Applications linéaires

Définitions (*application linéaire*, *coefficient*). *Une **fonction** (ou **application**) **linéaire** est* LA MULTIPLICATION *par un nombre donné, appelé **le*** COEFFICIENT *de l'application linéaire.*

Remarque. Connaître une application linéaire REVIENT À connaître son coefficient.

La flèche $\mapsto$ (« donne »). Une application linéaire est souvent abrégée $t \mapsto Ct$, ce qui se LIT/PRONONC E « t donne Ct » et signifie

« *l'application qui à* CHAQUE *nombre t associe le* PRODUIT Ct ».

Par exemple, la fonction $q \mapsto 4q$ (dire « q DONNE $4q$ ») est l'application "quadrupler".

À la place des lettres MUETTES t ou p, on peut utiliser n'importe quel symbole. **dont le sens n'est pas déjà pris**. Par exemple, la "fonction" $\sqrt{3} \mapsto 4\sqrt{3}$ n'a aucun sens !

Définition (*appliquer*, *image*). Soit f une fonction linéaire, soit a un nombre.

***Appliquer** la fonction linéaire f* SUR *l'objet a, c'est effectuer sur cet objet* LA MULTIPLICATION *définissant f. Le résultat s'appelle alors* L'IMAGE PAR *l'application f* DE *l'objet a et se note* $\boxed{f(a)}$.

La notation $f(a)$ se prononce "f de a" : reliquat de

"$f(a)$ DÉPEND *de a"* *ou* "$f(a)$ EST *fonction de a".*

Reformulations. Il revient au même de dire :

1. l'objet b est L'IMAGE par la fonction f de l'objet a ;
2. on a l'égalité $\boxed{b = f(a)}$;
3. la fonction f envoie l'objet a SUR l'objet b ;
4. l'objet a a pour IMAGE par l'application f l'objet b ;
5. l'application f ASSOCIE à l'objet a l'objet b ;
6. on a l'association $a \overset{f}{\mapsto} b$ (lire « a DONNE b par f ») ;
7. l'objet a est ENVOYÉ sur l'objet b PAR la fonction f ;
8. APPLIQUER la fonction f sur l'objet a donne l'objet b ;
9. l'objet b ÉGALE/VAUT/EST l'image $f(a)$.

Définition (*antécédent*). Soit f une application linéaire, soit b un nombre.

*On appelle **antécédent de** b tout nombre dont* L'IMAGE *par f vaut b.*

Reformulations. Il revient au même de dire :

1. l'objet a est UN ANTÉCÉDENT par l'application f de l'objet b ;
2. on a L'ÉGALITÉ $f(a) = b$;
3. l'objet b est L'IMAGE par la fonction f de l'objet a ;

Définition (*graphe*). Soit un plan, soit un repère de ce plan, soit f une fonction linéaire.

*Relativement au repère donné, **le*** GRAPHE *de l'application f est l'ensemble des points de coordonnées $(a, f(a))$ lorsque a parcourt/décrit toutes les* ABSCISSES *possibles.*

*Le graphe de f s'appelle également **sa courbe*** REPRÉSENTATIVE – *car ses points forment une* "COURBE" *qui "représente" la fonction f.*

Reformulations. On dit la même chose en énonçant respectivement :

1. le point de coordonnées (a, b) APPARTIENT au graphe de la fonction f ;
2. le graphe de l'application f PASSE par le point de coordonnées (a, b) ;
3. l'objet b est L'IMAGE de l'objet a par la fonction f ;

4. le point de coordonnées (a, b) EST/TOMBE sur le graphe de l'application f ;
5. le graphe de la fonction f CONTIENT/POSS-DE le point de coordonnées (a, b) ;
6. l'objet a est UN ANTÉCÉDENT de l'objet b par la fonction f.

Proposition. Soit f une application linéaire.
Son graphe est alors, relativement à chaque repère, une DROITE *passant par l'origine.*
La pente commune de ces droites vaut LE COEFFICIENT *de* f.

Ainsi, les fonctions LINéaires ont pour graphes des LIGNES droites : ce ne sont pas les seules (penser à $t \mapsto 42$) mais cela peut aider à retenir leur nom.

Linear maps

Definitions (*linear map*, *coefficient*). *A* ***linear function*** *(or* ***linear map****) is the* MULTIPLICATION *by a given number, called* ***the* coefficient** *of the linear map.*

Remark. Knowing a linear map AMOUNTS/EQUATES TO knowing its coefficient.

The arrow $\mapsto$ (« map to »). A linear map is often abbreviated $t \mapsto Ct$, which READS « t maps to Ct » and means

« *the map which takes* EACH *number* t *to the* PRODUCT Ct ».

For instance, the function $q \mapsto 4q$ (read « q MAPS TO $4q$ ») is the map "to quadruple".

Instead of DUMMY letters t or p, any symbol can be used **whose meaning is not already taken**. For instance, the "function" $\sqrt{3} \mapsto 4\sqrt{3}$ has no meaning whatsoever !

Definitions (*to apply*, *image*). Let f be a linear function, let a be a number.

To apply *linear function* f ON *object* a *is to perform on this object the* MULTIPLICATION *that defines* f*. The result is then called* ***the* image under** *map* f **of** *object* a *and is written* $\boxed{f(a)}$.

Notation $f(a)$ *reads « f of a », which is a remnant of*

« $f(a)$ IS *function of* a » *in the sense of* « $f(a)$ DEPENDS *on* a ».

Rephrasings. Each of the following sentence has the same meaning :

1. object b is THE IMAGE under function f of object a ;
2. one has equality $\boxed{b = f(a)}$;
3. function f maps/takes object a TO object b ;
4. object a has for IMAGE under map f object b ;
5. map f ASSIGNS object b to object a ;
6. one has the assignment $a \overset{f}{\mapsto} b$ (read « a MAPS TO b under f ») ;
7. object a is TAKEN/MAPPED to object b UNDER function f ;
8. APPLYING function f on object a yields object b ;
9. object b IS / EQUALS / IS EQUAL TO image $f(a)$.

Definition (*preimage*). Let ℓ be a linear map, let b be a number.
*The **preimage under** function ℓ **of** object b is the set of numbers whose* IMAGE *under ℓ equals b.*

Rephrasings. It is equivalent to say :

1. object a belongs to THE PREIMAGE under map ℓ of object b ;
2. one has THE EQUALITY $\ell(a) = b$;
3. object b is THE IMAGE under function ℓ of object a.

Definition (*graph*). Let be a plane, let be a Cartesian coordinate system in that plane, let L be a linear function.
*Relatively to the given coordinate system, **the graph** of map L is the set of points whose coordinates are $(a,\ L(a))$ when a travels across / varies over all possible* ABSCISSAS___________ .

Rephrasings. The same is meant by saying respectively :

1. the point of coordinates (a, b) BELONGS to the graph of function L ;
2. the graph of map L PASSES through the point of coordinates (a, b) ;
3. object b is THE IMAGE of object a under function L ;
4. the point of coordinates (a, b) IS/LIES on the graph of map L ;
5. the graph of function L CONTAINS/OWNS the point of coordinates (a, b) ;
6. object a belongs to THE PREIMAGE of object b under function L.

Proposition. Let f be a linear map.
Then its graph, relatively to each Cartesian coordinate system, is a STRAIGHT LINE *that passes through the origin.*
The common slope of these straight lines equals THE COEFFICIENT *of function f.*

Thus, the graphs of **line**ar functions are straight **lin**es : even though there are other functions whose graphs are also straight lines (think about constant function $t \mapsto 42$), this can help reminding their name.