Devoir sur table (suites)

jeudi 3 novembre 2016

Solution proposée.

1. Le nombre a_0 est le revenu annuel d'Alice sur l'année $2016+0=2016$ exprimé en k€, çàd son revenu annuel initial en k€, à savoir
$$a_0 = 20.$$
Le nombre a_1 est le revenu annuel d'Alice sur l'année $2016+1=2017$ exprimé en k€. Or ce revenu a augmenté de 3% le 1er janvier 2017 et le CM associé vaut
$$1+T\acute{E} = 1+3\% = 1+0,03 = 1,03, \text{ d'où } a_1 = CM \cdot a_0 = 1,03 \cdot 20 = 20,6.$$
De même, le nombre a_2 est le revenu annuel d'Alice sur l'année $2016+2=2018$ exprimé en k€, donc vaut celui en 2017 augmenté de 3% par rapport à celui de 2018, à savoir
$$a_2 = CM \cdot a_1 = 1,03 \cdot 20,6 = 21,218.$$
2. Le revenu d'Alice sur l'année $2016+(n+1)$ est augmenté de 3% au 1er janvier $(2016+n)+1$ par rapport au revenu sur l'année $2016+n$. On en déduit
$$a_{n+1} = CM \cdot a_n = 1,03a_n$$
3. Nous avons montré $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 1,03a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique de raison $1,03$.
4. Le cours donne les égalités $a_n = a_0 \times (\text{raison})^n = 20 \cdot 1,03^n$.
5. Vu d'une part l'égalité $2024 = 2016+8$, d'autre part les égalités
$$a_8 = 20 \cdot 1,03^8 \simeq 25,335,$$
sur l'année 2025 Alice gagne environ 25 335 €. On trouverait de même
$$a_9 = 20 \cdot 1,03^9 \simeq 26,095,$$
de sorte qu'Alice gagne environ 26 095 € sur l'année 2026.
6. Le nombre b_0 est le revenu annuel de Bob sur l'année $2016+0=2016$ exprimé en k€, çàd son revenu annuel initial en k€, à savoir
$$b_0 = 25.$$
Le nombre b_1 est le revenu annuel de Bob sur l'année $2016+1=2017$ exprimé en k€. Or ce revenu a augmenté de 50€=0,05k€ le 1er janvier 2017, d'où
$$b_1 = b_0 + 0,05 = 25 + 0,05 = 25,05.$$
De même, le nombre b_2 est le revenu annuel de Bob sur l'année $2016+2=2018$ exprimé en k€, donc vaut celui en 2017 augmenté de 0,05k€ par rapport à celui de 2018, à savoir
$$b_2 = b_1 + 0,05 = 25,05 + 0,05 = 25,1.$$
7. Le revenu de Bob sur l'année $2016+(n+1)$ est augmenté de 0,05k€ au 1er janvier $(2016+n)+1$ par rapport au revenu sur l'année $2016+n$. On en déduit
$$b_{n+1} = b_n + 0,05.$$
8. Nous avons montré $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n + 0,05$. La suite (b_n) est donc arithmétique de raison $0,05$.
9. Le cours donne les égalités $b_n = b_0 + n\times$ raison $= 25 + 0,05n$.
10. Vu d'une part l'égalité $2024 = 2016+8$, d'autre part les égalités
$$b_8 = 25 + 0,05 \cdot 8 = 25 + 0,4 = 25,4,$$
sur l'année 2025 Bob gagne 25 400 €. Rajouter les 50€ d'augmentation au 1er janvier 2026 montrerait que Bob gagne 25 450 € sur l'année 2026.

11. L'hypothèse affirme l'existence d'un naturel N tel que

$$a_0 < b_0,\ a_1 < b_1,\ \dots,\ a_{N-1} < b_{N-1}, \qquad\qquad a_N > b_N,\ a_{N+1} > b_{N+1}, \dots.$$

Or les question 5 et 10 livrent les comparaisons

$$\begin{aligned} a_8 \simeq 25,335 &\quad < \quad 25,4 = b_8 \text{ et} \\ a_9 \simeq 26,095 &\quad > \quad 25,45 = b_9, \end{aligned}$$

ce que montre l'égalité $N = 9$. Par conséquent, c'est en $2016 + 9 = 2025$ (et pas avant) qu'Alice commence à gagner plus que Bob.

6. Nous pourrions créer trois colonnes comme suit.

Une colonne "année", première ligne "2016", **ligne suivante = ligne précédente + 1**, à dérouler jusqu'à "2050".

Une colonne "revenu annuel d'Alice en k€" (avec 3 décimales), première ligne "20" (en face de "2016"), **ligne suivante = ligne précédente * 1.03**, à dérouler jusqu'en face de "2050".

Une colonne "revenu annuel de Bob en k€" (avec 3 décimales), première ligne "25" (en face de "2016"), **ligne suivante = ligne précédente + 0.05**, à dérouler jusqu'en face de "2050".

Nous verrions alors apparaître l'année charnière où le revenu d'Alice commence à dépasser celui de Bob.