Français

solutions proposées

Exercice 1. *Une famille comporte trois enfants, Alice, Bob et Craig, âgés respectivement de 12 ans, 10 ans et 5 ans. Les parents décident de leur donner de l'argent de poche au prorata de leur âge. Sachant que Bob reçoit cinq euros par mois, combien Alice et Craig reçoivent-ils ?*

Notons a, b, c les nombres d'euros reçus mensuellement par Alice, Bob et Craig respectivement. L'hypothèse "au prorata de" se traduit par la proportionnalité de la suite a, b, c et de celle des âges, à savoir de $12, 10, 5$. La donnée sur l'argent de poche de Bob se traduisant par ailleurs par l'égalité $b = 5$, on passe de la seconde suite à la première en divisant par 2 (en d'autres termes : le coefficient de proportionnalité correspondant vaut $\frac{1}{2}$). On en déduit les égalités $a = \frac{12}{2} = 6$ et $c = \frac{5}{2} = 2,5$. Finalement Alice recevra six euros par mois et Craig deux euros cinquante.

Exercice 2. *Une batte de baseball coûte un euro de plus qu'une balle de baseball. Leur prix total étant d'un euro et dix cents, trouver la proportion de la balle relativement à la batte – en précisant la grandeur sous-entendue !*

Notons B et b les prix respectifs en euros de la batte et de la balle. Les données se traduisent par les égalités $\begin{cases} B = b + 1 \\ b + B = 1,10 \end{cases}$: réinjecter la première égalité dans la seconde donne $b + (b+1) = 1,1$, *i. e.* $2b = 0,1$, ou encore $b = 0,05$, d'où $B = b + 1 = 1,05$. Par conséquent, la proportion *du prix de* la balle relativement à la batte vaut $\frac{b}{B} = \frac{0,05}{1,05} = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$.

Exercice 3 (plus long). *Soit $ABCD$ un carré de côté 2. Soit I un point sur le segment $[AB]$ divisant ce dernier selon le ratio $3 : 2$. On inscrit dans le carré $ABCD$ un carré dont l'un des sommets est I. Quelle est la proportion du carré inscrit relativement au carré inscrivant ?*

*(*indications *: en notant O le centre commun des carrés et M le milieu du segment $[AB]$, calculer les longueurs OM, AM, AI, MI, puis exprimer l'aire du carré inscrit en fonction du carré OI^2)*

Pour obtenir un ratio de $3 : 2$, il s'agit de découper le segment $[AB]$ en $3 + 2 = 5$ bouts (chacun donc de longueur celle de $[AB]$ divisée par 5, à savoir $\frac{2}{5}$) et de placer le point I après trois (ou deux) bouts en partant d'une des extrémités A ou B.

Mettons que l'on ait placé I à trois bouts en partant de A : la longueur AI vaudra alors trois longueurs d'un bout, à savoir $3\frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. Puisque les longueurs OM et AM valent la moitié de celle du côté du carré $ABCD$, à savoir 1, on en déduit la longueur

$$MI = AI - AM = \frac{6}{5} - 1 = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5},$$

d'où (par Pythagore) la valeur du carré

$$OI^2 = OM^2 + MI^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}.$$

Or, en appelant J l'un des sommets du carré inscrit adjacents à I, l'aire de ce carré vaudra le carré du côté IJ, lequel carré IJ^2 vaut (par Pythagore dans le triangle OIJ rectangle isocèle) $OI^2 + OJ^2 = 2OI^2$. Le carré $ABCD$ étant par ailleurs d'aire $AB^2 = 2^2 = 4$, le rapport cherché (car on cherche le ratio des *aires* des carrés) vaut

$$\frac{\text{aire du carré inscrit}}{\text{aire du carré } ABCD} = \frac{2OI^2}{4} = \frac{1}{2}\frac{26}{25} = \frac{13}{25}.$$

English

suggested solutions

Exercise 1. *A family has three children, Alice, Bob and Craig, who are respectively 12 years, 10 years and 5 years old. The parents decide to give them pocket money in proportion to their age. Given Bob receives five pounds a month, how much do Alice and Craig get?*

Define a, b, c to be the numbers of pounds received every month respectively by Alice, Bob and Craig. The hypothesis "in proportion to" translates into the proportionality of sequence a, b, c and of that of the ages, *i. e.* of sequence $12, 10, 5$. Besides, the data on Bob's pocket money translates into equality $b = 5$: therefore, one passes from the second sequence to the first by dividing by 2 (in other words : the corresponding proportionality coefficient is $\frac{1}{2}$). Hence equalites $a = \frac{12}{2} = 6$ and $c = \frac{5}{2} = 2.5$. In the end, Alice will get six pound a month and Craig two pounds fifty pennies.

Exercise 2. *A baseball bat costs one pound more than a baseball. Their total price being one pound and ten pennies, find the proportion of the baseball relatively to the bat – after precising the underlying magnitude!*

Call B and b the respective prices (in pounds) of the bat and the baseball. The data translate into equalities $\begin{cases} B = b + 1 \\ b + B = 1,10 \end{cases}$: plugging the first equality into the second yields $b + (b + 1) = 1,1$, *i. e.* $2b = 0,1$, or yet $b = 0,05$, hence $B = b + 1 = 1,05$. Therefore, the proportion of *the price of* the baseball relatively to (that of) the bat equals $\frac{b}{B} = \frac{0,05}{1,05} = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$.

Exercise 3 (longer). *Let $ABCD$ be a square whose side has length 1. Let I be a point on segment $[AB]$ that divides the latter according ratio $3 : 2$. Let's inscribe inside square $ABCD$ a square that has I among its vertices. What is the proportion of the inscribed square relatively to the inscribing square?*

*(*hints *: writing O for the common center of both squares and M for the middle of segment $[AB]$, compute lengths OM, AM, AI, MI, then express the area of the inscribed square in function of the square OI^2)*

Getting a ratio of $3 : 2$ amounts to splitting segment $[AB]$ into $3 + 2 = 5$ pieces (the length of each of them being consequently that of $[AB]$ divided by 5, that is to say : $\frac{2}{5}$) and placing point I after three (or two) pieces starting from one of extremities A or B.

Assume we placed I three pieces from A : length AI will then equal three lengths of a piece, that is to say : $3\frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. Since lengths OM and AM both equal half of that of the side of square $ABCD$, that is to say 1, one can derive length

$$MI = AI - AM = \frac{6}{5} - 1 = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5},$$

hence (by Pythagoras' theorem) the value of square

$$OI^2 = OM^2 + MI^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}.$$

Now, if we call J one of the vertices of the inscribed square that is adjacent to I, the area of that square will equal the square of side IJ, which square IJ^2 equal (by Pythagoras applied in "half-square" triangle OIJ) $OI^2 + OJ^2 = 2OI^2$. The area of square $ABCD$ being moreover $AB^2 = 2^2 = 4$, the sought-after ratio − for we are seeking the proportion of the *areas* of the squares − is

$$\frac{\text{area of inscribed square}}{\text{area of square } ABCD} = \frac{2OI^2}{4} = \frac{1}{2}\frac{26}{25} = \frac{13}{25}.$$