devoir pour le 9 septembre 2023

solution proposée

Exercice 1. *Un chat se réveille sur une longue poutre suspendue. Face au danger de la hauteur, il passe en mode survie et adopte l'étrange comportement suivant : toutes les 10 secondes, il avance de 8 pas ou bien recule de 5 pas. Après quatre minutes et vingt secondes, il se retrouve là où il s'était réveillé. Combien de fois s'est-il déplacé vers l'avant ?*

Notons a le nombre d'avancées et r le nombre de reculées. Leur somme $a + r$ vaut alors le nombre total de mouvements, à savoir la durée totale divisée par la durée d'un mouvement[1], d'où les égalités

$$a + r = \frac{4\min 20s}{10s} = \frac{4 \cdot 60s + 20s}{10s} = 4 \cdot 6 + 2 = 26.$$

Par ailleurs, le nombre de pas effectués le long de la poutre (comptés positivement lors d'une avancée et négativement sinon) vaut $8a - 5r$ (chacune des a avancées contribue de $+8$ et chacune des r reculées apporte une contribution de -5) ; or ce nombre signé est nul (puisque le chat se retrouve là d'où il est parti), ce qui se traduit par l'égalité $8a = 5r$. Remplacer r par $26 - a$ donne alors $8a = 5\,(26 - a) = 5 \cdot 26 - 5a = 130 - 5a$, d'où $5a + 8a = 130$, c.-à-d. $13a = 13 \cdot 10$, *i. e.* $a = 10$.

Conclusion : le chat s'est déplacé 10 fois vers l'avant (et 16 vers l'arrière).

Exercice 2. *Trois entiers consécutifs ont pour somme cent onze : quels sont-ils ?*

Appelons n l'entier du milieu, de sorte que les trois entiers consécutifs sont $n - 1$, n et $n + 1$, lesquels ont pour somme $3n$ (les ± 1 se simplifient). Cette somme valant par ailleurs 111, on obtient (en divisant par 3) l'égalité $n = \frac{111}{3} = 37$.

Réciproquement, on vérifie que les entiers 36, 37 et 38 ont bien pour somme 111.

Exercice 3.

a. *Déterminer les nombres dont le carré égale cent soixante-neuf.*
b. *Résoudre l'équation* $1 + \sharp^2 = 170$ *d'inconnue numérique* $\sharp$.
c. *Soit* $\square$ *un nombre. Donner une condition nécessaire et suffisante* simple *pour avoir l'égalité* $\square^2 = 169$.
d. *Trouver les racines carrées de l'incrémenté du triple du septuple du cube de* 2.

Les quatre questions sont au fond **les mêmes**, il s'agit simplement de formulations différentes. Et les rédactions proposées sont **complètement interchangeables**. À vous de vous entraîner à passer de l'une à l'autre selon les problèmes !

a. Soit n un tel nombre. On a alors les égalités $n^2 = 169 = 13^2$, d'où celles $0 = n^2 - 13^2 = (n - 13)\,(n + 13)$. L'un des facteurs $n - 13$ ou $n + 3$ est donc nul, ce qui revient à l'une des égalités $n = 13$ ou $n = -13$.

Réciproquement, chacun des deux nombres trouvés a pour carré $(\pm 13)^2 = (\pm 1)^2\, 13^2 = 169$.

Conclusion : les nombres à déterminer sont (précisément) 13 et -13.

b. *Analyse*[2]. Soit s une solution de l'équation proposée. Alors d'une part s est un nombre ("inconnue **numérique**"), d'autre part il vérifie l'égalité $1 + s^2 = 170$, d'où (soustraire 1) l'égalité $s^2 = 170 - 1 = 169$. Reprendre la question (en remplaçant n par s) conduirait alors à l'une des égalités $s = \pm 13$.

Synthèse[3]. Réciproquement, les deux nombres obtenus sont bien solutions au vu des égalités

$$1 + (\pm 13)^2 = 1 + 13^2 = 1 + 169 = 170.$$

Conclusion : l'équation donnée a (exactement) deux solutions : 13 et -13.

[1] On admet qu'il n'y pas d'effets de bord : le chat ne se déplace pas *au moment où* il se réveille, ni *juste à la fin* des 4'20".

[2] *Analyser* des inconnues, c'est chercher des conditions qu'elles DOIVENT vérifier, autrement dit c'est trouver des conditions *nécessaires* pour que ces inconnues vérifient ce qu'on leur demande de vérifier.

[3] Après l'analyse vient la *synthèse* des conditions nécessaires trouvées : ces dernières *suffisent*-elles pour que nos inconnues vérifient ce qu'elles sont censées vérifier ? En d'autres termes, on recherche parmi les conditions nécessaires obtenues celles qui sont *suffisantes.*

c. *Conditions nécessaires*[4]. Supposons l'égalité $\square^2 = 169$. Comme à la question , on montrerait (en remplaçant n par $\square$) l'une des égalités $\square = \pm 13$.

Vérifions que cette condition nécessaire est *suffisante*[5]. Supposons donc l'une des égalités $\square = \pm 13$. Comme ci-dessus on établit alors l'égalité $\square^2 = 169$.

Conclusion : une condition simple comme demandé est la disjonction[6] $\square = 13$ ou $\square = -13$.

d. Tout d'abord, l'incrémenté[7] du triple du septuple du cube de 2 vaut

$$\overbrace{1 + 3 \cdot \overbrace{7 \cdot \overbrace{\underbrace{2^3}_{\text{le cube de 2}}}^{\text{le septuple de...}}}^{\text{le triple de...}}}^{\text{l'incrémenté de...}} = 1 + 21 \cdot 8 = 1 + 168 = 169 = 13^2.$$

Soit ensuite r un nombre. Ce dernier est alors une racine carrée du nombre décrit si et seulement si[8] $r^2 = 13^2$, *i. e.* ssi $r^2 - 13^2 = 0$, *i. e.* ssi $(r-13)(r+13) = 0$, *i. e.* ssi $\left\{ \begin{array}{l} r - 13 = 0 \\ \text{ou} \\ r + 13 = 0 \end{array} \right.$, *i. e.* ssi $\left\{ \begin{array}{l} r = 13 \\ \text{ou} \\ r = -13 \end{array} \right.$.

Autre rédaction possible. Soit ρ ("rhô") un nombre. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & \rho \text{ est une racine carrée du nombre décrit} \\ \underset{\text{ce symbole fléché se prononce : "\textit{équivaut à}"}}{\iff} & \rho^2 = 169 \iff \rho^2 = 13^2 \iff \rho^2 - 13^2 = 0 \\ \iff & (\rho - 13)(\rho + 13) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho - 13 = 0 \\ \text{ou} \\ \rho + 13 = 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} \rho = 13 \\ \text{ou} \\ \rho = -13 \end{array} \right. . \end{array}$$

Remarque (implications et équivalences logiques). L'expression "**si et seulement si**" s'abrège en "**ssi**".

Dire "on a A **seulement si** on a B", c'est dire "pour avoir A, il faut (nécessairement) d'avoir B", *i. e.* c'est affirmer l'implication $A \Longrightarrow B$. (Le symbole d'implication $\Longrightarrow$ se prononce "*implique*".)

Dire "on a A **si** on a B", c'est dire "pour avoir A, il suffit (simplement) d'avoir B", *i. e.* c'est affirmer l'implication (réciproque) $A \Longleftarrow B$. (Le symbole d'implication réciproque $\Longleftarrow$ se prononce "*est impliqué par*".)

Dire "on a A **ssi** on a B", c'est affirmer les deux ensembles, *i. e.* c'est affirmer les deux implications $\left\{ \begin{array}{l} A \Longrightarrow B \\ B \Longrightarrow A \end{array} \right.$, et c'est encore affirmer l'équivalence $A \Longleftrightarrow B$.

Aux trois premières questions, on a à chaque fois raisonné en deux temps, d'abord un sens puis l'autre (le sens réciproque). En revanche, à la dernière question, ces deux temps ont été réunis en un seul : on a raisonné *par équivalences*. La première fois ce raisonnement a été présenté *entièrement en français* ("on a A ssi on a B, *i. e.* ssi on a C, *i. e.*... ssi on a Z"), la seconde fois avec les symboles $\Longleftrightarrow$ ("on les équivalences suivantes : $A \Longleftrightarrow B \Longleftrightarrow C \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow Z$").

Exercice 4. *Hagrid a elevé en secret des niffleurs mais doit à présent s'en séparer : il consent à les revendre sur le chemin de Travers. À une première personne, il vend la moitié de ses niffleurs plus un demi-niffleur. À une deuxième personne il cède la moitié de ce qui lui reste plus un demi-niffleur. Après cinq opération du même genre, Hagrid n'a plus un seul niffleur. Combien en avait-il élevé ? Et qui a coupé les nifflers en deux ?*

[4] Pour avoir l'égalité désirée, il FAUT que...
[5] Pour avoir l'égalité désirée, il SUFFIT que...
[6] Une ***disjonction*** est un énoncé de la forme "A **ou** B".
[7] ***incrémenter***, c'est ajouter 1
[8] abrégé par la suite en "**ssi**". Voir remarque en fin d'exercice pour le sens.

Notons N le nombre cherché. Après chacune des cinq ventes, le nombres de niffleurs qu'Hagrid possède encore est transformé *toujours de la même façon* : on lui retire sa moitié puis un demi. Notons o l'opération qui, appliquée à chaque nombre, transforme ce dernier en lui retirant sa moitié puis un demi. Nous savons que, partant de N, appliquer l'opération o cinq fois de suite donne le nombre final restant de niffleurs restants, à savoir 0. Si l'on arrive à "renverser" l'opération o, il suffira d'appliquer l'opération "renversée" sur 0 cinq fois de suite pour remonter jusqu'à N. Avanti !

Soit un nombre n dont on note n' le transformé par l'opération o. Il s'agit d'exprimer n en fonction de n'. Par définition de o, on a les égalités

$$n' = n \underbrace{-\frac{n}{2}}_{\text{retirer la moité (de } n\text{)}} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{retirer un demi}} = \left(n - \frac{n}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2},$$

d'où (doubler) l'égalité $2n' = n - 1$, *i. e.* (incrémenter et échanger les membres) $n = 2n' + 1$.

Il reste à appliquer cette opération "renversée" à partir de 0 cinq fois de suite :

le nombre 0 est transformé en $2 \cdot \boxed{0} + 1 = 1$,

lequel est transformé en $2 \cdot \boxed{1} + 1 = 3$,

lequel est transformé en $2 \cdot \boxed{3} + 1 = 7$,

lequel est transformé en $2 \cdot \boxed{7} + 1 = 15$,

lequel est transformé en $2 \cdot \boxed{15} + 1 = 31$, d'où la conclusion

$$N = 31$$

(et aucun niffleur n'a été coupé ! redérouler le fil chronologique pour s'en convaincre).

Exercice 5. *J'ai une grande sœur. Dans quatre ans, elle sera deux fois plus âgée que moi. Dans deux ans, l'octuple de mon âge sera une année de plus que le double du sien. Que font nos parents ?*

Notons a mon âge et A celui de ma grande sœur – âges exprimés en *années*. La première hypothèse se traduit par l'égalité

$$\underbrace{A+4}_{\text{son âge dans 4 ans}} = 2 \cdot \underbrace{(a+4)}_{\text{mon âge dans 4 ans}} \quad \text{et la seconde par } 8 \cdot \underbrace{(a+2)}_{\text{mon âge dans 2 ans}} = 1 + 2 \cdot \underbrace{(A+2)}_{\text{son âge dans 2 ans}}.$$

La première égalité $A + 4 = 2a + 8$ permet d'isoler $\underline{\underline{A+2}} = 2a + 6$, membre de gauche que l'on réinjecte ensuite (afin de n'avoir que du a) dans la seconde hypothèse, ce qui livre les égalités

$$8a + 16 = 1 + 2\,(2a + 6) = 1 + 4a + 12, \text{ d'où } 4a = -3 \text{ et } a = -\frac{3}{4}.$$

L'unité étant l'année, j'ai finalement moins trois quart d'une année, c.-à-d. *moins neuf mois*. En d'autres termes, je naîtrai (si tout se passe bien) après une période standard de gestion chez l'être humain. Il est donc fort probable que mes parents soient en train de me concevoir.

(Pour qui demanderait l'âge de ma sœur, une première réponse serait "Pourquoi en as-tu besoin ?", une seconde serait "deux ans et demi" – vérifier !)

homework for 9 September 2023

suggested solution

Exercise 1. *A cat wakes up on a long suspended beam. Faced with the danger of height, it switches to "survival mode" and adopts the following strange behaviour : every 10 seconds, it takes either 8 steps forward or 5 steps backwards. After four minutes and twenty seconds, the cat finds itself back where it woke up. How many times did the cat it move forward ?*

Write f (resp. b) for the numbers of steps forward (resp. backwards). Their sum $f+b$ equals the total number of moves, çàd the total duration divided by one move duration[9], hence the equalities

$$f + b = \frac{4\,\text{min}\,20s}{10s} = \frac{4 \cdot 60\cancel{s} + 20\cancel{s}}{10\cancel{s}} = 4 \cdot 6 + 2 = 26.$$

Moreover, the number of steps made by the cat along the beam (counted *positive* when moving forward and *negative* otherwise) is $8f - 5b$ (each of the f forward moves contributes as $+8$ and each of the b backward moves brings a contribution of -5) ; but this signed number is null (since the cat is back where it left), which amounts to the equality $8f = 5b$. Replacing b by $26 - f$ then yields $8f = 5\,(26 - f) = 5 \cdot 26 - 5f = 130 - 5f$, hence $5f + 8f = 130$, *i. e.* $13f = 13 \cdot 10$, *i. e.* $f = 10$.

Conclusion : the cat moved 10 times forward (and 16 backwards).

Exercise 2. *Three consecutive integers add up to a hundred and eleven : what are they ?*

Call n the middle number, so that the three consecutive integer are $n - 1$, n and $n + 1$, which sum up to $3n$ (the ± 1 cancel). This sum also equaling 111, one gets (after dividing by 3) the equality $n = \frac{111}{3} = 37$.

Conversely, one checks that integers 36, 37 and 38 sum up 111.

Exercise 3.

a. *Find the numbers whose square equals a hundred and sixty-nine.*

b. *Solve the equation* $1 + \natural^2 = 170$ *whose numerical unknown is* $\natural$.

c. *Let* $\square$ *be a number. Give a necessary and sufficient condition (a* simple *one) for the equality* $\square^2 = 169$ *to hold.*

d. *Determine the square roots of the incremented tripled sevenfold cube of* 2.

The four questions are fundamentally **the same**, these above are just different formulations – and the corresponding writings are **fully interchangeable**. Try to shift from one to another according the given problem !

a. Let n be such a number. One has then equalities $n^2 = 169 = 13^2$, hence equalities $0 = n^2 - 13^2 = (n - 13)\,(n + 13)$. Therefore, one of the factors $n - 13$ or $n + 3$ is null, which amounts to one of the equalities $n = 13$ or $n = -13$.

Conversely, each of the two numbers found has as its square $(\pm 13)^2 = (\pm 1)^2\, 13^2 = 169$.

Conclusion : the numbers to be found are (precisely) 13 and -13.

b. *Analysis*[10]. Let s be a solution of the given equation. Then first s is a number ('**numerical** unknown'), second it satisfies equality $1 + s^2 = 170$, hence (take away 1) equality $s^2 = 170 - 1 = 169$. Taking again question (replacing n by s) would then lead to one of the equalities $s = \pm 13$.

Synthesis[11]. Conversely, both numbers obtained *are* solutions thanks to equalities

$$1 + (\pm 13)^2 = 1 + 13^2 = 1 + 169 = 170.$$

Conclusion : the given equation has (exactly) two solutions : 13 and -13.

[9] We assume no 'edge effect' : the cat doesn't move *exactly when* it awakes, nor *just at the end of* the 4'20".

[10] To *analyse* unknowns is to look for conditions they MUST satisfy, in other words it is to find *necessary* conditions for theses unknowns to satisfy what they are asked to satisfy.

[11] After the analysis comes the *synthesis* of the necessary conditions we've found : do the latter *suffice* for our unknowns to satisfy what they should ? In other words, we are looking, among the necessary conditions obtained, for those that are *sufficient.*

c. *Necessary conditions*[12]. Assume equality $\square^2 = 169$. As in question , we would prove (by replacing n by $\square$) one of the equalities $\square = \pm 13$.

Let's check this necessary condition is *sufficient*[13]. Suppose therefore one of the equalities $\square = \pm 13$. As above, we then establish equality $\square^2 = 169$.

Conclusion : a simple condition as asked is disjunction[14] $\square = 13$ or $\square = -13$.

d. First of all, the incremented[15] tripled sevenfold cube of 2 is

$$\overbrace{1 + \overbrace{3 \cdot \overbrace{7 \cdot \underbrace{2^3}_{\text{cube of 2}}}^{\text{sevenfold...}}}^{\text{tripled...}}}^{\text{the incrementd...}} = 1 + 21 \cdot 8 = 1 + 168 = 169 = 13^2.$$

Let next r be a number. The latter is then a square root of the above number if and only if [16] $r^2 = 13^2$, *i. e.* iif $r^2 - 13^2 = 0$, *i. e.* iif $(r-13)(r+13) = 0$, *i. e.* iif $\left\{\begin{array}{l} r - 13 = 0 \\ \text{ou} \\ r + 13 = 0 \end{array}\right.$, *i. e.* iif $\left\{\begin{array}{l} r = 13 \\ \text{ou} \\ r = -13 \end{array}\right.$.

Other possible writing. Let ρ ('rhô') be a number. One then has the following equivalences :

$$\begin{array}{cl} & \rho \text{ is a square root of the described number} \\ \underset{\substack{\text{this arrow symbol} \\ \text{reads : '}\textit{equates to}\text{'}}}{\iff} & \rho^2 = 169 \iff \rho^2 = 13^2 \iff \rho^2 - 13^2 = 0 \\ \iff & (\rho - 13)(\rho + 13) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \rho - 13 = 0 \\ \text{or} \\ \rho + 13 = 0 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \rho = 13 \\ \text{or} \\ \rho = -13 \end{array}\right. . \end{array}$$

Remark (logical implications and equivalences). The expression '**if and only if**' is babreviated into '**iif**'.

To say 'one has A **only if** one has B' is to say 'to have A, one must (necessarily) have B', *i. e.* it is to state implication $A \Longrightarrow B$. (The implication symbol $\Longrightarrow$ reads '*implies*'.)

To say 'one has A **if** one has B' is to say 'to have A, it suffices (simply) to have B', *i. e.* it is to state (converse) implication $A \Longleftarrow B$. (The converse implication symbol $\Longleftarrow$ reads '*is implied by*'.)

To say 'one has A **iif** one has B' is to say both together, *i. e.* it is to state both implications $\left\{\begin{array}{l} A \Longrightarrow B \\ B \Longrightarrow A \end{array}\right.$, it is yet to state equivalence $A \iff B$.

In the first three questions, we have each time reasoned in two steps, first one direction then the other one (the converse). However, in the last question, both steps were reunited in one : we have reasoned *by equivalences.* On the first time, this reasoning was presented *entirely in English* ('one has A iif one has B, *i. e.* iif one has C, *i. e.*... iif one has Z'), on the second time it was presented with symbols $\iff$ ('one has the following equivalences : $A \iff B \iff C \iff \cdots \iff Z$').

Exercise 4. *Hagrid secretly raised nifflers but must now part with them. He agrees to go to Diagon Alley's and sell them on the market. To the first person, he sells half his nifflers plus half a niffler. He lets the second person have half the remaining nifflers plus half a niffler. After five like operations, Hagrid has no more nifflers. How many did he raise ? Who sliced the nifflers in halves ?*

Call N the sought-after number. After *each* of the five sales, the number of nifflers Hagrid still has is transformed *always in the same way* : take away its half, then take away one half. Define o to be the operation

[12] To have the wanted equality, one MUST have...
[13] To have the wanted equality, it SUFFICES to have...
[14] A ***disjunction*** is a statement of the form 'A **or** B'.
[15] to ***increment*** is to add 1
[16] usually abbreviated by '**iif**'. See ending remark for the meaning.

that, when applied to each number, transforms the latter by taking away its half then one half. We know that, starting from N, applying operation o five times in a row gives the eventual number of remaining nifflers, that is : 0. Should we succeed in 'reversing' operation o, we'll need only applying the 'reverse' operation on 0 five times in a row to get back to N. Let's go!

Let n be a number whose transformed by operation o is denoted by n'. We want to express n as a function of n'. Using o's definition, one has the following equalities

$$n' = n \underbrace{-\frac{n}{2}}_{\text{take away its half (of } n)} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{take away one half}} = \left(n - \frac{n}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2},$$

hence (double) equality $2n' = n - 1$, *i. e.* (increment then swap members) $n = 2n' + 1$.

Let's finally apply this 'reversed' operation from 0 five times in a row :

number 0 is transformed into $2 \cdot \boxed{0} + 1 = 1$,

which is transformed into $2 \cdot \boxed{1} + 1 = 3$,

which is transformed into $2 \cdot \boxed{3} + 1 = 7$,

which is transformed into $2 \cdot \boxed{7} + 1 = 15$,

which is transformed into $2 \cdot \boxed{15} + 1 = 31$, hence the conclusion

$$N = 31$$

(no niffler was sliced in half! unwind the chronological thread to make sure of it).

Exercise 5. *I have a big sister. In four years, she'll be twice older than me. In two years, the eightfold of my age will be a year more than the twofold of hers. What are our parents doing?*

Define a to be my age and A my big sister's – these ages being expressed in *years*. The first hypothesis translates into equality

$$\underbrace{A+4}_{\text{her age in 4 years}} = 2 \cdot \underbrace{(a+4)}_{\text{my age in 4 years}} \quad \text{and the second into } 8 \cdot \underbrace{(a+2)}_{\text{my age in 2 years}} = 1 + 2 \cdot \underbrace{(A+2)}_{\text{her age in 2 years}}.$$

First equality $A + 4 = 2a + 8$ allows us to separate $\underline{\underline{A+2}} = 2a + 6$, which left-member one then plugs (so to have only a's) into the second hypothesis, which plugging yields equalities

$$8a + 16 = 1 + 2\,(2a + 6) = 1 + 4a + 12, \text{ hence } 4a = -3 \text{ and } a = -\frac{3}{4}.$$

The unit used being the year, at the end of the day I have minus three quarters of one year, *i. e. minus nine months*. In other words, I will be born (if everything goes right) after a standard human gestation time. My parents are therefore most probably conceiving me.

(For those who would ask for my sister's age, a first answer would be 'Why do you need it?', a second answer would be 'two and a half years' – check!)