Devoir sur table (dérivées)

jeudi 27 avril 2017

Solution proposée.

1. **(8 pts)** D'une part, pour chaque entier $n \in \{0,1,2,3\}$, la fonction $t \mapsto t^n$ a pour dérivée $t \mapsto nt^{n-1}$, d'autre part la dérivée d'une combinaison linéaire vaut la combinaison linéaire des dérivées. On en déduit les égalités

$$\begin{aligned} a'(r) &= 0, \quad b'(r) = 3, \quad c'(r) = 8, \quad d'(r) = -1, \quad e'(r) = 2r, \\ f'(r) &= 10r - 2, \quad g'(r) = 2 - 3r^2, \quad h'(r) = 2r - 1 + 3r^2. \end{aligned}$$

2. **(3+1+3+1 pts)** Le quotient $\frac{c}{d}$ est défini là où d ne s'annule pas, çàd sur $\mathbb{R}\setminus\{7\}$. Si $r \neq 7$ (la précaution à prendre), on a alors les égalités

$$\left[\frac{c}{d}\right]'(r) = \frac{c'(r)\,d(r) - c(r)\,d'(r)}{d(r)^2} = \frac{8(7-r) - (8r-5)(-1)}{(7-r)^2} = \frac{56 - 8r + 8r - 5}{(7-r)^2} = \frac{51}{(7-r)^2} > 0.$$

De même, si $r \neq \frac{5}{8}$, l'inverse $\frac{1}{c(r)}$ fait sens et l'on a les égalités

$$\left[\frac{d}{c}\right]'(r) = \frac{d'(r)\,c(r) - d(r)\,c'(r)}{c(r)^2} \underset{\text{du calcul précédent}}{\overset{\textit{cf.}\text{ numérateur}}{=}} \frac{-51}{(8r-5)^2} < 0.$$

3. **(2+2 pts)** La fonction $\frac{c}{d}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 7[$ et $]7, \infty[$ où sa dérivée est positive, donc elle croît sur chacun de ces intervalles. De même, la fonction $\frac{c}{d}$ décroît sur chacun des intervalles $\left]-\infty, \frac{5}{8}\right[$ et $\left]\frac{5}{8}, \infty\right[$.

4. **(3+2 pts)** Appelons $z^+ > 0$ le zéro de g donné par l'énoncé. On a alors pour chaque $r \neq z^+$ les égalités

$$\begin{aligned} \left[\frac{e}{g}\right]'(r) &= \frac{e'(r)\,g(r) - e(r)\,g'(r)}{g(r)^2} = \frac{2r\left(7 - r^3 + 2r\right) - r^2\left(2 - 3r^2\right)}{g(r)^2} \\ &= \frac{14r - 2r^4 + 4r^2 - 2r^2 + 3r^4}{g(r)^2} = \frac{r^4 + 2r^2 + 14}{g(r)^2} \\ &= \frac{r}{g(r)^2}\left(r^3 + 2r + 14\right) \end{aligned}$$

Notons $z^- < 0$ le zéro de la fonction $x \mapsto x^3 + 2x + 14$ donné par l'énoncé. Par hypothèse, cette fonction change de signe en z^-. Envoyant par ailleurs 0 sur 14, elle est positive sur $[z^-, \infty[$ (car $z^- < 0 < 14$), donc négative sur $]-\infty, z^-]$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

r	$-\infty$		z^-		0		z^+		∞
r		$-$		$-$		$+$		$+$	
$r^3+2r+14$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{1}{g(r)^2}$		$+$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$	
$\left[\frac{e}{g}\right]'(r)$		$+$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$	
$\frac{e}{g}(r)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

.