Français

Calcul littéral. *Dans chacune des expressions suivantes, les symboles autres que chiffres, parenthèses ou symboles d'opérations dénotent des nombres. Simplifier ces expressions* :

$$3a^3 5a^5 \qquad 5p^2q^3 \cdot 3p^2q\left(-2pq^2\right) \qquad \left(-2R^3S^3\right)\left(-5RS^{-1}\right)3R^{-2}S^2 \qquad \frac{12\lambda^2\mu^7}{8\lambda^5\mu^5} \qquad \frac{5\Delta^{-3}\square^4}{15\Delta^2\square^{-1}}$$
$$5\beta+3\beta+10\alpha+3\gamma-2\alpha-\alpha+4\beta-\gamma+7\gamma-2\beta$$
$$5\square+7\square^2+2\square^3+4+3\square^2-7+4\square^3-9\square+10$$
$$2\Delta^3+5\Delta^2-3\Delta+4-2\Delta+\Delta^3+5+2\Delta^2+8\Delta-1.$$

Concernant la première ligne (produits et quotients), on s'occupe d'abord du signe, puis des coefficients (numériques), enfin des littéraux (que l'on regroupe par lettre) :

- $3a^3 5a^5 = (3\cdot 5)\,a^3a^5 = 15a^{3+5} = 15a^8$,
- $5p^2q^3 \cdot 3p^2q\left(-2pq^2\right) = -\,(5\cdot 2\cdot 3)\,p^2p^2pq^3qq^2 = 30p^{2+2+1}q^{3+1+2} = 30p^5q^6$,
- $\left(-2R^3S^3\right)\left(-5RS^{-1}\right)3R^{-2}S^2 = +\,(2\cdot 4\cdot 3)\,R^3RR^{-2}S^3S^{-1}S^2 = 24R^{3+1-2}S^{3-1+2} = 24R^2S^4$,
- $\dfrac{12\lambda^2\mu^7}{8\lambda^5\mu^5} = \dfrac{12}{8}\dfrac{\lambda^2}{\lambda^5}\dfrac{\mu^7}{\mu^5} = \dfrac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{4}\cdot 2}\dfrac{1}{\lambda^{5-2}}\dfrac{\mu^{7-5}}{1} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu^2}{\lambda^3}$,
- $\dfrac{5\Delta^{-3}\square^4}{15\Delta^2\square^{-1}} = \dfrac{5}{15}\dfrac{\Delta^{-3}}{\Delta^2}\dfrac{\square^4}{\square^{-1}} = \dfrac{\cancel{5}\cdot 1}{\cancel{5}\cdot 3}\dfrac{1}{\Delta^{2+3}}\dfrac{\square^{4+1}}{1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\square^5}{\Delta^5}$.

Deuxième ligne. On regroupe les mêmes littéraux :

$$\begin{aligned}
& \underline{5\beta}\ \underline{+3\beta}\ \underbrace{+10\alpha}+3\gamma\ \underbrace{-2\alpha}\ \underbrace{-\alpha}\ \underline{+4\beta}-\gamma+7\gamma\underline{-2\beta} \\
= \ & \underbrace{10\alpha}\ \underbrace{-2\alpha}\ \underbrace{-\alpha}\ \underline{+5\beta}\ \underline{+3\beta}\ \underline{+4\beta}\ \underline{-2\beta}\ +3\gamma-\gamma+7\gamma \\
= \ & (10-2-1)\,\alpha+(5+3+4-2)\,\beta+(3-1+7)\,\gamma \\
= \ & 7\alpha+10\beta+9\gamma.
\end{aligned}$$

Troisième ligne. On regroupe les monômes de même puissance, et on présente le tout par puissances **dé**croissantes :

$$\begin{aligned}
& \underline{5\square}\ \underbrace{+7\square^2}\ \underline{\underline{+2\square^3}}+4\ \underbrace{+3\square^2}-7\ \underline{\underline{+4\square^3}}\ \underline{-9\square}+10 \\
= \ & \underline{\underline{2\square^3}}\ \underline{\underline{+4\square^3}}\ \underbrace{+7\square^2}\ \underbrace{+3\square^2}\ +\underline{5\square}\ \underline{-9\square}+4-7+10 \\
= \ & (2+4)\,\square^3+(7+3)\,\square^2+(5-9)\,\square+10-3 \\
= \ & 6\square^3+10\square^2-4\square+7.
\end{aligned}$$

Dernière ligne. Idem :

$$\begin{aligned}
& \underline{2\Delta^3}\ \underbrace{+5\Delta^2}\ \underline{\underline{-3\Delta}}+4\ \underline{\underline{-2\Delta}}\ \underline{+\Delta^3}+5\ \underbrace{+2\Delta^2}\ \underline{\underline{+8\Delta}}-1 \\
= \ & \underline{2\Delta^3}\ \underline{+\Delta^3}\ \underbrace{+5\Delta^2}\ \underbrace{+2\Delta^2}\ \underline{\underline{-3\Delta}}\ \underline{\underline{-2\Delta}}\ \underline{\underline{+8\Delta}}+4+5-1 \\
= \ & (2+1)\,\Delta^3+(5+2)\,\Delta^2+(-3-2+8)\,\Delta+8 \\
= \ & 3\Delta^3+7\Delta^2+3\Delta+8.
\end{aligned}$$

Entremets. *Peut-on trouver un naturel $\clubsuit$ tel que, pour chaque nombre δ, on ait l'égalité*

$$\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2=\delta^{\clubsuit}\ ?$$

Pas de panique face au membre de gauche ! Il ne va pas vous manger, ni bouger : donc regardons-le droit dans les yeux pour le simplifier. Pour cela, soit tout d'abord un nombre δ (afin de donner sens à ce membre de gauche). Les règles de priorité nous conduisent à *partir de la parenthèse* *la plus interne*. Remplaçons les parenthèses par des boîtes pour mieux y voir :

$$\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta^2}^2}^2}^2}^2}^2.$$

Partant du centre $\boxed{\delta^2}$, observer que chacun des cinq cadres *élève son contenu au carré puis multiplie ce carré par δ.* On obtient ainsi, à la suite de ces cinq opérations :

$$\begin{aligned}
\boxed{\delta^2} &\xrightarrow[\textbf{1er}\text{ cadre}]{\text{action du}} \delta\ \left(\delta^2\right)^2 = \delta\ \delta^{2\cdot 2} = \delta\ \delta^4 = \delta^5 \\
&\xrightarrow[\textbf{2e}\text{ cadre}]{\text{action du}} \delta\ \left(\delta^5\right)^2 = \delta\ \delta^{5\cdot 2} = \delta\ \delta^{10} = \delta^{1+10} = \delta^{11} \\
&\xrightarrow[\textbf{3e}\text{ cadre}]{\text{action du}} \delta\ \left(\delta^{11}\right)^2 = \delta\ \delta^{11\cdot 2} = \delta\ \delta^{22} = \delta^{1+22} = \delta^{23} \\
&\xrightarrow[\textbf{4e}\text{ cadre}]{\text{action du}} \delta\ \left(\delta^{23}\right)^2 = \delta\ \delta^{23\cdot 2} = \delta\ \delta^{46} = \delta^{1+46} = \delta^{47} \\
&\xrightarrow[\textbf{5e}\text{ cadre}]{\text{action du}} \delta\ \left(\delta^{47}\right)^2 = \delta\ \delta^{47\cdot 2} = \delta\ \delta^{94} = \delta^{1+94} = \delta^{95}.
\end{aligned}$$

Finalement, la réponse à la question posée est positive : il suffit de choisir $\clubsuit := 95$.

Maths & magie. *Jeter trois dés, doubler le nombre marqué sur l'un d'eux, ajouter 5 à ce double, multiplier cette somme par 5, ajouter le nombre marqué sur l'un des deux autres dés, écrire le résultat et rajouter tout à droite (comme dernier chiffre) le chiffre obtenu sur le dernier dé, retrancher enfin 250. Observer, conjecturer, démontrer !*

Regardons un exemple, avec les trois valeurs $\boxed{2}\boxed{5}\boxed{1}$ dans cet ordre. Suivons la procédure : doubler la première valeur (*i. e.* 2) donne $2 \cdot 2 = 4$, ajouter 5 donne $4 + 5 = 9$, multiplier par 5 donne $5 \cdot 9 = 45$, ajouter la deuxième valeur (*i. e.* 5) donne 50, rajouter tout à droite le troisième chiffre (*i. e.* 1) donne 501, retrancher 250 donne $501 - 250 = \underline{\underline{251}}$. On retrouve les trois chiffres de départ dans le même ordre ! Montrons que ce n'est pas une coïncidence. (Notre conjecture est donc : *on lira toujours les valeurs des dés dans le nombre final.*)

Notons a, b, c les nombres lus sur les dés dans l'ordre où ils sont choisis et suivons à nouveau la procédure : doubler la première valeur (*i. e.* a) donne $2a$, ajouter 5 donne $2a+5$, multiplier par 5 donne $5\,(2a + 5) = 10a+25$, ajouter la deuxième valeur (*i. e.* b) donne $10a + 25 + b$, rajouter tout à droite le troisième chiffre (*i. e.* c) revient à multiplier par 10 puis ajouter c, ce qui donne $10\,(10a + 25 + b) + c = 100a + 250 + 10b + c$, enfin retrancher 250 donne $\underline{\underline{100a + 10b + c}}$. Puisque a, b, c sont des entiers compris entre 0 et 9, la somme précédente a pour écriture décimale abc, ce qui conclut la démonstration de notre conjecture.

Si vous avez encore faim... *Simplifier les somme et fraction suivantes :*

$$8^{676} - 2^{2027} - 4^{1013} - 2^{2026} \qquad\qquad \frac{2^{2024} - 2^{2020}}{2^{2023} - 2^{2021}}.$$

Pour la somme, tachons de tout ramener à des puissances de 2, en travaillant déjà les premier et troisième termes :

$$8^{676} = \left(2^3\right)^{676} = 2^{3\cdot 676} = 2^{2028} \quad \text{et} \quad 4^{1013} = \left(2^2\right)^{1013} = 2^{2\cdot 1013} = 2^{2026}.$$

On voit à présent que tout tourne autour de la puissance $p := 2^{2026}$, essayons donc de tout y ramener :

$$\begin{aligned}
& 8^{676} - 2^{2027} - 4^{1013} - 2^{2026} = 2^{2028} - 2^{2027} - 2^{2026} - 2^{2026} \\
= \quad & 2^{2+2026} - 2^{1+2026} - 2^{2026} - 2^{2026} = 2^2 p - 2^1 p - p - p \\
= \quad & (4 - 2 - 1 - 1)\, p = 0p = 0. \text{ La somme étudiée est donc nulle !}
\end{aligned}$$

Quant à la fraction, nous pouvons de même tout exprimer agréablement à l'aide de la puissance $q := 2^{2020}$:

$$\frac{2^{2024} - 2^{2020}}{2^{2023} - 2^{2021}} = \frac{2^{4+2020} - 2^{2020}}{2^{3+2020} - 2^{1+2020}} = \frac{2^4 \cancel{q} - \cancel{q}}{2^3 \cancel{q} - 2\cancel{q}} = \frac{16 - 1}{8 - 2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

English

Literal computing. *In each of the following expressions, the symbols other than digits, brackets or operation symbols denote numbers. Simplify these expressions :*

$$3a^3 5a^5 \qquad 5p^2q^3\cdot 3p^2q\left(-2pq^2\right) \qquad \left(-2R^3S^3\right)\left(-5RS^{-1}\right)3R^{-2}S^2 \qquad \frac{12\lambda^2\mu^7}{8\lambda^5\mu^5} \qquad \frac{5\Delta^{-3}\square^4}{15\Delta^2\square^{-1}}$$
$$5\beta+3\beta+10\alpha+3\gamma-2\alpha-\alpha+4\beta-\gamma+7\gamma-2\beta$$
$$5\square+7\square^2+2\square^3+4+3\square^2-7+4\square^3-9\square+10$$
$$2\Delta^3+5\Delta^2-3\Delta+4-2\Delta+\Delta^3+5+2\Delta^2+8\Delta-1.$$

About the first line (products and quotients), let's first deal with the sign, then the (numerical) coefficients, finally the literals (to be gathered by letter) :

- $3a^3 5a^5 = (3\cdot 5)\,a^3a^5 = 15a^{3+5} = 15a^8$,
- $5p^2q^3\cdot 3p^2q\left(-2pq^2\right) = -\,(5\cdot 2\cdot 3)\,p^2p^2p\ q^3qq^2 = 30p^{2+2+1}q^{3+1+2} = 30p^5q^6$,
- $\left(-2R^3S^3\right)\left(-5RS^{-1}\right)3R^{-2}S^2 = +\,(2\cdot 4\cdot 3)\,R^3RR^{-2}\ S^3S^{-1}S^2 = 24R^{3+1-2}S^{3-1+2} = 24R^2S^4$,
- $\dfrac{12\lambda^2\mu^7}{8\lambda^5\mu^5} = \dfrac{12}{8}\dfrac{\lambda^2}{\lambda^5}\dfrac{\mu^7}{\mu^5} = \dfrac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{4}\cdot 2}\dfrac{1}{\lambda^{5-2}}\dfrac{\mu^{7-5}}{1} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu^2}{\lambda^3}$,
- $\dfrac{5\Delta^{-3}\square^4}{15\Delta^2\square^{-1}} = \dfrac{5}{15}\dfrac{\Delta^{-3}}{\Delta^2}\dfrac{\square^4}{\square^{-1}} = \dfrac{\cancel{5}\cdot 1}{\cancel{5}\cdot 3}\dfrac{1}{\Delta^{2+3}}\dfrac{\square^{4+1}}{1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\square^5}{\Delta^5}$.

Second line. Gather the same literals :

$$\begin{aligned} & \underline{5\beta}\ \underline{+3\beta}\ \underbrace{+10\alpha}+3\gamma\ \underbrace{-2\alpha}\ \underbrace{-\alpha}\ \underline{+4\beta}-\gamma+7\gamma\underline{-2\beta} \\ = \ & \underbrace{10\alpha}\ \underbrace{-2\alpha}\ \underbrace{-\alpha}\ \underline{+5\beta}\ \underline{+3\beta}\ \underline{+4\beta}\ \underline{-2\beta}\ +3\gamma-\gamma+7\gamma \\ = \ & (10-2-1)\,\alpha+(5+3+4-2)\,\beta+(3-1+7)\,\gamma \\ = \ & 7\alpha+10\beta+9\gamma. \end{aligned}$$

Third line. Gather the same-power monomials and sort them by **de**creasing powers :

$$\begin{aligned} & \underline{5\square}\ \underbrace{+7\square^2}\ \underline{\underline{+2\square^3}}+4\ \underbrace{+3\square^2}-7\ \underline{\underline{+4\square^3}}\ \underline{-9\square}+10 \\ = \ & \underline{\underline{2\square^3}}\ \underline{\underline{+4\square^3}}\ \underbrace{+7\square^2}\ \underbrace{+3\square^2}\ \underline{+5\square}\ \underline{-9\square}+4-7+10 \\ = \ & (2+4)\,\square^3+(7+3)\,\square^2+(5-9)\,\square+10-3 \\ = \ & 6\square^3+10\square^2-4\square+7. \end{aligned}$$

Last line. Idem :

$$\begin{aligned} & \underline{2\Delta^3}\ \underbrace{+5\Delta^2}\ \underline{\underline{-3\Delta}}+4\ \underline{\underline{-2\Delta}}\ \underline{+\Delta^3}+5\ \underbrace{+2\Delta^2}\ \underline{\underline{+8\Delta}}-1 \\ = \ & \underline{2\Delta^3}\ \underline{+\Delta^3}\ \underbrace{+5\Delta^2}\ \underbrace{+2\Delta^2}\ \underline{\underline{-3\Delta}}\ \underline{\underline{-2\Delta}}\ \underline{\underline{+8\Delta}}+4+5-1 \\ = \ & (2+1)\,\Delta^3+(5+2)\,\Delta^2+(-3-2+8)\,\Delta+8 \\ = \ & 3\Delta^3+7\Delta^2+3\Delta+8. \end{aligned}$$

Entremets. *Is it possible to find a natural number $\clubsuit$ such that, for each number δ, one has the following equality*

$$\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta\cdot\left(\delta^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = \delta^{\clubsuit}\ ?$$

Don't panic when facing the left-side member ! It's not going to eat you nor run away : so let's look at it straight in the eyes and get some order in it. To this aim, let first δ be a number – so that that left-side member is meaningful. The priority rules lead us to *start from* <u>*the most inner*</u> *bracket*. To see things better, let's replace the brackets by boxes :

$$\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta\,\boxed{\delta^2}^2}^2}^2}^2}^2 .$$

Starting from the center $\boxed{\delta^2}$, note that each of the five boxes *squares its content and multiplies this square by* δ.
Carrying out these five actions, one gets :

$$\begin{aligned}
\boxed{\delta^2} \xrightarrow[\textbf{1st box}]{\text{action of}} \; & \delta\,\left(\delta^2\right)^2 = \delta\,\delta^{2\cdot 2} = \delta\,\delta^4 = \delta^5 \\
\xrightarrow[\textbf{2d box}]{\text{action of}} \; & \delta\,\left(\delta^5\right)^2 = \delta\,\delta^{5\cdot 2} = \delta\,\delta^{10} = \delta^{1+10} = \delta^{11} \\
\xrightarrow[\textbf{3d box}]{\text{action of}} \; & \delta\,\left(\delta^{11}\right)^2 = \delta\,\delta^{11\cdot 2} = \delta\,\delta^{22} = \delta^{1+22} = \delta^{23} \\
\xrightarrow[\textbf{4th box}]{\text{action of}} \; & \delta\,\left(\delta^{23}\right)^2 = \delta\,\delta^{23\cdot 2} = \delta\,\delta^{46} = \delta^{1+46} = \delta^{47} \\
\xrightarrow[\textbf{5th box}]{\text{action of}} \; & \delta\,\left(\delta^{47}\right)^2 = \delta\,\delta^{47\cdot 2} = \delta\,\delta^{94} = \delta^{1+94} = \delta^{95}.
\end{aligned}$$

We can now answer positively to our question : we need only choose $\clubsuit := 95$.

Maths & magic. *Cast three dice, double the number marked on one of them, add 5 to that double, multiply that sum by 5, add the number marked on one of the other two dices, write down the result and write on the far right (as last digit) the digit obtained on the last die, last take away 250. Observe wisely, make a conjecture – and prove it !*

Let's look at an example, with the three values $\boxed{2}\boxed{5}\boxed{1}$ in this order. Let's follow the instructions : doubling the first value (*i. e.* 2) yields $2 \cdot 2 = 4$, adding 5 yields $4 + 5 = 9$, multiplying by 5 yields $5 \cdot 9 = 45$, adding the second value (*i. e.* 5) yields 50, writing on the far right the third digit (*i. e.* 1) yields 501, last taking away 250 yields $501 - 250 = 251$. Here are the three values we started with, in the same order ! Let's prove it's no coincidence. (Our conjecture is therefore : *we will always read the values of the three dice on the final number.*)

Call a, b, c the numbers read on the dice in the order they're chosen and let's follow again the instructions : doubling the first value (*i. e.* a) yields $2a$, adding 5 yields $2a + 5$, multiplying by 5 yields $5\,(2a + 5) = 10a + 25$, adding the second value (*i. e.* b) yields $10a + 25 + b$, writing on the far right the 3third digit c amounts to multiplying by 10 then adding c, which yields $10\,(10a + 25 + b) + c = 100a + 250 + 10b + c$, last taking away 250 yields $\underline{\underline{100a + 10b + c}}$. Since a, b, c are integers lying between 0 et 9, the previous sum reads abc in decimal writing, which concludes the proof of our conjecture.

If you're still hungry... *Simplify the following sum and fraction :*

$$8^{676} - 2^{2027} - 4^{1013} - 2^{2026} \qquad\qquad \frac{2^{2024} - 2^{2020}}{2^{2023} - 2^{2021}}.$$

About the sum, let's try to express everything in terms of powers of 2, by first working on the first and third terms :

$$8^{676} = \left(2^3\right)^{676} = 2^{3\cdot 676} = 2^{2028} \quad \text{and} \quad 4^{1013} = \left(2^2\right)^{1013} = 2^{2\cdot 1013} = 2^{2026}.$$

Now we can see everything seems to be about the power $p := 2^{2026}$, so let's try to express everything in function of that power :

$$\begin{aligned}
\text{our sum} \;&=\; 8^{676} - 2^{2027} - 4^{1013} - 2^{2026} = 2^{2028} - 2^{2027} - 2^{2026} - 2^{2026} \\
&=\; 2^{2+2026} - 2^{1+2026} - 2^{2026} - 2^{2026} = 2^2 p - 2^1 p - p - p \\
&=\; (4 - 2 - 1 - 1)\,p = 0p = 0. \text{ The sought-after sum is therefore null !}
\end{aligned}$$

As to the fraction, we can in the same way express everything nicely in function of the power $q := 2^{2020}$:

$$\frac{2^{2024} - 2^{2020}}{2^{2023} - 2^{2021}} = \frac{2^{4+2020} - 2^{2020}}{2^{3+2020} - 2^{1+2020}} = \frac{2^4\cancel{q} - \cancel{q}}{2^3\cancel{q} - 2\cancel{q}} = \frac{16 - 1}{8 - 2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$