacun par leur moyenne $10\ s$ et de même pour les temps $10,06\ s$ et $9,94\ s$. On obtient alors une série de même moyenne avec des temps tous inférieurs à $10\ s$, et l'on peut conclure grâce au **"donc" en gras** deux paragraphes plus haut.

c. Le meilleur temps est le *minimum* entre le plus court temps de 2016 et celui de 2012. Celui de 2016 vaut $9,81\ s$ (*cf.* question **a**). Celui de 2012 peut se trouver à l'aide du temps le plus long et de l'étendue, tous deux donnés par l'énoncé : on obtient

$$\text{(en 2012) plus court temps} = \text{plus long temps} - \text{étendue} = 11,99\ s - 2,36\ s = 9,63\ s.$$

Vu la comparaison $9,63 < 9,81$, c'est en 2012 que le meilleur temps a été réalisé.

d. En 2012, l'effectif est pair et vaut 8 : il y a donc au moins $\frac{8}{2} = 4$ valeurs inférieures à la médiane. Or cette dernière vaut $9,84\ s$, qui est en dessous de $10\ s$. Par conséquent au moins quatre candidats ont parcouru les 100m en moins de 10 secondes, ce qui réfute[4] l'affirmation proposée.

e. Notons N le nombre cherché.

Puisque huit athlètes en tout ont concouru en 2012 , on a la comparaison $N \leq 8$.

Si l'on avait égalité ($N \stackrel{?}{=} 8$), alors tous les coureurs en 2012 auraient couru en moins de dix secondes, y compris le coureur le plus lent, donc le plus long temps en 2012 serait sous les $10\ s$ or ce temps vaut $11,99\ s$, ce qui serait absurde. L'égalité $N = 8$ est donc réfutée, ce qui permet (avec la comparaison $N \leq 8$) d'affirmer $N < 8$, *i. e.* d'affirmer $N \leq 7$.

Le nombre d'athlètes en 2016 ayant réalisé un temps de moins de dix secondes valant exactement 6 (*cf.* les 3 colonnes de droite dans le tableau donné), l'énoncé nous affirme la comparaison $N \geq 6$. Si l'on avait comparaison *stricte* $N > 6$, laquelle se reformule en la comparaison large $N \geq 7$, on aurait alors l'encadrement $7 \leq N \leq 7$ et nous pourrions conclure à l'égalité $N = 7$. C'est sans doute ce qui était attendu, et pourtant...

[mode râlage *on*]... l'énoncé est imprécis : l'expression « C'est lors de... qu'il y a eu le plus d'athlètes » laisse un flou sur le caractère *strict* ou *large* de la comparaison. Nous devons par conséquent ou bien assumer l'interprétation « le plus d'athlètes » dans le sens « le plus *strictement* » (ce qui permet de conclure comme ci-dessus), ou bien nous rajouter du travail et envisager le cas $N = 6$. J'ai la faiblesse de croire que ce cas n'a même pas traversé l'esprit de la personne ayant conçu cet énoncé et que supposer CLAIREMENT la comparaison stricte suffirait au Brevet. Nous allons cependant envisager ce cas afin de **ne pas tomber dans le travers facile de supposer ce qui nous arrange** – et car cela est tout à fait possible ici à l'aide de raisonnement fins et élégants. [mode râlage *off*]

Montrons comment réaliser le cas $N = 6$ avec les indicateurs statistiques donnés[5]. La forme de la question « Combien d'athlètes » semblant appeler une réponse unique, cette réalisation sera un argument en faveur de l'interprétation facile.

[3] Pourquoi cette valeur : $10\ s$? Parce qu'on voit tout de suite sur un nombre donné s'il est au-dessus ou en dessous d'elle : regarder s'il y a un chiffre des dizaines !

[4] Établir la fausseté d'une affirmation revient à la réfuter, *i. e.* à prouver qu'elle conduit à une absurdité.

[5] On vérifiera que l'on peut également imposer $N = 5$ ou $N = 4$ avec resp. les séries (recentrées sur la médiane puis centuplées)

$$\begin{array}{cccccccc} -21 & -21 & -21 & 0 & 0 & 26 & 26 & 215 \quad \text{et} \\ -21 & -21 & -21 & -20 & 20 & 26 & 26 & 215. \end{array}$$

En revanche, la 4e valeur sera toujours sous la médiane, donc négative, donc strictement sous le seuil 16, ce qui force la minoration $N \geq 4$. *Conclusion* : avec pour seule contrainte les indicateurs donnés, le nombre N peut varier entre 4 et 7 (inclus).

Afin d'avoir un 7e temps strictement[6] supérieur à 10 s, cherchons à le *maximiser* (notons t sa valeur en secondes). La moyenne étant imposée, cherchons pour ce faire à *minimiser* toutes les autres valeurs : les extrêmes sont imposées, les deux centrales n'influencent pas la moyenne (car ont pour moyenne la médiane), restent donc uniquement les 2e, 3e et 6e valeurs. Par exemple avec la série

$$\overbrace{9{,}63 \qquad 9{,}63 \qquad 9{,}63}^{\text{minimales}} \qquad \underbrace{\overset{\substack{\text{ont pour moyenne la médiane donc}\\ \text{leur somme ne changera pas la moyenne ;}}}{? \qquad\qquad ?}}_{\text{autant les prendre toutes deux égales à la médiane}} \qquad \overset{\text{médiane}}{9{,}84} \qquad t \qquad 11{,}99,$$

ou encore, vue une fois recentrée sur la médiane $9,84$ puis centuplée :

$$\overbrace{-21 \qquad -21 \qquad -21}^{\text{minimales}} \qquad \overbrace{0 \qquad 0 \qquad 0}^{\text{médianes}} \qquad T \qquad 215$$ la valeur seuil de 10 s devenant alors 16 (cs).

L'ancienne moyenne $10,\underline{\underline{095}}$ s devient (en cs) $16 + 9,5 = 25,5$ dont l'octuple vaut 204. La somme des valeurs attendue 204 valant par ailleurs $-63 + T + (204 + 11)$, on aura la bonne moyenne ssi $T = 11 - 64$, *i. e.* ssi $T = 52$, ou encore *i. e.* ssi $t = 10,36$.

Exercice 3.

a. Montrons pour Solenne comme pour Rachida que l'un au moins des indicateurs de la lanceuse inconnue n'est pas la leur : cela prouvera que ni l'une ni l'autre n'est cette inconnue (sinon *tous* les indicateurs devraient égaler ceux de l'inconnue).

[activation du mode coup de gueule] Remarquer ici le flou de l'énoncé... L'expression « *ne concernent ni les résultats [...] ni ceux de* » est vague car d'une part l'étendue proposée ($2,5$ m) est précisément celle de Solenne, d'autre part la médiane proposée (18 m) est justement celle de Rachida. Ces indicateurs statistiques ONT donc un rapport avec les résultats de Solenne et Rachida – certains indicateurs sont les mêmes ! Dans ces conditions, comment diable peut-on demander d'expliquer que ces indicateurs NE les concernent PAS ? ? ? *[fin du mode coup de gueule]*

Les valeurs extrêmes de la série de Rachida sont $17,6$ m et 19 m, d'où une étendue de $19\ m - 17,6\ m = 1,4\ m$, ce qui diffère de l'étendue de la série de l'inconnue.

La série de Solenne a pour effectif 5, qui est impair : vu l'égalité $\frac{5+1}{2} = \underline{\underline{3}}$, sa médiane vaut la **<u>trois</u>**ième valeur de la série après réordonnement. Or trois de ces valeurs (en mètres) commencent par 17 et les deux autres par 18 et 19, ce qui montre que la 3e valeur (ordonnée) commence par 17 et ne saurait donc valoir 18. La médiane proposée 18 m n'est donc pas celle des résultats de Solenne.

b. Considérons la série des mesures (en mètres) des lancers de Sarah *après réordonnement croissant.* Nous allons montrer que les séries solutions (*i. e.* vérifiant les 4 conditions données par l'énoncé) sont les séries de la forme

$$17 \qquad A \qquad 18 \qquad 36,5 - A \qquad 19,5 \qquad \text{où } A \text{ est n'importe quel nombre du segment } [17, 18].$$

Par exemple, quand A vaut resp. 17, $17,5$ et 18, on obtient les trois séries solutions

$$\begin{array}{ccccc} 17 & 17 & 18 & 19,5 & 19,5, \\ 17 & 17,5 & 18 & 19 & 19,5 \text{ et} \\ 17 & 18 & 18 & 18,5 & 19,5. \end{array}$$

Ce sont autant de solutions possibles, chacune d'elle répondant à la question – et, pour le Brevet, exhiber l'un de ces exemples est probablement suffisant.

Pourquoi montrer davantage que (probablement) demandé ? C'est pour insister à nouveau sur : d'une part **le flou de l'énoncé** « quels peuvent être les 3 lancers manquants » (demande-t-on quels peuvent être *tous* les trios de lancers *possibles* ? de donner *au moins un* tel trio ?), d'autre part le principe ne pas tomber dans le travers facile de supposer ce qui nous arrange. Mais c'est aussi l'occasion de présenter une démarche ommiprésente dans la résolution d'équations.

[6] Il y a aura alors au plus 6 « temps inférieurs à 10 s », quelle que que soit l'interprétation (large ou stricte) que l'on donne à « inférieurs », d'où la majoration $N \leq 6$. On s'arrangera ensuite pour que les 6 premiers temps soient *effectivement* strictement sous le seuil des 10 s.

i) **Analyse (ou sens direct) (ou recherche des conditions nécessaires).**

Un lancer de poids étant d'autant meilleur que la distance réalisée est grande, *via* « le meilleur lancer » l'énoncé livre en fait la valeur *maximale* $19,5\ m$. Puisque l'on nous donne l'étendue ($2,5\ m$), on en déduit la valeur minimale :

$$\text{valeur minimale} \ = \ \text{valeur maximale} - \text{étendue} = 19,5\ m - 2,5\ m = 17\ m.$$

La médiane par ailleurs étant donnée à $18\ m$, la série de Sarah réordonnée (et exprimée en mètres) est de la forme

$$\overbrace{17}^{\text{minimale}} \leq a \leq \overbrace{18}^{\text{médiane}} \leq b \leq \overbrace{19,5}^{\text{maximale}} \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ dénotent resp. les 2e et 4e valeurs (réordonnées).}$$

Nous n'avons pas encore tenu compte de la moyenne : cette dernière vaut d'une part $18,2\ m$ (d'après les données), d'autre part $\frac{17+a+18+b+19,5}{5}$ mètres (par définition). L'égalité des deux équivaut (retirer les unités puis quintupler)

$$\begin{aligned}
\text{à l'égalité } \underline{17} + a + \underline{18} + b + 19,5 &= 5 \cdot 18,2, \\
i.\ e. \text{ à } a + b + \underline{35} + \left(\widehat{21} - 1,5\right) &= \widehat{91}, \\
i.\ e. \text{ à } a + b &= \widehat{70} - \underline{35} + 1,5, \\
i.\ e. \text{ à } a + b &= 35 + 1,5, \\
i.\ e. \text{ à } b &= 36,5 - a.
\end{aligned}$$

Finalement, la série de Sarah est de la forme

$$17 \qquad A \qquad 18 \qquad 36,5 - A \qquad 19,5 \qquad \text{où } A := a \text{ est bien entre 17 et 18.}$$

ii) **Synthèse (ou sens réciproque) (ou suffisance des conditions nécessaires trouvées).**

Supposons la série de Sarah de la forme annoncée. Soit $A \in [17, 18]$ tel que la série solution est

$$17 \qquad A \qquad 18 \qquad 36,5 - A \qquad 19,5.$$

Vérifions alors que cette dernière série possède les 4 indicateurs (en m) de Sarah.

Avant toute chose, assurons-nous que cette série est bien ordonnée[7] ! La condition sur A nous garantit que les 3 premiers termes sont dans le bon ordre. Elle nous assure par ailleurs que le 4e terme $36,5 - A$ tombe entre $36,5 - 18 = 18,5$ et $36,5 - 17 = 19,5$, *a fortiori* bien entre les 3e et 5e termes (18 et $19,5$).

Le meilleur lancer est la valeur maximale et se lit tout à droite ($19,5$), l'étendue est la différence entre extrêmes $19,5 - 17 = 2,5$, la médiane se lit au milieu (18), enfin la moyenne vaut bien $18,2$ d'après les équivalences ci-dessus[8].

[7] ce afin d'éviter les méprises en y lisant les valeurs "extrêmes" ou "au milieu"...

[8] C'est *pour cela* que l'on a raisonné par équivalences plus haut, afin d'éviter de faire deux fois le travail. Quant la concision va de pair avec élégance !