Devoir sur table (probabilités)

jeudi 19 janvier 2017

Solution proposée.

1. Le test n'ayant que deux issues possibles et *exclusives* (l'énoncé précise « positif *ou bien* négatif »), les événements T^+ et T^- sont contraires l'un de l'autres, donc la somme de leurs probabilités vaut 1.

2. Le nombre $P_I(T^+)$ désigne la probabilité de l'événement T^+ sachant I, çàd la probabilité que le test se révèle positif sachant la personne infectée. D'après l'énoncé, cet énoncé se réalise dans 80% des cas : sa probabilité vaut donc $0,8$.

3. L'énoncé donne les probabilités $\begin{cases} P(I) = 0,05 \\ P_I(T^+) = 0,8 \\ P_{\overline{I}}(T^-) = 0,99 \end{cases}$. On en déduit celles

$$\begin{cases} P\left(\overline{I}\right) = 1 - P(I) = 1 - 0,05 = 0,95 \\ P_I(T^-) = 1 - P_I(T^+) = 1 - 0,8 = 0,2 \\ P_{\overline{I}}(T^+) = 1 - P_{\overline{I}}(T^-) = 1 - 0,99 = 0,01 \end{cases}$$

, d'où l'arbre demandé :

$$\begin{array}{cccc} & & \overset{0,8}{\nearrow} & T^+ \\ \overset{0,05}{\nearrow} & I & \overset{0,2}{\longrightarrow} & T^- \\ \underset{0,95}{\searrow} & \overline{I} & \underset{0,01}{\longrightarrow} & T^+ \\ & & \underset{0,99}{\searrow} & T^- \end{array}.$$

4. L'événement $I \cap T^+$ décrit l'issue où la personne est infectée et où son test se révèle positif. Sa probabilité vaut

$$P\left(I \cap T^+\right) = P(I) \times P_I\left(T^+\right) = 0,05 \times \frac{4}{5} = 0,04.$$

On calcule de même la probabilité de l'événement « la personne n'est pas porteuse mais son test se révèle positif » :

$$P\left(\overline{I} \cap T^+\right) = P\left(\overline{I}\right) \times P_{\overline{I}}\left(T^+\right) = 0,95 \times 0,01 = 0,0095.$$

5. L'événément T^+ est la réunion disjointe des événements $T^+ \cap I$ et $T^+ \cap \overline{I}$ (cela correspond aux deux chemins différents sur l'arbre menant à chacune des deux feuilles T^+), d'où l'égalité

$$P\left(T^+\right) = P\left(T^+ \cap I\right) + P\left(T^+ \cap \overline{I}\right) = 0,04 + 0,0095 = 0,0495.$$

6. La probabilité que la personne choisie soit infectée sachant que son test s'est révélé positif vaut

$$P_{T^+}(I) = \frac{P(T^+ \cap I)}{P(T^+)} = \frac{0,04}{0,0495} = \frac{400}{495} = \frac{80}{99} \simeq 0,8081.$$

Ce test est moyennement fiable (qui serait assuré de son infection par un test positif avec ces 20% de marge d'erreur ?), ce que confirmerait le calcul de $P_{T^-}(I) = 0,2124$ (qui serait rassuré par un test négatif sachant que l'on serait alors porteur du virus dans *plus d'un cas sur cinq* ?).